阿蒂亚《交换代数引论》部分习题解答

苏剑林, http://kexue.fm

2017 年 7 月 2 日

目录

1 环和理想

1.2 设 A 是环, 而 $A[x]$ 是系数属于 A 的一个未定元 x 的多项式环，令 $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$，证明：

1.2.1 f **是** $A[x]$ **中可逆元** $\Leftrightarrow$ a_0 **是** A **中可逆元，而** $a_1, \ldots, a_n$ **是幂零元；**

$\Leftarrow$：由题意便知 a_0 是 $A[x]$ 中的可逆元，而因为 $a_1, \ldots, a_n$ 是 A 中的幂零元，所以 $a_1 x, \ldots, a_n x^n$ 是 $A[x]$ 中的幂零元，根据第一章课后习题 1，可得

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$$

在 $A[x]$ 中可逆。

$\Rightarrow$：设

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in A[x]$$

在 $A[x]$ 中可逆，其逆为

$$g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \in A[x]$$

则根据 $fg = 1$ 知

$$1 = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + \cdots + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1}) x^{m+n-1} + a_n b_m x^{m+n}$$

所以

$$\begin{cases} 1 = a_0 b_0 \\ 0 = a_1 b_0 + a_0 b_1 \\ \qquad \vdots \\ 0 = a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} \\ 0 = a_n b_m \end{cases}$$

下证 $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0, \forall 0 \le r \le m$，对 r 使用数学归纳法。

当 $r = 0$ 时已经明显成立。假设我们已经有

$$a_n^r b_{m-r+1} = a_n^{r-1} b_{m-r+2} = \cdots = a_n b_m = 0$$

那么根据

$$a_n b_{m-r} + a_{n-1} b_{m-r+1} + \cdots + a_{n-r} b_m = 0$$

在两端各自乘上 a_n^r 并结合归纳假设得到 $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$。所以 $a_n^{r+1} b_{m-r} = 0, \forall 0 \le r \le m$，所以 $a_n^{m+1} b_0 = 0$，由 $a_0 b_0 = 1$ 知 b_0 是可逆元，因此 $a_n^{m+1} = 0$，即 a_n 幂零，所以 $-a_n x^n$ 也幂零。

接着对 n 使用数学归纳法。$n = 0$ 时显然成立，而 $n \ge 1$ 时，因为 $f(x)$ 可逆，$-a_n x^n$ 幂零，所以由第一章课后习题 1 知

$$f - a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \in A[x]$$

是可逆的，由归纳假设，a_0 可逆，且 $a_1, \ldots, a_{n-1}$ 幂零，所以得到 a_0 可逆，且 $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ 都幂零。证毕。

1.2.2 f 幂零 $\Leftrightarrow a_0, a_1, \ldots, a_n$ 幂零；

$\Leftarrow$：因为 $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ 幂零，所以 $a_0, a_1x, \ldots, a_nx^n \in A[x]$ 也幂零，所以存在足够大的 N 使得 $a_0^N = (a_1x)^N = \cdots = (a_nx^n)^N = 0$，所以

$$\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right)^{(n+1)N} = 0$$

证明表明幂零元的和也幂零。

$\Rightarrow$：$n = 0$ 时是显然的，假设结果对 $n-1$ 时成立。那么如果 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 幂零，所以存在 N 使得

$$\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right)^N = 0$$

展开即知 $(a_nx^n)^N = 0$，即 a_n 和 $-a_nx^n$ 幂零。由前面一步知

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} = f - a_nx^n$$

幂零，由归纳假设知 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ 幂零，所以系数全幂零。

1.2.3 f 是零因子 $\Leftrightarrow$ 存在着环 A 的非 0 元 a 使得 $af = 0$；

$\Leftarrow$：这是显然的。

$\Rightarrow$：如果 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 是零因子，则存在最低次的非零多项式 $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ 使得 $fg = 0$，即

$$\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right)\left(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m\right) = 0$$

所以 $a_nb_m = 0$，那么 $a_ng = 0$，否则 $\deg a_ng < m, (a_ng)f = 0$，这与 g 次数最低矛盾。所以

$$0 = fg = \left(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right)g$$

类似地，我们有 $a_{n-1}b_m = 0$，同样 $a_{n-1}g = 0$，否则 $\deg a_{n-1}g < m, (a_{n-1}g)f = 0$... 依此类推，我们得到

$$a_{n-r}g = 0, \forall 0 \leq r \leq n$$

因为 g 非零，所以至少存在一个 $b_i \neq 0$，那么

$$a_{n-r}b_i = 0, \forall 0 \leq r \leq n$$

这意味着 $b_if = 0$。

1.2.4 如果 $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (1)$，$f$ 就叫本原多项式。证明，如果 $f, g \in A[x]$，那么 fg 本原 $\Leftrightarrow f$ 和 g 皆本原。

设 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$。那么

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$$

$\Rightarrow$：如果 fg 本原，则根据定义

$$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) = (1)$$

显然，我们有

$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m \in (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$
$$a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m \in (b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

所以

$$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) \subseteq (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$
$$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

因此只能

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (b_0, b_1, \ldots, b_n) = (1)$$

根据定义 f, g 本原。

$\Leftarrow$：如果 f, g 皆本原，即

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (b_0, b_1, \ldots, b_n) = (1)$$

假设 fg 不本原，那么设

$$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) = I \subsetneq (1)$$

则由 1.4 知，存在一个极大理想 $I_{\max} \supseteq I$，考虑域 $A/I_{\max}$ 上的多项式整环 $(A/I_{\max})[x]$。考虑对应的多项式

$$F = (a_0 + I_{\max}) + (a_1 + I_{\max})x + \cdots + (a_n + I_{\max})x^n$$
$$G = (b_0 + I_{\max}) + (b_1 + I_{\max})x + \cdots + (b_m + I_{\max})x^m$$

因为

$$(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) \subseteq I_{\max}$$

所以 $FG = (a_0b_0 + I_{\max}) + (a_0b_1 + a_1b_0 + I_{\max})x + \cdots + (a_nb_m + I_{\max})x^{n+m} = 0$，因为 $(A/I_{\max})[x]$ 是整环，所以 $F = 0$ 或 $G = 0$，但这意味着 $a_i \in I_{\max}, \forall 0 \le i \le n$ 或 $b_i \in I_{\max}, \forall 0 \le i \le m$，这跟 $(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (b_0, b_1, \ldots, b_n) = (1)$ 矛盾。

1.5 设 A 是环，$A[[x]]$ 是系数在 A 中的形式幂级数 $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 所组成的环, 证明：

1.5.1 f 是 $A[[x]]$ 中可逆元 $\Leftrightarrow$ a_0 是 A 中可逆元；

$\Rightarrow$：如果 f 可逆并且 $g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_nx^n$ 是它的可逆元，则

$$1 = fg = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \ldots$$

所以 $a_0b_0 = 1$，即 a_0 可逆。

$\Leftarrow$：当 a_0 可逆时，记

$$f = a_0(1+g), \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_0} x^n$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}=&\frac{1}{a_0(1+g)}\\=&\frac{1}{a_0}\left(1-g+g^2-g^3+\dots\right)\\=&\frac{1}{a_0}\left[1-\frac{a_1}{a_0}x+\left(\frac{a_1^2}{a_0^2}-\frac{a_2}{a_0}\right)x^2+\dots\right]\in A[[x]]\end{aligned}$$

所以 f 可逆。

1.5.2 如果 f 幂零, 那么对一切 $n\geq 0$，a_n 都幂，逆命题是否成立?

如果 f 幂零，则存在 N 使得 $f^N=0$，那么

$$0=\left(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\right)^N=a_0^N+Na_0^{N-1}a_1x+\dots$$

所以 a_0 是幂零元。

假设 $a_0,a_1,\dots,a_n$ 均为幂零元，第一章课后习题 2 ii) 的证明表明有限个幂零元之和仍然为幂零元，所以 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in A[[x]]$ 也幂零，那么

$$\frac{f-(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)}{x^{n+1}}=a_{n+1}+a_{n+2}x+\cdots\in A[[x]]$$

也幂零，根据前一步的证明 a_{n+1} 也幂零。所以 $a_0,a_1,\dots,a_n,\dots$ 均幂零。

反过来不成立，因为存在这样的可能性，a_i 是 N_i 阶的幂零元，并且 $i<j$ 时，$N_i<N_j$，那么多项式

$$f=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$$

就不是幂零元，因为如果存在有限的 N 使得 $f^N=0$，则 $N\geq\max\{N_i\}_i^\infty=+\infty$。通过无穷维矩阵可以构造出具体的反例。

1.5.3 f 属于环 $A[[x]]$ 的大根 $\Leftrightarrow$ a_0 属于环 A 的大根；

$$f\text{属于}A[[x]]\text{的大根}\xLeftrightarrow{\text{命题 1.9}}\forall g=\sum_{n=0}^\infty b_nx^n\text{，}1-fg\text{都可逆}$$
$$\xLeftrightarrow{\text{第一问所证明的}}\forall b_0\text{，}1-a_0b_0\text{可逆}$$
$$\xLeftrightarrow{\text{命题 1.9}}a_0\text{属于}A\text{的大根。}$$

1.5.4 环 $A[[x]]$ 中任一极大理想 m 对 A 的局限理想都是 A 中的极大理想，而 m 由 m^c 和 x 生成；

$m^c=m\cap A$，如果 m^c 不极大，那么存在极大理想 $I_{\max}\supsetneq m^c$，考虑 $A[[x]]$ 中的理想 $(I_{\max},x)$，显然 $(I_{\max},x)\supsetneq m$，并且 $(I_{\max},x)^c=I_{\max}$，所以 $(I_{\max},x)\neq A[[x]]$，这与 m 是极大的矛盾。

$m^c=m\cap A$，这表明 m^c 是 m 的所有常数项的集合，而 (x) 是所有常数项为零的形式幂级数的集合，(m^c) 是所有系数都在 m^c 中的形式幂级数的集合，所以 (m^c,x) 正好是所有常数项在 m^c 中的全体形式幂级数的集合，所以 $m\subseteq(m^c,x)\subsetneq A[[x]]$，由 m 的极大性，得到 $m=(m^c,x)$。

1.5.5 A 中任一素理想都是 $A[[x]]$ 中一个素理想的局限理想。

设 p 是 A 的一个素理想，显然 $p=(p,x)\cap A=(p,x)^c$，下证 (p,x) 是 $A[[x]]$ 的一个素理想。设 $f=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，如果 $fg=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+\cdots\in(p,x)$，则 $a_0b_0\in p$，因为 p 是素的，所以 $a_0\in p$ 或 $b_0\in p$，所以 $f\in(p,x)$ 或 $g\in(p,x)$。

1.7 设环 A 中任一元素 x 都适合 $x^n=x$ 对某个 $n>1$（而 n 依赖于 x）。证明 A 中任一素理想都极大。

首先留意到，等式 $x^n=x$ 过渡到商环，保持不变。

设 p 是 A 的一个素理想，考虑整环 A/p，则 $\forall\bar{x}=x+p\in A/p$，存在 n 使得 $\bar{x}^n=\bar{x}$，即 $\bar{x}(\bar{x}^{n-1}-1)=0$，由于 A/p 是整环，那么 $\bar{x}=0$ 或 $\bar{x}^{n-1}=1$（表明 $\bar{x}$ 可逆），所以 A/p 是一个域，所以 p 是极大理想。

1.10 设 A 是环，$\mathfrak{N}$ 是它的小根，证明下列诸断言等价：i) A 恰好只有一个素理想；ii) A 中任一元素或者是可逆元, 或者是幂零元；iii) $A/\mathfrak{N}$ 是域。

1.10.1

i) $\Rightarrow$ iii)

因为 A 只有一个素理想，而根据小根的定义，则唯一的素理想就是小根 $\mathfrak{N}$，而任意环都至少有一个极大理想，极大理想也是素的，所以 $\mathfrak{N}$ 是极大的，所以 $A/\mathfrak{N}$ 是域。

1.10.2

iii) $\Rightarrow$ ii)

因为 $A/\mathfrak{N}$ 是域，所以任意 $a+\mathfrak{N}\in A/\mathfrak{N},a\in A$，有 $a+\mathfrak{N}=0$ 或 $a+\mathfrak{N}$ 可逆，这表明 $a\in\mathfrak{N}$ 或 a 在 A 中可逆，而小根 $\mathfrak{N}$ 定义为全体幂零元的集合，所以 a 或者幂零，或者可逆。

1.10.3

ii) $\Rightarrow$ i)

设有素理想 $p\supsetneq\mathfrak{N}$，那么有非幂零（因为幂零元都属于 $\mathfrak{N}$）、不可逆的元素 $x\in p$，这跟 A 中的任意元素或者幂零，或者可逆矛盾。

1.14 用 Σ 表环 A 中完全由零因子组成的理想的全体所组成的集合，证明：

按 $\subseteq$ 在 Σ 中引入次序，使用 Zorn 引理证明。

1.14.1 Σ 有一个极大元；

因为 $(0)\in\Sigma$，因此 Σ 非空

设 $C=\{I_i\}$ 是 Σ 中的任意一条链，则考虑 $\bar{I}=\bigcup_i I_i$，显然 $\bar{I}$ 全部由零因子组成，并且 $\forall x,y\in\bar{I}$，存在 $I_k\in C$ 使得 $x,y\in I_k$，则 $x+y\in I_k\subseteq\bar{I}$，而 $\forall x\in\bar{I},\forall y\in A$，存在 $I_k\in C$ 使得 $x\in I_k$，那么 $xy\in I_k\subseteq\bar{I}$，由定义知 $\bar{I}$ 是 A 的一个理想。

也就是说 Σ 非空且任意链有上界，所以 Σ 有极大元。

1.14.2 Σ 的每个极大元都是素理想；

设 $\bar{I}$ 是 Σ 中的一个极大元，设 $x,y\notin\bar{I}$，那么考虑 A 的理想 $(\bar{I},x)\supsetneq\bar{I}$ 和 $(\bar{I},y)\supsetneq\bar{I}$，因为 $\bar{I}$ 是极大的，而且纯粹由零因子组成，那么 $(\bar{I},x)$ 和 $(\bar{I},y)$ 都至少存在一个非零因子（不是零因子的元素），而 $(\bar{I},x)(\bar{I},y)\subseteq(\bar{I},xy)$，那么这两个非零因子的乘积就是 $(\bar{I},xy)$ 中的非零因子，那么 $(\bar{I},xy)\supsetneq\bar{I}$，所以 $xy\notin\bar{I}$。所以 $\bar{I}$ 是素理想。

1.14.3 A 中零因子的集合是素理想的并。

设 B 是 Σ 中全体极大元的并，它的所有元素都是 A 的零因子。对于 A 的任意零因子 b，则理想 $(b)\in\Sigma$，则 $(b)\subseteq B$，所以 $b\in B$。所以 B 是 A 的全体零因子的集合。由前一问知，B 也是一组素理想的并。

2 模

2.2 设 A 是一个环，a 是 A 的理想，M 是一个 A-模，证明模 $A/a \otimes_A M$ 与 M/aM 同构。

首先，由命题 2.14 iv 及其证明[1]可以得到

$$A \otimes_A M \cong M$$

$$a \otimes_A M \cong aM$$

接着，考虑正合序列：

$$a \xrightarrow{\text{incl}} A \xrightarrow{f} A/a \to 0$$

根据命题 2.18，我们有正合序列

$$a \otimes_A M \xrightarrow{\text{incl}\otimes_A 1} A \otimes_A M \xrightarrow{f\otimes_A 1} (A/a) \otimes_A M \to 0$$

显然，$f \otimes_A 1$ 是满射，因此

$$\frac{A \otimes_A M}{\text{Ker}(f \otimes_A 1)} \cong (A/a) \otimes_A M$$

而 $\text{Ker}(f \otimes_A 1) = \text{Im}(\text{incl} \otimes_A 1) = a \otimes_A M$，因此根据正合序列的定义以及开头给出的同构，我们有

$$(A/a) \otimes_A M \cong \frac{A \otimes_A M}{a \otimes_A M} \cong \frac{M}{aM}$$

2.3 A 是个局部环，M 和 N 是有限生成的 A-模，证明，如果 $M \otimes N = 0$，那么 $M = 0$ 或者 $N = 0$。

设 m 是 A 的极大理想，记 $k = A/m$，由第二章课后习题 2 可知

$$M_k = k \otimes_A M \cong M/mM, \quad N_k = k \otimes_A N \cong N/mN$$

其中 k 既是 A-模，也是 k-模。于是

$$\begin{aligned}
&M_k \otimes_k N_k \\
\xlongequal{\text{命题 2.14 i}}&(M \otimes_A k) \otimes_k (k \otimes_A N) \\
\xlongequal{\text{习题 2.15}}&M \otimes_A \Big(k \otimes_k (k \otimes_A N)\Big) \\
\xlongequal{\text{习题 2.15}}&M \otimes_A \Big((k \otimes_k k) \otimes_A N\Big) \\
\xlongequal{\text{习题 2.14 ii}}&M \otimes_A N \otimes_A (k \otimes_k k)
\end{aligned}$$

所以如果 $M \otimes_A N = 0$，那么 $M_k \otimes_k N_k = 0$。因为 M, N 是有限生成的 A-模，所以 M_k, N_k 都是 k 上的有限维的向量空间，所以

$$0 = \dim(M_k \otimes_k N_k) = \dim(M_k) \times \dim(N_k)$$

即 $\dim(M_k) = 0$ 或 $\dim(N_k) = 0$，即 $M_k = 0$ 或 $N_k = 0$，即 $M/mM = 0$ 或 $N/mN = 0$，即 $M = mM$ 或 $N = mN$。因为 A 是局部环，所以 m 就是 A 的大根，由 Nakayama 引理知，$M = 0$ 或 $N = 0$。

[1] $A \otimes_A M \cong M$ 的证明：考虑双线性映射 $f(x, y) = xy$, $x \in A, y \in M$，根据张量积的定义，存在 $A \otimes_A M$ 到 M 的映射 g，使得 $g(x \otimes_A y) = xy$。另外定义 $h(x) = 1_A \otimes_A x$, $x \in M$，则 $hg = 1_{A\otimes_A M}, gh = 1_M$，所以 $A \otimes_A M \cong M$。$a \otimes_a M \cong aM$ 证明基本一样，只不过把 M 换成了 aM。

2.6 对任意 A-模 M，用 $M[x]$ 表 x 的系数属于 M 的多项式，即形状如 $m_0+m_1x+\cdots+m_rx^r \quad (m_i\in M)$ 的表达式的全体所成的集合。用显然的方式来定义 $A[x]$ 的元素与 $M[x]$ 的元素的乘积，证明：

2.6.1 $M[x]$ 成为一个 $A[x]$-模；

设

$$f=a_0+a_1x+\cdots+a_sx^s\in A[x],\quad g=m_0+m_1x+\cdots+m_rx^r\in M[x]$$

定义运算 $A[x]\times M[x]\to M[x]:(f,g)\to fg$，其中

$$fg=a_0m_0+(a_1m_0+a_0m_1)x+\cdots+a_sm_rx^{r+s}\quad \text{(普通多项式乘法那样定义)}$$

则 $M[x]$ 成为一个 $A[x]$-模。

2.6.2 $M[x]\cong A[x]\otimes_A M$。

$M[x]\cong A[x]\otimes_A M$ 的证明：

令 $f=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k\in A[x],g\in M$，考虑双线性映射 $\Phi(f,g)=fg$, $f\in A[x],g\in M$，根据张量积的定义，存在 $A[x]\otimes_A M$ 到 $M[x]$ 的映射 Ψ，使得 $\Psi(f\otimes_A g)=fg$。另外设 $h=\sum\limits_{k=0}^{N}m_kx^k\in M[x]$，定义 $M[x]$ 到 $A[x]\otimes_A M$ 的映射：$\Lambda(h)=\sum\limits_{k=0}^{N}x^k\otimes_A m_k$，则 $\Lambda\Psi=1_{A[x]\otimes_A M},\Phi\Lambda=1_{M[x]}$，所以 $M[x]\cong A[x]\otimes_A M$。

2.7 设 p 是 A 中的素理想。证明 $p[x]$ 是 $A[x]$ 中的素理想，如果 m 是 A 中的极大理想，$m[x]$ 是不是 $A[x]$ 中的极大理想？

根据同构：

$$A[x]/p[x]\cong (A/p)[x]$$

如果 p 是 A 的素理想，则 A/p 是整环，所以 $(A/p)[x]$ 也是整环[2]，所以 $p[x]$ 是素理想。

当然，如果 p 是 A 的极大理想，则 A/p 是域，但 $(A/p)[x]$ 未必也是域，所以 $p[x]$ 不一定是极大理想。比如，考虑环 $\mathbb{Z}$ 以及它的极大理想 $p=(3)$，显然 $p[x]$ 不是极大的，因为 $(p,x)\supsetneq p[x]$。

2.8 8

2.8.1 如果 M 和 N 都是平坦 A-模，那么 $M\otimes_A N$ 也是平坦的；

根据命题 2.19 i, ii，因为 M 都是平坦 A-模，那么对于任意的 A-模的正合序列：$0\to E\to F\to G\to 0$，序列

$$0\to E\otimes_A M\to F\otimes_A M\to G\otimes_A M\to 0$$

是正合的。因为 N 也是平坦 A-模，所以下述序列

$$0\to F\otimes_A M\otimes_A N\to F\otimes_A M\otimes_A N\to G\otimes_A M\otimes_A N\to 0$$

[2]如果 $(A/p)[x]$ 不是整环，则 $(A/p)[x]$ 有零因子，设其中一个零因子为 $f\neq 0$，根据第一章课后习题 2.iii，存在 $0\neq a\in A/p$ 使得 $af=0$，这表明 A/p 有零因子，跟 A/p 是整环矛盾。

也是正合的，根据命题 2.14 ii，上式可以改写为

$$0 \to E \otimes_A (M \otimes_A N) \to F \otimes_A (M \otimes_A N) \to G \otimes_A (M \otimes_A N) \to 0$$

根据正合序列 $0 \to E \to F \to G \to 0$ 的任意性和命题 2.19 i, ii，得到 $(M \otimes_A N)$ 是平坦 A-模。

2.8.2 如果 B 是平坦 A-代数，而 N 是平坦 B-模，那么 N 也是平坦 A-模。

根据命题 2.19 i, ii，因为 B 是平坦 A-代数，那么对于任意的 A-模的正合序列：$0 \to E \to F \to G \to 0$，序列

$$0 \to E \otimes_A B \to F \otimes_A B \to G \otimes_A B \to 0$$

是正合的。将 $E \otimes_A B, F \otimes_A B, G \otimes_A B$ 看成 B-模，则上述序列也可以看成是 B-模正合序列。因为 N 是平坦 B-模，所以序列

$$0 \to (E \otimes_A B) \otimes_B N \to (F \otimes_A B) \otimes_B N \to (G \otimes_A B) \otimes_B N \to 0$$

也是正合的。其中 B 同时是 A, B-模，根据式 2.15，我们得到：

$$0 \to E \otimes_A (B \otimes_B N) \to F \otimes_A (B \otimes_B N) \to G \otimes_A (B \otimes_B N) \to 0$$

根据 2.14 iv，$B \otimes_B N \cong N$，那么

$$0 \to E \otimes_A N \to F \otimes_A N \to G \otimes_A N \to 0$$

根据正合序列 $0 \to E \to F \to G \to 0$ 的任意性和命题 2.19.i, ii，得到 N 是平坦 A-模。

2.9 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是 A-模的正合序列。如果 M' 和 M'' 都是有限生成的，那么 M 也是有限生成的。

因为序列

$$0 \xrightarrow{e} M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{h} 0$$

是正合的，所以有 $M'' = \mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Im}(g)$、$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$ 以及 $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(e) = \{0\}$，那么

$$M'' = \mathrm{Im}(g) \cong M/\mathrm{Ker}(g) = M/\mathrm{Im}(f)$$

是有限生成的。因为 $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$，即 f 是单同态，所以 $M' = \mathrm{Im}(f)$ 可以看成 M 的子模并且 M/M' 是有限生成的。

设 $m_1, m_2, \ldots, m_s$ 生成 M'，$m_{s+1} + M', m_{s+2} + M', \ldots, m_t + M'$ 生成 M/M'。$\forall m \in M$，存在 $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_t \in A$，使得

$$\begin{aligned} m + M' =& a_{s+1}(m_{s+1} + M') + a_{s+2}(m_{s+2} + M') + \cdots + a_t(m_t + M') \\ =& (a_{s+1}m_{s+1} + a_{s+2}m_{s+2} + \cdots + a_t m_t) + M' \end{aligned}$$

所以 $m - (a_{s+1}m_{s+1} + a_{s+2}m_{s+2} + \cdots + a_t m_t) \in M'$，所以存在 $a_1, a_2, \ldots, a_s \in A$，使得

$$m - (a_{s+1}m_{s+1} + a_{s+2}m_{s+2} + \cdots + a_t m_t) = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_s m_s$$

这表明 M 可由 $m_1, m_2, \ldots, m_t$ 有限生成。

2.11 设 A 是非 0 环。证明：

2.11.1 $A^m \cong A^n \Rightarrow m = n$；

设 m 是 A 中的极大理想，记 $k = A/m$，并将 k 视为 A 模。因为 $A^m \cong A^n$，所以 $k\otimes_A A^m \cong k\otimes_A A^n$，其中 $k \otimes_A A^m$ 可以视为 k 模，并且因为 k 是域，所以 $k \otimes_A A^m$ 是 k 上的向量空间，而且

$$
\begin{aligned}
k \otimes_A A^m &\xlongequal{\text{命题 2.3 上方定义}} k \otimes_A \left(\bigoplus_{i=1}^{m} A\right) \\
&\xlongequal{\text{命题 2.14 iii}} \bigoplus_{i=1}^{m} \left(k \otimes_A A\right) \\
&\xlongequal{\text{命题 2.3 上方定义}} \left(k \otimes_A A\right)^m \\
&\xlongequal{\text{命题 2.14 iv}} k^m
\end{aligned}
$$

所以 $k \otimes_A A^m$ 是 k 上的 m 维向量空间，同理 $k \otimes_A A^n$ 是 k 上的 n 维向量空间，因为它们同构，所以必须 $m = n$。

2.11.2 如果 $\varphi : A^m \to A^n$ 是满同态，那么 $m \geq n$；

如果 $\varphi : A^m \to A^n$ 是满射，那么 $A^n \cong A^m/\mathrm{Ker}(\varphi)$，如果 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 生成 A^m，则显然 $x_1 + \mathrm{Ker}(\varphi), x_2 + \mathrm{Ker}(\varphi), \ldots, x_m + \mathrm{Ker}(\varphi)$ 生成 $A^m/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong A^n$，所以 $n \leq m$。

2.11.3 如果 $\varphi : A^m \to A^n$ 是单同态，那么 $m \leq n$ 是否总是成立？

结论是正确的，即 $\varphi : A^m \to A^n$ 是单射，则必然有 $n \geq m$。

若否，则设 $m > n > 0$，这样我们可以将 A^n 看成是 A^m 的子模，φ 可以看成是 A^m 到自身的同态。设 $\{e_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ 是 A^n 的一组典范基，并将它拓展为 A^m 的典范基 $\{e_i | i = 1, 2, \ldots, m\}$。那么根据命题 2.4，存在多项式

$$\varphi^k + a_1\varphi^{k-1} + \cdots + a_l\varphi^{k-l} = 0, a_l \neq 0$$

即

$$\varphi^{k-l}(\varphi^l + a_1\varphi^{l-1} + \cdots + a_l) = 0$$

注意到 φ 是单射，所以 φ^{k-l} 也是单射，因此

$$f(\varphi) = \varphi^l + a_1\varphi^{l-1} + \cdots + a_l = 0$$

那么 $\Big(f(\varphi) - a_l\Big)e_m + a_l e_m = 0$，而根据定义，$\varphi$ 是 $A^m \to A^n$ 的映射，φ^i 也是，所以 $\Big(f(\varphi) - a_l\Big)e_m \in A^n$，而 $a_l e_m \in A^m \backslash A^n$，它们之和显然不为 0，矛盾。

2.12 设 M 是有限生成的 A-模而 $\varphi : M \to A^n$ 是个满同态，证明 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是有限生成的。

设 $e_1, e_2, \ldots, e_n$ 是 A^n 的一组基，因为 φ 是满的，所以存在 $u_1, u_2, \ldots, u_n \in M$ 使得 $\varphi(u_i) = e_i$。下证 $M = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus (u_1, u_2, \ldots, u_n)$。

$\forall x \in M$，则有 $a_i \in A, i = 1, 2, \ldots, n$ 使得

$$\varphi(x) = \sum_i a_i e_i = \sum_i a_i \varphi(u_i) = \varphi\left(\sum_i a_i u_i\right)$$

这表明存在 $k \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ 使得

$$x = k + \sum_i a_i u_i$$

这表明 $M = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus (u_1, u_2, \ldots, u_n)$。

不妨设 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 生成 M,那么显然至多 n 个 $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ 中的元素就可以生成 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$，而剩下的就生成 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 了，所以 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是有限生成的。

3 分式环和分式模

3.1 设 S 是环 A 的乘法封闭子集，M 是有限生成 A-模。证明：$S^{-1}M=0$ 当且仅当存在 $s\in S$ 使得 $sM=0$。

如果存在 $s\in S$ 使得 $sM=0$，那么显然 $S^{-1}M=0$，因为 $\forall m/t\in S^{-1}M$，都有 $m/t=sm/st=0/st=0$；

反过来，如果 $S^{-1}M=0$，并设 $m_1,m_2,\ldots,m_n$ 生成 M，则存在 $s_1,s_2,\ldots,s_n\in S$ 使得 $s_1m_1=s_2m_2=\cdots=s_nm_n=0$，令 $s=s_1s_2\ldots s_n$，则显然 $\forall a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_nm_n\in M$，都有 $s(a_1m_1+a_2m_2+\cdots+a_nm_n)=0$，即 $sM=0$。

3.2 设 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的理想，$S=1+\mathfrak{a}$。

3.2.1 证明 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 含于 $S^{-1}A$ 的大根中；

$\forall\frac{a}{1+c}\in S^{-1}\mathfrak{a},\frac{b}{1+d}\in S^{-1}A$，这里 $a,c,d\in\mathfrak{a},b\in A$，我们有

$$1+\frac{a}{1+c}\frac{b}{1+d}=\frac{1+c+d+cd+ab}{1+c+d+cd}$$

显然 $1+c+d+cd+ab\in 1+\mathfrak{a}$，因此 $\frac{1+c+d+cd+ab}{1+c+d+cd}$ 在 $S^{-1}A$ 中可逆，因此由命题 1.9，$\frac{a}{1+c}\in S^{-1}A$的大根。所以 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 含于 $S^{-1}A$ 的大根中。

3.2.2 利用这个结果和 Nakayama 引理给出 (2.5) 的一个不依赖于行列式的证明。

注意，按照这个逻辑，Nakayama 引理的证明要选择书本上给出的第二个证明，即不依赖于 (2.5) 的证明。

设 M 是有限生成的，并且 $M=\mathfrak{a}M$，那么 $S^{-1}M=S^{-1}(\mathfrak{a}M)=(S^{-1}\mathfrak{a})(S^{-1}M)$，根据本题 $S^{-1}\mathfrak{a}$ 包含在 $S^{-1}A$ 的大根中，所以可以用 Nakayama 引理得到 $S^{-1}M=0$，由第三章课后习题 1 可得存在 $s\in S=1+\mathfrak{a}$ 使得 $sM=0$。

3.4 设 $f:A\to B$ 是环同态，S 是 A 的一个乘法封闭子集。设 $T=f(S)$，求证，$S^{-1}B$ 与 $T^{-1}B$ 作为 $S^{-1}A$-模同构。

定义

$$\begin{aligned}\phi:S^{-1}B&\to T^{-1}B\\ \frac{b}{s}&\to\frac{b}{f(s)},\quad b\in B,s\in S\end{aligned}$$

$\forall t\in S$，我们有

$$\phi\left(\frac{tb}{tb}\right)=\frac{tb}{f(ts)}=\frac{tb}{tf(s)}=\frac{b}{f(s)}=\phi\left(\frac{b}{s}\right)$$

因此 ϕ 是良好定义的。且[3]

$$\begin{aligned}\phi\left(\frac{b_1}{s_1}+\frac{b_2}{s_2}\right)=&\phi\left(\frac{s_2b_1+s_1b_2}{s_1s_2}\right)=\frac{s_2b_1+s_1b_2}{f(s_1s_2)}\\=&\frac{f(s_2)b_1+f(s_1)b_2}{s_1f(s_2)}=\frac{f(s_2)b_1+f(s_1)b_2}{f(s_1)f(s_2)}\\=&\frac{b_1}{f(s_1)}+\frac{b_2}{f(s_2)}=\phi\left(\frac{b_1}{s_1}\right)+\phi\left(\frac{b_2}{s_2}\right)\end{aligned}$$

以及

$$\phi\left(\frac{a_2}{s_2}\frac{b_1}{s_1}\right)=\frac{a_2b_1}{f(s_2s_1)}=\frac{a_2b_1}{s_2f(s_1)}=\frac{a_2}{s_2}\phi\left(\frac{b_1}{s_1}\right)$$

所以它是 $S^{-1}B\to T^{-1}B$ 的 $S^{-1}A$ 模同态。

显然 ϕ 是满的。下证 ϕ 是单的。

如果 $\phi\left(\frac{b}{s}\right)=\frac{b}{f(s)}=0$，则存在 $f(t)\in T$，使得

$$0=f(t)b=tb$$

则

$$\frac{b}{s}=\frac{tb}{ts}=0$$

所以 $\mathrm{Ker}(\phi)=\{0\}$，即 ϕ 是单射。所以 ϕ 是 $S^{-1}B\to T^{-1}B$ 的模同构。

3.5 设 A 是环，又设对每个素理想 p，局部环 A_p 没有非零幂零元。

3.5.1 证明 A 也没有非零幂零元；

设 $\mathfrak{N}$ 为环 A 的小根，则根据 3.12，$\mathfrak{N}_p$ 为局部环 A_p 的小根。因为对于每个素理想 p，A_p 没有非零幂零元，所以 $\mathfrak{N}_p=0$。根据命题 3.8 i, ii，$\mathfrak{N}=0$，这意味着 A 也没有非零幂零元。

3.5.2 如果每个 A_p 是整环，问 A 是否一定是整环？

不一定。考虑

$$\begin{aligned}A=&\mathbb{Z}_6=\{0,1,2,3,4,5\}\\p_1=&\{0,2,4\},\ S_1=A\backslash p_1=\{1,3,5\}\\p_2=&\{0,3\},\ S_2=A\backslash p_2=\{1,2,4,5\}\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}A_{p_1}=&S_1^{-1}p_1=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right\}\cong\mathbb{Z}_2\\A_{p_2}=&S_2^{-1}p_2=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{2}\right\}\cong\mathbb{Z}_3\end{aligned}$$

都是整环，但 $A=\mathbb{Z}_6$ 不是整环。

[3]主要记住：$sb=f(s)b$ 是 sb 的定义。

3.6 设 A 是非零环，Σ 是 A 的一切不含 0 的乘法封闭子集 S 的集合，证明：

3.6.1 Σ 有极大元；

按 $\subseteq$ 在 Σ 中引入次序，使用 Zorn 引理证明。

因为 $\{1\} \in \Sigma$，因此 Σ 非空。

设 $C = \{S_i\}$ 是 Σ 中的任意一条链，则考虑 $\bar{S} = \bigcup_i S_i$，显然 $\bar{S}$ 不含 0，而且 $\forall x, y \in S$，存在 $S_k \in C$ 使得 $x, y \in S_k$，所以 $xy \in S_k \subseteq S$，所以 S 是乘法封闭集。也就是说 Σ 非空且任意链有上界，所以 Σ 有极大元。

3.6.2 $S \in \Sigma$ 是极大的当且仅当 $A \backslash S$ 是 A 的极小素理想。

$\Rightarrow$：设 S 是 Σ 的一个极大元，下证 $A \backslash S$ 是一个理想。

因为 S 是极大的，所以 $a \notin S$ 当且仅当存在 $s \in S$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $sa^n = 0$[4]。利用这个性质，如果 $a, b \in A \backslash S$，那么存在 m, n, s_1, s_2 使得 $s_1 a^m = s_2 b^n = 0$，推出 $s_1 s_2 (a+b)^{m+n} = 0$，所以 $a + b \in A \backslash S$；此外，对于任意的 $c \in A$，具有 $s_1 (ca)^m = 0$，所以 $ca \in A \backslash S$。所以 $A \backslash S$ 是一个理想。由引理 3.2 后面的例 1 的括号注记，S 是乘法封闭的，当且仅当 $A \backslash S$ 是素理想。如果 $A \backslash S$ 不是极小的，那么存在一个素理想 $p \subsetneq A \backslash S$，那么 $A \backslash p$ 是比 S 更大的不含 0 的乘法封闭子集，与 S 极大矛盾。所以 $A \backslash S$ 是一个极小素理想。

$\Leftarrow$：如果 $p = A \backslash S$ 是极小素理想，则显然 $S = A \backslash p$ 在 Σ 中，如果 S 不是极大元，那么设 $S' \in \Sigma, S' \supsetneq S$ 为 Σ 中包含 S 的极大元，根据前一步证明，$A \backslash S'$ 是一个极小素理想，而且真含于 p，这与 p 极小矛盾。所以 S 是极大元。

3.14 M 是 A-模，a 是 A 的理想。设对一切极大理想 $m \supseteq a$，有 $M_m = 0$，证明 $M = aM$。

因为 $(A/a)/(m/a) \cong A/m$，所以 m极大 $\Leftrightarrow$ m/a极大。记 $S = A \backslash m$，而根据题目 $M_m = 0$，我们可以推得

$$
\begin{aligned}
0 =& M_m \\
=& S^{-1} M \\
=& S^{-1} M / S^{-1}(aM) \\
\overset{3.4\ \text{iii}}{=\!=\!=}& S^{-1}(M/aM) \\
\overset{\text{第三章课后习题 } 3.4}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}& (S/a)^{-1}(M/aM) \\
=& (M/aM)_{m/a}
\end{aligned}
$$

将 M/aM 看成 A/a 模，那么上式就意味着对于 A/a 模中的所有极大理想 m/a，都有 $(M/aM)_{m/a} = 0$，根据命题 3.8 iii, i，就有 $M/aM = 0$，于是 $M = aM$。

---

[4]因为 S 乘法封闭而且不含 0，所以 $\Leftarrow$ 是显然的；$\Rightarrow$：如果 $\forall s \in S, n \in \mathbb{N}$, $sa^n \neq 0$ 的话，$\{sa^n | s \in S, n \in \mathbb{N}\} \supsetneq S$ 是一个更大的不含 0 的乘法封闭子集，跟 S 极大矛盾。

3.15 设 A 是环，F 是 A-模 A^n。

3.15.1 证明 F 的每个由 n 个元素构成的生成元集合是 F 的基；

令 $x_1,\dots,x_n$ 是 F 的一个生成元集，$e_1,\dots,e_n$ 是它的典范基。定义

$$\phi : F \to F$$
$$a_1e_1+\cdots+a_ne_n \to a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

则 ϕ 是 F 到自身的满同态。下证 ϕ 是单的。而根据命题 3.9，只需要证明对于每个素理想 p，ϕ_p 是单的，这时候 A 变成了局部环 A_p，而 F 变成了 A_p-模 F_p，ϕ_p 依然是满射。所以不失一般性，只需要对 A 是局部环的情形证明（如果不是局部环，那么就对每个素理想 p 考察 A_p 的情形。）。

设 m 是 A 的极大理想，域 $k=A/m$，而 $N=\mathrm{Ker}(\phi)$。考虑正合序列

$$N \xrightarrow{\text{incl}} F \xrightarrow{\phi} F \to 0$$

可以得到正合序列

$$N\otimes_A k \xrightarrow{\text{incl}\otimes_A 1} F\otimes_A k \xrightarrow{\phi\otimes_A 1} F\otimes_A k \to 0$$

显然 $\phi\otimes_A 1$ 是满的，而

$$\begin{aligned} k\otimes_A F &\overset{\text{命题 2.3 上方定义}}{=\!=\!=} k\otimes_A\left(\bigoplus_{i=1}^n A\right)\\ &\overset{\text{命题 2.14 iii}}{=\!=\!=} \bigoplus_{i=1}^n\left(k\otimes_A A\right)\\ &\overset{\text{命题 2.3 上方定义}}{=\!=\!=} \left(k\otimes_A A\right)^n\\ &\overset{\text{命题 2.14 iv}}{=\!=\!=} k^n \end{aligned}$$

所以 $k\otimes_A F$ 是域 k 上的有限维向量空间，$\phi\otimes_A 1$ 是满射则必然是双射，那么 $\mathrm{Ker}(\phi\otimes_A 1)=0$，也就是

$$N\otimes_A k=\mathrm{Im}(\text{incl}\otimes_A 1)=\mathrm{Ker}(\phi\otimes_A 1)=0$$

根据第二章课后习题 2.12，$N=\mathrm{Ker}(\phi)$ 是有限生成的，并且 $k=A/m$ 作为 A 模也是有限生成的（生成元就是 $1+m$），所以由第二章课后习题 2.3 知 $N=0$ 或 $k=0$，但显然 $k\neq 0$，所以 $N=0$，即 ϕ 是单的。因此 ϕ 是同构，即 $x_1,\dots,x_n$ 也是一组基。

3.15.2 推出 F 的每个生成元素集至少有 n 个元素。

设 $x_1,\dots,x_m$ 是 F 的生成元，且 $m<n$，那么添加 $n-m$ 个 F 中的非零元 $x_{m+1},\dots,x_n$ 后，$x_1,\dots,x_n$ 还是 F 的生成元集，根据前面所证的，$x_1,\dots,x_n$ 是 F 的一组基。但因为 $x_1,\dots,x_m$ 是 F 的生成元，x_n 可以写成 $x_1,\dots,x_m$ 的线性组合，这违反了基的线性无关性，矛盾。所以 $m\geq n$。

4 准素分解

4.4 在多项式环 $\mathbb{Z}[t]$ 之中，理想 $m=(2,t)$ 是极大的，理想 $q=(4,t)$ 是 m-准素的，但它不是 m 的幂。

4.4.1

我们有

$$m=(2,t)=\{f\big|f\in\mathbb{Z}[t],f\text{的常数项为偶数}\}$$

如果存在理想 m'

$$m\subsetneq m'$$

则存在奇数 $n\in\mathbb{Z}$ 和多项式 $f(t)\in\mathbb{Z}[t]$，使得 $tf(t)+n\in m'$，显然 $tf(t)+n-1\in m\subsetneq m'$，因此 $1\in m'$，故 $m'=(1)$，因此 m 为极大理想。

4.4.2

类似地我们有

$$q=(4,t)=\{f\big|f\in\mathbb{Z}[t],f\text{的常数项为 4 的倍数}\}$$

则任意 $x=a+tf(t),y=b+tg(t)\in q$，如果 $xy\in q$，那么 $4|ab$，如果 $x\notin q$，则 $4\nmid a$，那么 $2|b$ 或者 $4|b$，即 $y^2\in q$ 或者 $y\in q$。由定义知 q 是准素的。由于 $2^2\in q$，故 $2\in\sqrt{q}$，故 $m=(2,4,t)\subseteq\sqrt{q}$，由 m 的极大性知 $m=\sqrt{q}$，因此 q 是 m 准素的。

4.4.3

最后

$$m^2=(4,2t,t^2)\subsetneq(4,t)\subsetneq(2,t)=m$$

因此 q 不是 m 的幂。

4.7 设 A 是环，$A[x]$ 表示 A 上一个未定元的多项式环。对 A 的每个理想 a，设 $a[x]$ 表示 $A[x]$ 中系数在 a 中的一切多项式的集合。

4.7.1 $a[x]$ 是 a 到 $A[x]$ 中的扩张；

$$a^e=(A[x])a=(Aa)[x]=a[x]$$

4.7.2 如果 p 是 A 的素理想，那么 $p[x]$ 是 $A[x]$ 的素理想；

（第二章课后习题 7）设 A 是一个环，p 是 A 的一个理想，则有

$$A[x]/p[x]\cong(A/p)[x]$$

因为 p 是素的，所以 A/p 是一个整环，所以 $(A/p)[x]$ 是一个整环，因此 $A[x]/p[x]$ 也是一个整环，最后 $p[x]$ 是素的。

4.7.3 如果 q 是 A 的 p-准素理想，那么 $q[x]$ 是 $A[x]$ 中的 $p[x]$-准素理想；

同理

$$A[x]/q[x] \cong (A/q)[x]$$

因为 q 是准素的，因此 A/q 的零因子都幂零，设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in (A/q)[x]$ 是任意一个零因子，那么根据第一章课后习题 2.3 知，存在 A/q 的非零元 β，使得 $\beta f(x) = 0$，即 $\beta a_i = 0, i = 0, 1, \ldots, n$，因此 $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ 都是 A/q 的零因子，因此都是幂零元。由第一章课后习题 2.2 知 $f(x)$ 幂零。因此 $A[x]/q[x] \cong (A/q)[x]$ 的任意零因子都是幂零的，由等价定义知 $q[x]$ 是准素的。

接着证明 $\sqrt{q[x]} = \sqrt{q}[x]$，显然有

$$\sqrt{q[x]} \supseteq \sqrt{q}[x] \supseteq q[x]$$

因为 $\sqrt{q}[x]$ 是素的，而 $\sqrt{q[x]}$ 是包含 $q[x]$ 的最小素理想，因此 $\sqrt{q}[x] = \sqrt{q[x]}$。

4.7.4 如果 $a = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ 是 A 中的一个极小准素分解，那么 $a[x] = \bigcap_{i=1}^{n} q_i[x]$ 是 $A[x]$ 中的一个极小准素分解；

由前一问知 $q_i[x]$ 都是准素的，因此只需要先证 $a[x] = \bigcap_{i=1}^{n} q_i[x]$，再证 $\bigcap_{i=1}^{n} q_i[x]$ 是极小的。

7.iv.1) 易得

$$\begin{aligned}
&\sum_j b_j x^j \in a[x] \\
\Longleftrightarrow &\forall j, b_j \in a = \bigcap_{i=1}^{n} q_i \\
\Longleftrightarrow &\forall i, j, b_j \in q_i \\
\Longleftrightarrow &\forall i, \sum_j b_j x^j \in q_i[x] \\
\Longleftrightarrow &\sum_j b_j x^j \in \bigcap_{i=1}^{n} q_i[x]
\end{aligned}$$

因此

$$a[x] = \bigcap_{i=1}^{n} q_i[x]$$

7.iv.2) 因为 $a = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ 是极小的，因此对于任意 i，有

$$q_i \not\supseteq \bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} q_j$$

所以

$$q_i[x] \not\supseteq \left(\bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} q_j \right)[x] = \bigcap_{j=1, j\neq i}^{n} q_j[x]$$

而且因为 $a = \bigcap_{i=1}^{n} q_i$ 是极小的，因此对于任意 $i \neq j$，有

$$\sqrt{q_i} \neq \sqrt{q_j}$$

这表明（结合前一问）

$$\sqrt{q_i[x]} = \sqrt{q_i}[x] \neq \sqrt{q_j}[x] = \sqrt{q_j[x]}$$

因此 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} q_i[x]$ 是极小的。

4.7.5 如果 p 是 a 的一个极小素理想，那么 $p[x]$ 是 $a[x]$ 的一个极小素理想。

由 2) 知 $p[x]$ 是素的，假设有 $a[x]$ 的一个素理想 q 使得

$$q \subsetneq p[x]$$

则考虑

$$q^c \subseteq p[x]^c = p$$

因为 q 是素的，所以 q^c 是素的（第一章《扩张与局限》第二段），而且 p 是极小的，因此

$$q^c = p$$

这样我们有

$$p[x] = (q^c)[x] \subseteq q \subsetneq p[x]$$

矛盾，因此 $p[x]$ 是极小的。

4.12 设 A 是环，S 是 A 的乘法封闭子集。对任一理想 a，用 $S(a)$ 表示 $S^{-1}a$ 在 A 中的限制，理想 $S(a)$ 称作 a 关于 S 的饱和化。证明：

4.12.1 $S(a) \cap S(b) = S(a \cap b)$；

$$\begin{aligned} S(a) \cap S(b) &\xlongequal{\text{定义}} (S^{-1}a)^c \cap (S^{-1}b)^c \\ &\xlongequal{1.18} (S^{-1}a \cap S^{-1}b)^c \\ &\xlongequal{3.4} \left(S^{-1}(a \cap b)\right)^c \\ &\xlongequal{\text{定义}} S(a \cap b) \end{aligned}$$

4.12.2 $S(\sqrt{a}) = \sqrt{S(a)}$；

$$\begin{aligned} S(\sqrt{a}) &\xlongequal{\text{定义}} (S^{-1}\sqrt{a})^c \\ &\xlongequal{3.11.\text{v}} (\sqrt{S^{-1}a})^c \\ &\xlongequal{1.18} \sqrt{(S^{-1}a)^c} \\ &\xlongequal{\text{定义}} \sqrt{S(a)} \end{aligned}$$

4.12.3 $S(a)=(1)\Leftrightarrow a$**与**$S$**有交；**

$$\begin{aligned}&S(a)=(1)\\\Longleftrightarrow&1\in S(a)=(S^{-1}a)^c\\\Longleftrightarrow&\frac{1}{1}=\frac{s}{s}\in S^{-1}a,\text{分子的}s\text{属于}a,\text{分母的}s\text{属于}S\\\Longleftrightarrow&\text{存在}s\in a\cap S\text{，即}a\cap S\text{非空}\end{aligned}$$

4.12.4 $S_1(S_2(a))=(S_1S_2)(a)$**；**

如果 $x\in S(a)$，当且仅当 $x\in(S^{-1}a)^c$，当且仅当 $\frac{x}{1}\in S^{-1}a$，当且仅当存在 $s\in S$ 使得 $\frac{sx}{s}\in S^{-1}a$，即 $sx\in a$。

4.1) 如果 $x\in(S_1S_2)(a)$，那么存在 $s_1\in S_1,s_2\in S_2$，使得 $s_1s_2x\in a$，也就是 $s_1x\in S_2(a)$，也就是 $x\in S_1\big(S_2(a)\big)$，所以 $(S_1S_2)(a)\subseteq S_1\big(S_2(a)\big)$；

4.2) 如果 $x\in S_1\big(S_2(a)\big)$，那么存在 $s_1\in S_1$，使得 $s_1x\in S_2(a)$，那么存在 $s_2\in S_2$，使得 $(s_1s_2)x\in a$，因此 $x\in(S_1S_2)(a)$，所以 $(S_1S_2)(a)\supseteq S_1\big(S_2(a)\big)$。

因此 $(S_1S_2)(a)=S_1\big(S_2(a)\big)$。

4.12.5 如果 a 有准素分解，证明理想 $S(a)$ 的集合（这里 S 跑遍 A 的一切乘法封闭子集）是有限的。

设 $a=\bigcap\limits_{i=1}^{n}q_i$ 是 a 的一个极小准素分解，那么由命题 4.9 知

$$S(a)=\bigcap_{q_i\text{与}S\text{没有交集}}q_i$$

由于 q_i 与 S 要不有交集，要不没有交集，而且 n 是有限的，因此 $\{S(a)\}$ 最多有 2^n 个不同的元素。

4.14 令 a 是环 A 中的一个可分解理想，设 p 是理想 $(a:x)$ 的集合中的一个极大元，这里 $x\in A$ 而 $x\notin a$。证明 p 是属于 a 的素理想。

设 $(a:x_0)$ 是 $\Sigma=\{(a:x)\big|x\notin a\}$ 中的极大元，下证 $(a:x_0)$ 是素理想。

由 1.12 的 i 和 iii 知，$(a:x_0)\subseteq(a:zx_0)$，并且 $\forall yz\in(a:x_0)$，我们有 $yzx_0\in a$，假设 $z\notin(a:x_0)$，那么 $zx_0\notin a$，也就是说 $(a:zx_0)\in\Sigma$，又因为 $(a:x_0)$ 是极大的，因此 $(a:zx_0)=(a:x_0)$，所以 $y\in(a:zx_0)=(a:x_0)$，所以 $(a:x_0)$ 是素的，所以 $\sqrt{(a:x_0)}=(a:x_0)$ 也是素的，由定理 4.5（第一唯一性定理）知 $(a:x_0)$ 属于 a。

4.15 设 a 是环 A 中的一个可分解理想，设 Σ 是属于 a 的素理想的一个孤立集，设 q_Σ 是相应的准素分支的交，设 f 是 A 中的一个元素，使对每个属于 a 的素理想 p，有 $f\in p\Leftrightarrow p\in\Sigma$，又设 S_f 是 f 的一切幂的集合，证明对一切大的 n，有 $q_\Sigma=S_f(a)=(a:f^n)$。

分三步证明：

4.15.1

证明：$\forall n \geq 0, (a : f^n) \subseteq S_f(a)$

由定义即知：

$$S_f(a) = \left\{x \middle| x \in A, \text{且}\exists f^n \in S_f, \text{使得} f^n x \in a\right\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (a : f^n)$$

因此

$$\forall n \geq 0, (a : f^n) \subseteq S_f(a)$$

4.15.2

证明：$S_f(a) = q_\Sigma$

设 $a = \bigcap\limits_{i=1}^{n} q_i$ 是 a 的一个准素分解，由题意即知

$$q_\Sigma = \bigcap_{\sqrt{q_i} \in \Sigma} q_i$$

因为

$$\sqrt{q_i} \notin \Sigma \quad \Rightarrow \quad f \in \sqrt{q_i}$$

所以对于特定的 $\sqrt{q_i} \notin \Sigma$，总存在 $n_i \geq 0$，使得

$$f^{n_i} \in q_i, \quad \Rightarrow S_f \cap q_i \neq \phi$$

同理，因为

$$\sqrt{q_i} \notin \Sigma \quad \Leftarrow \quad f \in \sqrt{q_i}$$

它的逆否命题为

$$\sqrt{q_i} \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad f \notin \sqrt{q_i}$$

所以

$$\forall \sqrt{q_i} \in \Sigma, \quad S_f \cap q_i = \phi$$

因此由 4.9 知

$$S_f(a) = \bigcap_{\sqrt{q_i} \in \Sigma} q_i = q_\Sigma$$

4.15.3

证明：$\exists N \geq 0, q_\Sigma \subseteq (a : f^N)$

设 $a = \bigcap\limits_{i=1}^{n} q_i$ 是 a 的一个准素分解，则因为

$$(a : f^N) \xlongequal{1.12.\text{iv}} \bigcap_{i=1}^{n} (q_i : f^N)$$

所以要使得 $q_\Sigma \subseteq (a:f^N)$，那么就要使得

$$\begin{aligned}&\forall x \in q_\Sigma, f^N x \in a = \bigcap_{i=1}^{n} q_i\\ \Longleftrightarrow&\forall x \in q_\Sigma, \forall q_i, \text{都有} f^N x \in q_i\end{aligned}$$

显然，对于 $\sqrt{q_i} \in \Sigma$，都有 $x \in q_i$，因此只需要取 $N=0$ 即可；而如果 $\sqrt{q_i} \notin \Sigma$，那么对于特定的 $\sqrt{q_i} \notin \Sigma$，总存在 $n_i \geq 0$，使得 $f^{n_i} \in q_i$，所以 $f^{n_i} x \in q_i$，因此只需要取 $N \geq \max\left\{n_i \middle| \sqrt{q_i} \notin \Sigma\right\}$ 即可。

综合 15.1)、15.2)、15.3)，存在足够大的 N，使得 $\forall m \geq N$，都有

$$S_f(a) = q_\Sigma = (a:f^m)$$

5 整相关性和赋值

5.2 设 A 是环 B 的子环，B 在 A 上整，又设 $f: A \to Q$ 是 A 到代数闭域 Q 中的一个同态。求证 f 可以扩充为 B 到 Q 之中的同态。

由于 Q 是域，(0) 是它的唯一素理想，因此 $p = \mathrm{Ker}(f) = (0)^c$ 是 A 中的素理想，根据 (5.10)，存在 B 的素理想 q，使得 $q \cap A = p$。因为 p, q 都是素理想，因此 A/p 和 B/q 都是整环，且根据 (5.6 i)，B/q 在 A/p 上整。

设 $F(A/p), F(B/q)$ 分别是由整环 A/p 和 B/q 所生成的分式域，那么 $F(B/q)$ 的任意元素在 $F(A/p)$ 中整[5]。又因为

$$A/p = A/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f) \subseteq Q$$

所以 A/p 可以看成是 Q 的子环，而因为 Q 是闭域，所以 $F(A/p)$ 是 Q 的子域，有嵌入映射 $f': F(A/p) \to Q$。

因为 $F(B/q)$ 的任意元素在是在 $F(A/p)$ 中整的，$F(A/p)$ 又是 Q 的子域，而且 Q 是代数闭域，所以 $F(B/q) \subseteq Q$，即 $F(B/q)$ 是 Q 的子域，因此有嵌入映射 $f'': F(B/q) \to Q$。那么我们就有同态链:

$$B \xrightarrow{\text{自然同态}} B/q \xrightarrow{\text{嵌入}} F(B/q) \xrightarrow{\text{嵌入}} Q$$

因此得到 B 到 Q 的同态。

现在我们得到

$$A \xrightarrow{\text{自然同态}} A/p \xrightarrow{\text{嵌入}} F(A/p) \xrightarrow{\text{嵌入}} Q$$
$$B \xrightarrow{\text{自然同态}} B/q \xrightarrow{\text{嵌入}} F(B/q) \xrightarrow{\text{嵌入}} Q$$

因为同态链中后面两个都是嵌入，因此可以写 $f: A \to Q, a \to a+p$，$g: B \to Q, b \to b+q$

最后证明这个同态 g 是原来的同态 f 的扩充，即 $g|_A = f$，任意选取 $a \in A$，则 $a \in B$，然后我们有 $a \to a+q$，但是 A/p 是嵌入到 B/q 中的，所以 B/q 中的 $a+q$ 就是 A/p 中的 $a+p$，所以 $a \to a+p = f(a)$。

5.4 设 A 是环 B 的子环，且 B 在 A 上整，设 n 是 B 中一个极大理想，$m = n \cap A$ 是 A 中相应的极大理想，问环 B_n 在 A_m 上是否一定整?

不一定。

考虑整环 $B = \mathbb{R}[x]$，$A = \mathbb{R}[x^2-1]$，先证 B 在 A 上整。对于 $x \in B$，存在多项式 $f(X) = X^2 - \Big((x^2-1)+1\Big) \in A[X]$ 使得 $f(x) = 0$，那么 x 在 A 上整，所以由命题 5.1 i, ii，$A[x]$ 是有限生成的，所以 $A[r_0 + r_1 x + \cdots + r_n x^n], r_i \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}[x^2-1]$ 也是有限生成的，所以 $r_0 + r_1 x + \cdots + r_n x^n$ 在 A 上整，由 $r_0 + r_1 x + \cdots + r_n x^n$ 的任意性知 B 在 A 上整。

---

[5]证明：设 $\forall x, y \in B/q \subseteq F(B/q), y \neq 0$ 在 A/p 上整，则也在 $F(A/p)$ 上整，则存在多项式 $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_m y^{n-m} = 0$，其中 $a_1, \ldots, q_m \in A/p, a_m \neq 0$，那么

$$\frac{1}{a_m} + \frac{a_1}{a_m}\left(\frac{1}{y}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{y}\right)^m = 0$$

也就是 $1/y$ 在 $F(A/p)$ 上整，那么根据 (5.2)，$F(A/p)[x, 1/y]$ 是有限生成的，因此 $F(A/p)[x/y]$ 是有限生成的，根据 (5.1 i) 和 (5.1 ii)，x/y 在 $F(A/p)$ 上整。

令 $n=(x-1)$，那么 $m=n\cap A=(x^2-1)$，那么

$$B_n=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|\, f(x),g(x)\in\mathbb{R}[x],(x-1)\nmid g(x)\right\}$$
$$A_m=\left\{\frac{f(x^2-1)}{g(x^2-1)}\middle|\, f(x^2-1),g(x^2-1)\in\mathbb{R}[x^2-1],(x^2-1)\nmid g(x)\right\}$$

考虑 $\frac{1}{1+x}\in B_n$，如果 $\frac{1}{1+x}$ 在 A_m 上整，则存在多项式

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^k+\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i(x^2-1)}{g_i(x^2-1)}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{k-i}\equiv 0$$

两边同乘以 $(1+x)^k$，再令 $x=-1$，则出现 $1=0$ 的情况，矛盾。所以 $\frac{1}{1+x}$ 不在 A_m 上整。

5.7 设 A 是环 B 的子环，且集合 $B\backslash A$ 对乘法封闭，求证 A 在 B 中整闭。

假设 A 在 B 中不整闭，则设 A 在 B 中的整闭包为 $C\supsetneq A$，任意选取 $x\in C\backslash A\subseteq B\backslash A$，设以 x 为根的次数最小的多项式为

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

由于 $x\notin A$，因此 $n\geq 2$。

因为 $B\backslash A$ 是乘法封闭的，因此

$$b=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\notin A$$

若否，则 $b=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_1$ 是 x 的一个 $n-1$ 次多项式，与 f 极小矛盾。所以

$$x(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1})=-a_n\in A$$

但因为 $x\in B\backslash A$ 和 $x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\in B\backslash A$，且 $B\backslash A$ 是乘法封闭的，因此

$$x(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1})\in B\backslash A$$

矛盾。因此 A 在 B 中整闭。

5.11 设 $f:A\to B$ 是环的平坦同态，那么 f 具有下降性质。

因为 $f:A\to B$ 是平坦的，因此根据第三章课后习题 18 可知映射 $f^*:\mathrm{Spec}(B_q)\to\mathrm{Spec}(A_p)$ 是满的，其中 q 是 B 的素理想而 $p=q^c$。然后根据本章的习题 10(ii) 的 (b', c') 可知 f 具有下降性质。

5.16 设 k 是域，$A\neq 0$ 是有限生成 k 代数。那么存在元素 $y_1,\ldots,y_r\in A$，它们在 k 上代数无关，使得 A 在 $k[y_1,\ldots,y_r]$ 上整。

5.16.1

设 $A=k[x_1,x_2,\ldots,x_n]$，不失一般性，假设 $\{x_1,x_2,\ldots,x_r\}$ 是 $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ 在 k 上的极大代数无关组。如果 $r=n$，则 A 显然在 A 上整，故命题成立。这是归纳证明的第一步，如果 $r<n$，我们对 n 使用数学归纳法变为 $n-1$ 的问题，继而变为 $n-2$ 的问题... 直到 $n-k=r$ 为止。

因此下面都假设 $r<n$。书本上提示的证明只适用于 k 是无限域，但几何意义很明显，而同时适用于任意域 k 的证明，则没有那么直观的几何意义，但其思想是一致的。我们分别进行论述。

5.16.2

首先考虑 k 是无限域的证明。在 $r<n$ 的假设下，$x_1,x_2,\ldots,x_n$ 代数相关，即存在 k 上的非零多项式 f，使得

$$0=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

设 $F(x_1,\ldots,x_n)$ 是它的最高次部分（可能是很多项的求和），那么令 $y_i=x_i-\lambda_i x_1, 2\le i\le n$，这里 $\lambda_i\in k$ 是待定的常数，则

$$0=f(x_1,y_2+\lambda_2x_1,\ldots,y_n+\lambda_nx_1)=g(x_1)$$

只看 x_1，那么上式右端 $g(x_1)$ 就是 $k[y_2,\ldots,y_n]$ 上的一元多项式，并且最高次项系数刚好为

$$F(1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in k$$

由于 k 是无限域，我们总可以找到 $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$[6]，并且，使得

$$F(1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\neq 0$$

那么 $g(x_1)/F(1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=0$ 就是关于 x_1 的、系数在 $k[y_2,\ldots,y_n]$ 中的首 1 多项式，所以 x_1 在 $k[y_2,\ldots,y_n]$ 上整。这也等价于 $A=k[y_2,\ldots,y_n][x_1]$ 在 $k[y_2,\ldots,y_n]$ 上整。

由归纳假设,对于环 $k[y_2,\ldots,y_n]$,我们可以找到 $z_1,z_2,\ldots,z_s\in k[y_2,\ldots,y_n]\subset A$,使得 $z_1,z_2,\ldots,z_s$ 在 k 上代数无关，而且 $k[y_2,\ldots,y_n]$ 在 $k[z_1,z_2,\ldots,z_s]$ 整。根据 (5.4)，A 也在 $k[z_1,z_2,\ldots,z_s]$ 中整。

5.16.3

当 k 是有限域时，因为 k 的元素个数有限，不能保证 $F(1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\neq 0$，需要将线性变换换成代数变换，才能使得最高次项不为 0。下面论述的证明适用于一般域，而不仅仅是有限域。

我们选取足够大的 N，令 $y_i=x_i-x_1^{N^{i-1}}, 2\le i\le n$，则

$$0=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^m a_ix_1^{b_{i1}}\left(y_2+x_1^N\right)^{b_{i2}}\left(y_3+x_1^{N^2}\right)^{b_{i3}}\ldots\left(y_n+x_n^{N^{n-1}}\right)^{b_{i,n}}=g(x_1)$$

只看 x_1，那么上式右端 $g(x_1)$ 就是 $k[y_2,\ldots,y_n]$ 上的一元多项式。记 $C_i=b_{i1}+b_{i2}N+\cdots+b_{in}N^{n-1}$，那么该多项式的次数为

$$\max_i\{C_i\}$$

我们总可以选取足够大的 N[7]，使得它的最大值大于其余都所有值，并且不失一般性，设最大值为 C_1，则 $g(x_1)$ 为

$$0=g(x_1)=a_1x_1^{C_1}+\ldots$$

[6]假如非零多项式 $F(1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\equiv 0$，那么固定 $\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}$，只看 λ_n 变量，把 F 看作是 λ_n 的一元 m 次多项式，那么任意的 $z_1,\ldots,z_m\in k$，都有 $F(z_i)=0$，所以 $F(\lambda_n)=0$ 可以分解为 $a(\lambda_n-z_1)\ldots(\lambda_n-z_m)=0, a\in k, a\neq 0$，代入 $z\notin\{z_1,\ldots,z_m\}$，显然不可能为 0，因此不可能恒等于零，矛盾。

[7]设有矩阵

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

因为 $a_1 \in k, a_1 \neq 0, k$是域，所以可以得到

$$0 = x_1^{C_1} + \dots$$

上式右端就是关于 x_1 的、系数在 $k[y_2,\dots,y_n]$ 中且次数为 C_1 的首 1 多项式，所以 x_1 在 $k[y_2,\dots,y_n]$ 上整。这也等价于 $A = k[y_2,\dots,y_n][x_1]$ 在 $k[y_2,\dots,y_n]$ 上整。

由归纳假设，对于环 $k[y_2,\dots,y_n]$，我们可以找到 $z_1, z_2, \dots, z_s \in k[y_2,\dots,y_n] \subset A$，使得 $z_1, z_2, \dots, z_s$ 在 k 上代数无关，而且 $k[y_2,\dots,y_n]$ 在 $k[z_1,z_2,\dots,z_s]$ 整。根据 (5.4)，A 也在 $k[z_1,z_2,\dots,z_s]$ 中整。

5.23 设 A 是环，证明下述条件等价：i) A 中每个素理想都是极大理想的交；ii) A 的每个同态象的小根等于大根；iii) A 的每个非极大的素理想等于真包含它的那些素理想的交。

第三同构定理：A 是环，$a \subseteq I$ 是 A 的两个理想，则

$$(A/a)/(I/a) \cong A/I$$

这表明 A/a 的理想 I/a 与 A 中包含 a 的理想 I 存在一一对应关系（命题 1.1）。所以本题的题设 i), iii)，过渡到商环中依然成立。

5.23.1

i) $\Rightarrow$ ii)

设 f 是 A 到 B 的一个同态，则从同构

$$A/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$$

其中 b_{ij} 都是非负整数，矩阵的任意两行都不全相同。那么总可以找到足够大的整数 N，使得

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ N \\ \vdots \\ N^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{pmatrix}$$

有 $C_i \neq C_j (\forall i \neq j)$。

证明并不难，取 $N = 1 + \sum\limits_{i,j} b_{i,j}$（并非最优估计），那么 $\forall i \neq j$，设 b_{ik}, b_{jk} 是向量 $(b_{in}, b_{i,n-1}, \dots, b_{i1})$ 和 $(b_{jn}, b_{j,n-1}, \dots, b_{j1})$ 中第一个不相等的值，不失一般性设 $b_{ik} > b_{jk}$，那么

$$\begin{aligned} & C_i - C_j \\ =& \Big(b_{in}N^{n-1} + b_{i,n-1}N^{n-2} + \dots + b_{i1}\Big) - \Big(b_{jn}N^{n-1} + b_{j,n-1}N^{n-2} + \dots + b_{j1}\Big) \\ =& \Big(b_{ik} - b_{jk}\Big)N^{k-1} + \Big(b_{i,k-1} - b_{j,k-1}\Big)N^{k-2} + \dots + \Big(b_{i1} - b_{j1}\Big) \\ \geq& N^{k-1} - \Big(b_{j,k-1} + \dots + b_{j1}\Big)N^{k-2} \\ \geq& N^{k-2}\Big(N - b_{j,k-1} - \dots - b_{j1}\Big) \\ >& 0 \end{aligned}$$

证毕。

这表明，$C_1, C_2, \dots, C_m$ 中的最大值大于其余都所有值，不妨设 $C_1 > \max\{C_2, \dots, C_n\}$。

出发，结合定义和命题 1.1，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)\text{的小根} &\xlongequal{\text{定义}} \mathrm{Im}(f)\text{所有素理想的交}\\ &\xlongequal{\text{同构}} A/\mathrm{Ker}(f)\text{所有素理想的交}\\ &\xlongequal{\text{对应}} \bigcap_{p\in P}\Big(p/\mathrm{Ker}(f)\Big)=\Big(\bigcap_{p\in P}p\Big)/\mathrm{Ker}(f), P\text{是}A\text{中包含 }\mathrm{Ker}(f)\text{的素理想的集合}\\ &\xlongequal{\text{题设}} \Big(\bigcap_{p\in M}p\Big)/\mathrm{Ker}(f), M\text{是}A\text{中包含 }\mathrm{Ker}(f)\text{的极大理想的集合}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f)\text{的大根} &\xlongequal{\text{定义}} \mathrm{Im}(f)\text{所有极大理想的交}\\ &\xlongequal{\text{同构}} A/\mathrm{Ker}(f)\text{所有极大理想的交}\\ &\xlongequal{\text{对应}} \bigcap_{p\in M'}\Big(p/\mathrm{Ker}(f)\Big)=\Big(\bigcap_{p\in M'}p\Big)/\mathrm{Ker}(f), M'\text{是}A\text{中包含 }\mathrm{Ker}(f)\text{的全体极大理想的集合}\end{aligned}$$

所以 $\mathrm{Im}(f)$的大根 $\subseteq \mathrm{Im}(f)$的小根，而“大根 $\supseteq$ 小根”总是成立，因此 $\mathrm{Im}(f)$的大根 $=\mathrm{Im}(f)$的小根。

5.23.2

ii) $\Rightarrow$ iii)

设 p 是 A 的一个非极大素理想，考虑自然同态 $A\to A/p$，A/p 是整环，所以 A/p 的零理想 $(0)_{A/p}$ 是它的小根，即 A/p 的所有素理想的交。又根据题设，$(0)_{A/p}$ 也是 A/p 的大根，即 A/p 的所有极大理想的交。但是在 A 中，p 不是极大的，因此对应地 A/p 的 $(0)_{A/p}=p/p$ 不是极大的（命题 1.1），因此，A/p 的 $(0)_{A/p}$ 也等于 A/p 的所有非零素理想的交。再次根据命题 1.1，即

$$\begin{aligned}p/p &=(0)_{A/p}\\ &=\bigcap_{m\text{是}A/p\text{的非零素理想}} m\\ &=\bigcap_{I\text{是}A\text{中真包含}p\text{的素理想}}\Big(I/p\Big)\\ &=\Big(\bigcap_{I\text{是}A\text{中真包含}p\text{的素理想}} I\Big)/p\end{aligned}$$

所以

$$p=\bigcap_{I\text{是}A\text{中真包含}p\text{的素理想}} I$$

5.23.3

iii) $\Rightarrow$ i)

假设结论 i) 不成立，则 A 存在一个素理想 p，它不是极大理想的交。考虑整环 A/p，则 $(0)_{A/p}$ 是整环 A/p 的小根，但因为它不是 A/p 极大理想的交（对应关系），所以 $(0)_{A/p}$ 不是 A/p 的大根，那么可以设 f 是 A/p 的大根的一个非零元。

现在考虑分式环 $(A/p)_f$，它是非零环，设 m 是 $(A/p)_f$ 的一个极大理想，那么考虑 m 在 A/p 中的局限 $q = m \cap (A/p)$，q 是 A/p 中的素理想，$m = q_f = S_f^{-1}q$，$S_f = \{f^n\}_{n\geq 0}$。根据命题 3.11.iv，$f \notin q$，所以 q 在 A/p 中不是极大的（因为 A/p 中的大根包含 f）。

那么由题设，q 是 A/p 中所有真包含于 q 的所有素理想的交，设 $q' \supsetneq q$ 是一个素理想，如果它跟 S_f 没交集，根据命题 (3.11 iv)，$S_f^{-1}q'$ 是 $(A/p)_f$ 中的素理想，且真包含于 m，跟 m 是极大的矛盾。所以 $q' \cap S_f$ 非空，这样就有 $S_f^{-1}q' = (A/p)_f$。

但是，由推论 3.14.ii，有

$$
\begin{aligned}
q_f =& S_f^{-1}\left(\bigcap_{q'\text{是真包含}q\text{的素理想}} q'\right)\\
=& \bigcap_{q'\text{是真包含}q\text{的素理想}} S_f^{-1}q'\\
=& (A/p)_f
\end{aligned}
$$

矛盾。

5.27 设 A, B 是两个局部环，如果 A 是 B 的子环，而且 A 的极大理想 m 包含在 B 的极大理想 n 之中（或者等价地说，如果 $m = n \cap A$），我们就说 B 优于（dominate）A。设 K 是域，Σ 是 K 中全部局部子环构成的集合，按“优于”关系将 Σ 排序。证明在 Σ 中有极大元，而且 $A \in \Sigma$ 在 Σ 中是极大的，当且仅当 K 是域 K 的赋值环。

5.27.1

记局部环 A 的极大理想为 m_A。

首先分析局部环的充要条件。命题 1.6.i 给出，如果环 A 的全体不可逆元构成一个理想，那么环 A 就是一个局部环，这个理想就是 m_A。事实上，这个命题的逆命题也成立，即如果环 A 是一个局部环，那么 A 的极大理想 m_A 就是 A 的全体不可逆元的集合，如果不是，存在不可逆元 $\alpha \notin m_A$，但是由引理 1.5，存在另一极大理想 m' 使得 $\alpha \in m' \neq m_A$，这跟 A 是局部环矛盾。

5.27.2

下面使用 Zorn 引理证明。难点是证明链中的局部环的并还是一个局部环。

设 $C = \{A_i\}$ 是任意一个满足题意的局部环链，则显然 C 非空。考虑

$$\mathscr{A} = \bigcup_i A_i, \quad m_{\mathscr{A}} = \bigcup_i m_{A_i}$$

$\forall x, y \in \mathscr{A}$，则有 k 使得 $x, y \in A_k$，则 $x + y, xy \in A_k \subseteq \mathscr{A}$，结合律和单位元的存在性是显然的，所以 $\mathscr{A}$ 是一个环。另一方面，$\forall x, y \in m_{\mathscr{A}}$，必然有 k 使得 $x, y \in m_{A_k}$，所以 $x + y \in m_{A_k} \subseteq m_{\mathscr{A}}$，而 $\forall x \in m_{\mathscr{A}}, y \in \mathscr{A}$，则有 k 使得 $x \in m_{A_k}, y \in A_k$，所以 $xy \in m_{A_k} \subseteq m_{\mathscr{A}}$，这表明 $m_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个理想。

下面证明 $m_{\mathscr{A}}$ 就是 $\mathscr{A}$ 的全体不可逆元的集合。因为每个 m_{A_i} 都是 A_i 的全体不可逆元的集合，所以 $m_{\mathscr{A}}$ 是一个不可逆元的集合。如果存在不可逆元 $\alpha \in \mathscr{A}, \alpha \notin m_{\mathscr{A}}$，那么存在 k 使得 $\alpha \in m_{A_k} \subseteq \mathscr{A}$，

矛盾，所以 $m_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}$ 的全体不可逆元的集合，它又是一个理想，故 $\mathscr{A}$ 是一个局部环，极大理想是 $m_{\mathscr{A}}$。

综上，链 C 非空有界。因此 Σ 中有极大元。

5.27.3

设 A 是 Σ 的一个极大元，m_A 是它的极大理想，令 Q 为域 A/m_A 的代数闭包（第一章课后习题 13 题表明域总可以闭化的）。那么按照引理 5.19 上方的说明构造偏序集 Σ'，并且考虑自然同态 $f: A \to Q, x \to x + m_A$，我们得到 $m_A = \mathrm{Ker}(f)$，那么 $(A, f) \in \Sigma'$，所以存在 Σ' 中的极大元 (B, g)，使得 $B \supseteq A, g|_A = f$。由引理 5.19，B 是局部环，$m_B = \mathrm{Ker}(g)$，所以 $m_B \supseteq m_A$，所以 $B \in \Sigma$，所以 $B \subseteq A$，所以 $B = A$。根据定理 5.21，A 是赋值环。

反过来，如果 A 是一个赋值环，那么 A 是一个局部环（命题 5.18.i），所以 $A \in \Sigma$，如果 A 不是 Σ 中的极大元，那么存在 $B \in \Sigma$ 使得 $A \subsetneq B, m_A \subseteq m_B$，考虑 $\forall x \in B \backslash A$，因为 A 是赋值环且 $x \notin A$，所以 $x^{-1} \in A \subsetneq B$，也就是 $x, x^{-1} \in B$，这表明 x^{-1} 在 B 中可逆，$x^{-1} \notin m_B$。因为 $x \in B \backslash A$，即 $(x^{-1})^{-1} = x \notin A$，但 $x^{-1} \in A$，这表明 x^{-1} 是 A 的不可逆元，所以 $x^{-1} \in m_A$，这与 $m_A \subseteq m_B$ 矛盾。所以 A 是 Σ 中的极大元[8]。

5.28 设 A 是整环，K 是它的分式域。证明下列论断等价：(1) A 是域 K 的赋值环；(2) 设 a, b 是 A 中任意两个理想，那么或者 $a \subseteq b$，或者 $b \subseteq a$。由此得出，如果 A 是一个赋值环，p 是 A 中一个素理想，那么环 A_p 与 A/p 是它们的分式域的赋值环。

5.28.1

(1) $\Rightarrow$ (2)：如果 $a \not\subseteq b$ 且 $b \not\subseteq a$，那么可以选取 $\alpha \in a, \alpha \notin b$ 以及 $\beta \in b, \beta \notin a$，考虑 $\gamma = \alpha/\beta \in K$，因为 A 是赋值环，因此 $\gamma \in A$ 或者 $\gamma^{-1} \in A$，这对应于 $\alpha = \gamma\beta \in b$ 或者 $\beta = \gamma^{-1}\alpha \in a$，均矛盾。

5.28.2

(2) $\Rightarrow$ (1)：设 $a/b \in K$ 是 K 中的可逆元，$a, b \in A$。在 A 环中，我们有 $a \in (a) \subseteq (b)$ 或 $b \in (b) \subseteq (a)$。如果 $a \in (a) \subseteq (b)$，则有 $x \in A$ 使得 $a = bx$，那么 $a/b = xb/b = x \in A$；如果 $b \in (b) \subseteq (a)$，则有 $x \in A$ 使得 $b = ax$，那么 $(a/b)^{-1} = b/a = ax/a = x \in A$。所以 A 是赋值环。

5.28.3

因为 A 是一个赋值环，所以根据上面的证明，本题的性质 ii 成立。

根据命题 3.11，A_p 的理想都是扩理想，因此设 a_p, b_p 是 A_p 的两个理想，a, b 是 A 的两个理想，且 $a \subseteq b$ 或者 $b \subseteq a$，所以 $a_p \subseteq b_p$ 或者 $b_p \subseteq a_p$，所以 A_p 是赋值环。

根据第三同构定理，A/p 的理想与包含 p 的所有理想一一对应，因此如果 a/p 与 b/p 是 A/p 的两个理想，则 a, b 也是 A 的两个理想，且 $a \subseteq b$ 或者 $b \subseteq a$，所以 $a/p \subseteq b/p$ 或者 $b/p \subseteq a/p$，所以 A/p 是赋值环。

---

[8] 事实上，我们也可以认为，这个方向已经包含了 Σ 中极大元存在性的证明，因为赋值环就是 Σ 中的极大元，而由定理 5.21，赋值环总是存在的，所以极大元总是存在的。

6 链条件

6.1

6.1.1 设 M 是一个 Noether A-模，$u: M \to M$ 是一个模同态。如果 u 是满的，那么 u 是同构；

首先留意到，因为 u 是一个满射，因此它的复合映射 u^n 都是满射。

接着，我们考虑 $\mathrm{Ker}(u^n)$，它是 M 的子模，并且显然有 $\mathrm{Ker}(u^n) \subseteq \mathrm{Ker}(u^{n+1})$，因为 M 是一个 Noether A-模，因此存在 N 使得 $\mathrm{Ker}(u^{n+1}) = \mathrm{Ker}(u^n), \forall n \geq N$。

$\forall y \in \mathrm{Ker}(u)$，因为 u^N 是满射，所以存在 $x \in M$ 使得 $u^N(x) = y$，即 $u^{N+1}(x) = 0$，所以 $x \in \mathrm{Ker}(u^{N+1}) = \mathrm{Ker}(u^N)$，既然 $x \in \mathrm{Ker}(u^N)$，那么 $0 = u^N(x) = y$，这表明 u 是单射。所以 u 是同构。

6.1.2 如果 M 是一个 Artin A-模，而 u 是单的，那么 u 是同构

首先留意到，因为 u 是一个单射，因此它的复合映射 u^n 都是单射。

接着，我们考虑 $\mathrm{Im}(u^n)$，它是 M 的子模，并且显然有 $\mathrm{Im}(u^n) \supseteq \mathrm{Im}(u^{n+1})$，因为 M 是一个 Artin A-模，因此存在 N 使得 $\mathrm{Im}(u^{n+1}) = \mathrm{Im}(u^n), \forall n \geq N$。

$\forall x \in M$，那么有 $u^{N+1}(x) \in \mathrm{Im}(u^{N+1})$，所以存在 $y \in \mathrm{Im}(u^N)$ 使得 $u(y) = u^{N+1}(x)$，而因为 $y \in \mathrm{Im}(u^N) = \mathrm{Im}(u^{N+1})$，所以存在 $z \in M$ 使得 $u^{N+1}(z) = y$，那么 $u^{N+2}(y) = u^{N+1}(z)$。因为 u^{N+1} 是单射，所以 $u(z) = y$，所以 u 也是满的。所以 u 是同构。

6.2 设 M 是 A-模。如果 M 的有限生成子模构成的任意一个非空集合都有极大元，那么 M 是 Noether 模。

根据命题 6.2，我们只需要证明 M 的每个子模都是有限生成的。设 N 是 M 的一个子模，而 Σ 是 N 的所有有限子模所构成的集合，根据题设，Σ 有一个极大元 N_0。如果 $N \supsetneq N_0$，那么选取 $x \in N \backslash N_0$，考虑子模 $N_0 + Ax \supsetneq N_0$，这跟 N_0 极大矛盾。所以 $N = N_0$，即 N 是有限生成的。

6.3 设 M 是 A-模，并设 N_1, N_2 是 M 的子模。如果 $M/N_1, M/N_2$ 都是 Noether 模，那么 $M/(N_1 \cap N_2)$ 也是 Noether 模，将上面的 Noether 模改为 Artin 模，也有类似结论。

根据命题 2.1 ii)，我们有

$$N_1/(N_1 \cap N_2) \cong (N_1 + N_2)/N_2$$

显然 $(N_1 + N_2)/N_2$ 是 Noether 模 M/N_2 的子模，所以也是 Noether 环。考虑同态

$$\begin{aligned} f: M/(N_1 \cap N_2) &\to M/N_1 \\ x + (N_1 \cap N_2) &\to x + N_1 \end{aligned}$$

那么 $\mathrm{Ker}(f) = \{x + (N_1 \cap N_2) | x \in N_1\} = N_1/(N_1 \cap N_2)$。由此得到正合序列：

$$0 \to N_1/(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{\text{incl}} M/(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{f} M/N_1 \to 0$$

因为 $N_1/(N_1 \cap N_2)$ 和 M/N_1 都是 Noether 模，所以由命题 6.3.i 知 $M/(N_1 \cap N_2)$ 也是 Noether 模。

上述证明过程换成 Atrin 模，然后把命题 6.3.i 改为命题 6.3.ii，所有推理一样成立。

6.4 设 M 是 Noether A-模，并设 $\mathfrak{a}$ 是 M 在 A 中的零化子，证明 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether 环。如果在这个结果中用“Artin 模”代替“Noether 模”，它是否还正确?

因为 M 是 Noether A-模，由命题 6.2 知 M 是有限生成的，设 $x_1, \ldots, x_n$ 是它的一组生成元。考虑同态

$$f : A \to M^n$$
$$a \to (ax_1, \ldots, ax_n)$$

注意 $\mathfrak{a} = \{a | a \in A, aM = 0\}$，因此很显然 $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(f)$，那么 $A/\mathfrak{a} = A/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$ 是 M^n 的子模，根据引理 6.4，M^n 也是 Noether A-模，其子模也是 Noether A-模，所以 $A/\mathfrak{a}$ 是 Noether A-模。

本题要证明 A/a 是是 Noether 环，即 A/a 是 Noether A/a-模，等价地，A/a 的每个理想都是有限生成的。而 A/a 是 Noether A-模，它的每个理想也是一个 A-子模，所以每个理想作为 A-模它是有限生成的，从而作为 A/a-模也是有限生成的，所以 A/a 是是 Noether 环。

如果改为 Artin 模，结论不一定成立。比如考虑 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，根据第六章例 3，它是一个 Artin 模。显然，它的零化子集 $\mathfrak{a} = \{0\}$，因此 $\mathbb{Z}/\mathfrak{a} \cong \mathbb{Z}$，但 $\mathbb{Z}$ 不是 Artin 模。

7 Noether 环

7.1 设 A 不是 Noether 环，令 Σ 是 A 中不是有限生成的理想的集合。

7.1.1 证明 Σ 有极大元，且 Σ 中极大元是素理想；

极大元的存在是显然的，是 Zorn 引理的标准应用（以 $\subseteq$ 为偏序关系，并且"同一条链中的理想的并"显然是一个理想，并且不是有限生成的。）。设 $\mathfrak{a}$ 是 Σ 的极大元，下证它是一个素理想。

设有 $x, y \notin \mathfrak{a}$，但 $xy \in \mathfrak{a}$，那么 $(x)+\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{a}$ 是有限生成的，否则就跟 $\mathfrak{a}$ 是极大元矛盾。那么存在 $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{a}$，使得 $(a_1, \dots, a_n, x) = (x)+\mathfrak{a}$[9]，那么 $\forall a \in \mathfrak{a}$，都有 $a_0 \in (a_1, \dots, a_n)$ 以及 $b \in A$，使得 $a = a_0 + bx$，这表明 $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n) + x(\mathfrak{a}:x)$。但因为 $xy \in \mathfrak{a}$，所以 $y \in (\mathfrak{a}:x)$，但 $y \notin \mathfrak{a}$，所以 $(\mathfrak{a}:x) \supsetneq \mathfrak{a}$，这表明 $(\mathfrak{a}:x)$ 是有限生成的，否则又跟 $\mathfrak{a}$ 是极大元矛盾。结合 $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_n) + x(\mathfrak{a}:x)$，得到 $\mathfrak{a}$ 是有限生成的，再次矛盾。所以 $\mathfrak{a}$ 是素理想。

7.1.2 因此，一个环，若其中每个素理想都是有限生成的，它必是 Noether 环 (I.S. Cohen)。

因为 A 的每个素理想都是有限生成的，所以 A 中所有的理想都是有限生成的，否则如果 A 中存在一个不是有限生成的理想，那么存在一个极大元包含于它，而且极大元是素理想，并且又不是有限生成的，矛盾。根据 Noether 环的等价定义 (3)，A 是 Noether 环。

7.2 设 A 是 Noether 环，并设 $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in A[[x]]$。证明 f 是幂零元，当且仅当每个 a_n 是幂零元。

$\Rightarrow$：第一章课后习题 5.ii) 已经证明。

$\Leftarrow$：因为 A 是 Noether 环，所以根据 Hilbert 基定理，多项式环 $A[x]$ 也是 Noether 环，而 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 都是幂零元，所以根据第一章课后习题 2.ii) 知 $a_0, a_0+a_1x, a_0+a_1x+a_2x^2, \dots \in A[x]$ 都是幂零元，即 $a_0, a_0+a_1x, a_0+a_1x+a_2x^2, \dots \in \mathfrak{N}(A[x])$，根据 7.15，$\mathfrak{N}(A[x])$ 是幂零的，所以存在足够大的 N，使得

$$0 = a_0^N = (a_0+a_1x)^N = (a_0+a_1x+a_2x^2)^N = \dots$$

所以

$$0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^N$$

7.3 设 $\mathfrak{a}$ 是环 A 中的不可约理想，那么下述论断等价：i) $\mathfrak{a}$ 是准素理想；ii) 对 A 中每个乘法封闭子集 S，有 $x \in S$，使 $(S^{-1}\mathfrak{a})^c = (\mathfrak{a}:x)$；iii) 对每个 $x \in A$，序列 $(\mathfrak{a}:x^n)$ 是稳定的。

7.3.1

i) $\Rightarrow$ ii)：根据题设 $\mathfrak{a}$ 是 $\sqrt{\mathfrak{a}}$ 准素的，因此根据命题 4.8，如果 $S \cap \sqrt{\mathfrak{a}} \neq \varnothing$，那么 $(S^{-1}\mathfrak{a})^c = A$，取 $\forall x \in S \cap \sqrt{\mathfrak{a}}$，那么存在 k 使得 $x^k \in \mathfrak{a}$，由于 S 是乘法封闭的，所以 $x^k \in S$，那么 $(S^{-1}\mathfrak{a})^c = A = (\mathfrak{a}:x^k)$，

[9] 这是可以做到的，因为我们可以任取 $(x)+\mathfrak{a}$ 的 n 个生成元 $a_1', \dots, a_n'$，然后将它们写成 $a_1' = a_1 + b_1 x, \dots, a_n' = a_n + b_n x$，$a_i \in \mathfrak{a}$，所以 $a_1, \dots, a_n, x$ 也是一组生成元。

如果 $S \cap \sqrt{\mathfrak{a}} = \varnothing$，那么 $(S^{-1}\mathfrak{a})^c = \mathfrak{a} = (\mathfrak{a} : 1)$。

7.3.2

ii) ⇒ iii)：$\forall x \in A$，考虑 $S = \{1, x, x^2, \dots,\}$，根据题设，存在 $x^K \in S$，使得 $(S^{-1}\mathfrak{a})^c = (\mathfrak{a} : x^K)$，根据命题 3.11.ii)，有

$$(S^{-1}\mathfrak{a})^c = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathfrak{a} : x^n) \supseteq (\mathfrak{a} : x^K) \quad (\forall k > 0)$$

所以

$$(\mathfrak{a} : x^K) = \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathfrak{a} : x^n)$$

而且 $(\mathfrak{a} : x^i) \subseteq (a : x^j), \forall i < j$，所以序列 $(\mathfrak{a} : x^n)$ 稳定于 $(\mathfrak{a} : x^K)$。

7.3.3

iii) ⇒ i)：参考引理 7.12 的证明。过渡到商环 $A/\mathfrak{a}$，那么 $\mathfrak{a}$ 成为了 $A/\mathfrak{a}$ 中的零理想，并且保持理想的对应关系。所以我们只需要证明"零理想是不可约的，那么它是准素的"。令 $\bar{x}\bar{y} = 0, \bar{y} \neq 0$，根据题设中序列 $(\mathfrak{a} : x^n)$ 是稳定的，对应于 $(0 : \bar{x}^n)$ 是稳定的，即对于某个 K，有 $(0 : \bar{x}^K) = (0 : \bar{x}^{K+1}) = \dots$，由此得出[10]$(\bar{x}^K) \cap (\bar{y}) = 0$。而 0 是不可约的且 $(\bar{y}) \neq 0$，所以 $(\bar{x}^K) = 0$，即 $\bar{x}^K = 0$，根据定义，0 是准素的。

7.4 下列哪些环是 Noether 环？（在下述所有情况下系数都是复数）

7.4.1 在圆周 $|z| = 1$ 上没有极点的 z 的有理函数环；

因为 $\mathbb{C}$ 是 Noether 环，所以根据 Hilbert 基定理，$\mathbb{C}[z]$ 是 Noether 环，而题设的环为

$$A = \left\{ \frac{f}{g} \middle| f, g \in \mathbb{C}[z], (x-a) \nmid g, |a| = 1 \right\}$$

那么令

$$S = \{ g | \, g \in \mathbb{C}[z], (x-a) \nmid g, |a| = 1 \}$$

显然 S 是乘法封闭的，而 $S^{-1}\mathbb{C}[z] = A$，所以根据命题 7.3，它是 Noether 环。

7.4.2 具有正的收敛半径的 z 的幂级数环；

从语言理解角度来看，这道题的提法有歧义，即"具有正的收敛半径"应该怎样理解。一种理解是：收敛半径必须为正数（不能是 0 或者无穷），另一种理解是：收敛半径只要大于 0 就行。但从数学角度来看，这道题并无歧义，因为如果是第一种理解，那么因为 0 多项式具有无穷收敛半径，因此 0 不能在"具有正的收敛半径的 z 的幂级数"的集合里边，所以根本不能构成环。因此，只能是后一种理解。

记题设的集合为 A，那么根据第一章课后习题 5.i，$a + zf \in A \subseteq \mathbb{C}[[z]]$ 是在 $\mathbb{C}[[z]]$ 中可逆的，这里 $a \in \mathbb{C}, a \neq 0, f \in \mathbb{C}[[z]]$。并且因为 $a + zf$ 具有正的收敛半径，因此 $(a + zf)^{-1}$ 也具有正的收敛半径，即 $(a + zf)^{-1} \in A$，也就是说 $a + zf$ 在 A 中也可逆。

[10]因为如果 $a \in (\bar{y})$，则因为 $\bar{x}\bar{y} = 0$ 有 $a\bar{x} = 0$，如果同时 $a \in (\bar{x}^K)$，则 $a = b\bar{x}^K$，即 $0 = b\bar{x}^{K+1}$，那么 $b \in (0 : \bar{x}^{K+1}) = (0 : \bar{x}^K)$，所以 $0 = b\bar{x}^K = a$。

设 I 是 A 中的一个理想，$z^n(a+zf) \in I$ 是 I 中一个"最低次项的次数最小"的幂级数，这里 $a \in \mathbb{C}, a \neq 0, f \in \mathbb{C}[[z]]$，那么显然 $I \supseteq \Big(z^n(a+zf)\Big)$，根据前面所述，$(a+zf)^{-1} \in A$，那么 $z^n = z^n(a+zf)(a+zf)^{-1} \in \Big(z^n(a+zf)\Big)$，这表明 $\Big(z^n(a+zf)\Big) = (z^n)$。由 $z^n(a+zf)$ 的选择，$(z^n) \supseteq I$ 是显然的，所以 $I = (z^n)$。

也就是说 A 中的所有理想都具有 (z^n) 的形式，而且 $(z^n) \supseteq (z^{n+1})$，所以 A 中的理想升链是稳定的，即 A 是 Noether 环。

7.4.3 具有无限收敛半径的 z 的幂级数环；

本题结论是否定的，即"具有无限收敛半径的幂级数"的集合 A，不是 Noether 环。跟前一问的区别在于，如果 $a+zf \in A$ 在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中可逆，则它不一定具有无限的收敛半径（只能保证是正的），所以它在 A 中不一定可逆。比如 $(e^z-z)/z \in A$ 且在 $\mathbb{C}[[x]]$ 中可逆，但 $z/(e^z-1)$ 的收敛半径为 2π，因此，没法沿用前一问的证明。

具体的反例是：设

$$f_n = \prod_{i=n}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^i}\right)$$

显然 f_n 的收敛半径为无穷大[11]，而且每个 f_n 展开后，就是一个幂级数，因此 $f_n \in A$。可以留意到，$\forall g_1, g_2, \ldots, g_n \in A$，都有

$$g_1f_1 + g_2f_2 + \cdots + g_nf_n \neq f_{n+1}$$

这是因为将 $z = 2^n$ 代入时，左边等于 0，而右边不等于 0。由此表明理想升链 $\{f_1, \ldots, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不是稳定的（如果稳定，则对于足够大的 N，f_N 可以由 $f_1, \ldots, f_{N-1}$ 线性组合表示，但上面已经证明了不可能），所以 A 不是 Noether 环。

7.4.4 其前 k 阶微商在原点为零的 z 的多项式全体所成的环（这里 k 是固定整数）；

注意这里的前 k 阶导数不包含"0 阶"导数，即不包含本身，否则根本就不是环。

所以这意味着 $A = \{c + z^{k+1}f | c \in \mathbb{C}, f \in \mathbb{C}[z]\} = \mathbb{C}[1, z^{k+1}, \ldots, z^{2k+1}]$，根据 7.6，$A$ 是 Noether 环。

7.4.5 其对 ω 的偏微商在 $z=0$ 处为零的，变元 z, ω 的多项式的全体所成的环。

注意到对 ω 的偏导数不会影响 z，因此这意味着 $A = \{c + zf | c \in \mathbb{C}, f \in \mathbb{C}[z, \omega]\}$，不难发现 $\forall g_1, g_2, \ldots, g_n \in A$，都有

$$g_1z\omega + g_2z\omega^2 + \cdots + g_nz\omega^n \neq z\omega^{n+1}$$

这是因为（$c_1, \ldots, c_n$ 分别是 $g_1, \ldots, g_n$ 中的常数项）

$$(g_1-c_1)z\omega + \cdots + (g_n-c_n)z\omega^n \neq z(\omega^{n+1} + c_n\omega^n + \cdots + c_1\omega)$$

因为 $z^2 | (g_i - c_i)$，所以左端被 z^2 整除，而右边要想被 z^2 整除，只有让

$$\omega^{n+1} + c_n\omega^n + \cdots + c_1\omega \equiv 0$$

[11] 当 $|z| < 2^n$ 时，$\left|1-\frac{z}{2^i}\right| \leq 1 + \frac{|z|}{2^i} \leq \exp\left(\frac{|z|}{2^i}\right), \forall i \geq n$，那么对于任意 z，都有 $\left|\prod_{i=n}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2^i}\right)\right| \leq \exp\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{|z|}{2^i}\right) < +\infty$，这表明 f_n 总是收敛的。

这在复数域里是不可能的。矛盾。

这表明理想升链 $\left\{(z\omega, z\omega^2, \ldots, z\omega^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 不是稳定的，所以 A 不是 Noether 环。

7.6 如果有限生成的环 K 是域，它必是有限域。

我们需要考虑域的特征 $\mathrm{char}(K)$，要注意：特征为 0 的域一定是无限域，但特征不为 0 的域，也可能是无限域[12]。

假设 $\mathrm{char}(K) = 0$，那么在同构的意义下有 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq K$。环 K 是有限生成的意思是说它作为 $\mathbb{Z}$-代数是有限生成的，因此它作为 $\mathbb{Q}$-代数也是有限生成的，因为 K 是域，由命题 7.9 知 K 是 $\mathbb{Q}$ 的有限代数扩张，那么它作为 $\mathbb{Q}$-模也是有限生成的。由命题 7.8，$\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Z}$-代数是有限生成的，矛盾。

所以 $\mathrm{char}(K) = p > 0$，那么 p 是素数，既然环 K 作为 $\mathbb{Z}$-代数是有限生成的，那么它作为 $A = \mathbb{Z}\cdot 1$-代数也是有限生成的，而因为 $\mathrm{char}(K) = p > 0$，那么在同构的意义下，有 $A = \mathbb{Z}/(p)$，那么就可以把 K 看成有限生成的 $\mathbb{Z}/(p)$-代数，那么根据命题 7.9，K 是有限域 $\mathbb{Z}/(p)$ 的有限代数扩张，所以它是有限域。

7.9 设 A 是环，适合：(1) 对 A 的每个极大理想 m，局部环 A_m 是 Noether 环；(2) 对 A 中每个 $x \neq 0$，A 中含 x 的极大理想的集合是有限集。证明 A 是 Noether 环。

只需要证明 A 的每个理想都是有限生成的。分两步证明。

7.9.1

设 a 是 A 中的一个非零理想，而根据题设 (2)，显然包含 a 的极大理想也是有限个的，所以我们可以设 $m_1, \ldots, m_r \supseteq a$ 是全部包含 a 的极大理想，接着，取 a 中的一个非零元 x_0，令 $m_1, \ldots, m_{r+s}$ 是全部含有 x_0 的极大理想。也就是说，$m_{r+1}, \ldots, m_{r+s}$ 是不包含 a 的，那么存在 $x_j \in a, x_j \notin m_{r+j} (1 \leq j \leq s)$。

设 m 是 A 的任意极大理想，记 $S_m = A \backslash m$。由于每个 $A_{m_i} (1 \leq i \leq r)$ 都是 Noether 环，a 在 A_{m_i} 中的扩理想 $S_{m_i}^{-1}a$ 是有限生成的，即存在生成元 $x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{t_i,i} \in a$，使得 $x_{1,i}/y_{1,i}, x_{2,i}/y_{2,i}, \ldots, x_{t_i,i}/y_{t_i,i} \in A_{m_i}$ 生成 $S_{m_i}^{-1}a$，我们把所有 $S_{m_i}^{-1}a$ 的生成元的分子合并在一起，记为 $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_t$。那么考虑理想 $a_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_t)$，显然它是有限生成的，而且 $a_0 \subseteq a$。

7.9.2

对于 A 的任意极大理想 m，如果 $m \in \{m_1, \ldots, m_r\}$，那么根据 a_0 的构造，$S_m^{-1}a_0$ 已经包含了 $S_m^{-1}a$ 的所有生成元，因此显然有 $S_m^{-1}a_0 \supseteq S_m^{-1}a$，而根据 $a_0 \subseteq a$，那么 $S_m^{-1}a_0 \subseteq S_m^{-1}a$，所以 $S_m^{-1}a_0 = S_m^{-1}a$；如果 $m \in \{m_{r+1}, \ldots, m_{r+s}\}$，那么 $x_{r+j} \in S_{m_{r+j}} \cap a$ 且 $x_{r+j} \in S_{m_{r+j}} \cap a_0$，这表明 $S_m^{-1}a = (1) = S_m^{-1}a_0$；如果 $x_0 \notin m$，则 $x_0 \in S_m \cap a$ 且 $x_0 \in S_m \cap a_0$，那么 $S_m^{-1}a = (1) = S_m^{-1}a_0$。

这就是说，考虑嵌入 $\phi: a_0 \to a$，则它显然是单的。而根据上面的讨论，对于任意的极大理想 m，$\phi_m: S_m^{-1}a_0 \to S_m^{-1}a$ 都是满的，因此根据命题 3.9.iii 和 3.9.i，ϕ 也是满的，即 ϕ 是同构。那么 $a_0 = a$，这表明 a 是有限生成的。

---

[12] 比如考虑二元域 $\mathbb{Z}_2$，定义 $\mathbb{F}_n = \mathbb{Z}_2[x]/(x^n + x + 1)$，那么它就是 2^n 元域，但特征还是为 2，考虑 $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$，那么它是一个无限域，但特征还是 2。

7.11 设 A 是环，并设它的每个局部环 A_p 是 Noether 环，问 A 是否一定是 Noether 环?

不一定。

考虑有限域 $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$，考虑 $A=(\mathbb{Z}_2)^\infty$，将 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 看成是它的理想 $\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2\times 0$（$n$ 个 $\mathbb{Z}_2$），那么显然

$$(\mathbb{Z}_2)\subsetneq(\mathbb{Z}_2)^2\subsetneq(\mathbb{Z}_2)^3\subsetneq\dots$$

因此 A 不是 Noether 环。

显然在 A 中有 $x^2=x$，根据第一章课后习题 7，A 的所有素理想都极大，这表明 A 的大根 $\mathfrak{R}_A$ 等于 A 的小根 $\mathfrak{N}_A$，而不难发现，A 的幂零元只有 0，因此 $\mathfrak{R}_A=\mathfrak{N}_A=0$。

设 p 是 A 中的一个素理想，那么 A_p 是局部环，并且 $x=x^2$ 在 A_p 中是保持的，因此 A_p 的所有素理想都极大，但 A_p 只有一个极大理想，这表明 $\mathfrak{R}_{A_p}=\mathfrak{N}_{A_p}$ 就是它唯一的极大理想，根据 3.12，$\mathfrak{N}_{A_p}=(\mathfrak{N}_A)_p=0$，也就是说 A_p 只有 0 这个极大理想，那么 A_p 是域，所以它是 Noether 环。

7.18 设 A 是 Noether 环，p 是 A 的素理想，M 是有限生成 A-模。

7.18.1 证明下述断言等价：i) 在 M 中 p 属于 0；ii) 存在 $x\in M$，使 $\mathbf{Ann}(x)=p$；iii) 存在 M 的一个子模与 A/p 同构。

本题的证明顺序是 i) ⇔ ii) ⇔ iii)，其中 i) ⇔ ii) 需要用到模的准素分解这一概念，它在第四章的课后习题 20-23 引入了，并且在本章的课后习题 17 中进一步讨论，证明参考命题 7.17 即可。下面只给出 ii) ⇔ iii) 的证明。

ii) ⇒ iii)：考虑 A 到 Ax 的同态 $\phi_x: a\to ax$，显然这是个满射，于是 $A/\mathrm{Ker}(\phi_x)\cong Ax$，而 $\mathrm{Ker}(\phi_x)=\mathrm{Ann}(x)=p$，所以 A/p 同构于子模 xA。

iii) ⇒ ii)：如果 A/p 同构于 M 的子模，那么直接把 A/p 当作 M 的子模，存在嵌入映射 $\phi: A/p\to M$，那么存在 $\bar{1}=1+p\in M$，使得 $p=\mathrm{Ann}(\bar{1})$。

7.18.2 推出存在子模链 $0=M_0\subsetneq M_1\subsetneq\cdots\subsetneq M_r\subsetneq M$ 使得每个商模 M_i/M_{i-1} 形如 A/p_i，这里 p_i 是 A 的素理想。

为了构造这样的子模，设 p_1 是属于 0_M 的素理想，根据 iii)，$M_1=A/p_1$ 是 M 的子模，所以我们有子模链

$$0=M_0\subsetneq M_1$$

假设我们已经有 M 的子模链

$$0=M_0\subsetneq M_1\subsetneq\cdots\subsetneq M_n\neq M$$

满足 $M_i/M_{i-1}\cong A/p_i$，并且 $M_n\subsetneq M$。根据命题 6.5，M/M_n 还是 Noether A-模，那么我们可以找到 p_{n+1} 是属于 $0_{M/M_n}$ 的素理想，根据 iii) 知 $M'_{n+1}=A/p_{n+1}$ 是 M/M_n 的子模，且 p_{n+1} 是 A 的素理想，所以 $M'_{n+1}\neq 0$，那么存在 M 的子模 $M_{n+1}\supsetneq M_n$ 使得 $A/p_{n+1}=M_{n+1}/M_n$。也就是说，我们能找到更长的子链：

$$0=M_0\subsetneq M_1\subsetneq\cdots\subsetneq M_n\subsetneq M_{n+1}$$

所以这个子模链是可以一直构造下去的。但是因为 M 是 Noether A-模，所以这个链在有限步后终止于 M'。根据链的构造方法，当且仅当 M/M' 是零模时构造会终止，因此 $M = M'$，那么我们可以得到满足题目的子模链

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r \subsetneq M$$

8 Artin 环

8.3 设 k 是一域，A 是有限生成 k-代数。证明下列陈述等价：i) A 是 Artin 环；ii) A 是一个有限 k-代数。

8.3.1

i) $\Rightarrow$ ii)：因为 A 是 Artin 环，因此根据定理 8.7，存在有限个局部 Artin 环 $A_1, \ldots, A_n$，使得

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

因为 A 是有限生成的 k-代数，所以每个 A_i 也都是有限生成的 k-代数，那么只需要证明每个 A_i 都是有限 k-代数，即每个 A_i 都是 k 上的有限维向量空间。

设 m_i 是 A_i 的极大理想，考虑剩余类域 $F_i = A_i/m_i$，显然 F_i 也是有限生成的 k-代数，那么根据 5.24，F_i 是 k 的有限代数扩张，也就是说作为 k 上的向量空间，$\dim_k F_i$ 是有限的。因为 A_i 是 Artin 环，所以也是 Noether 环；此外，A_i 作为 A_i-模显然是有限生成的（由 1 生成），那么根据第七章课后习题 18，存在 A_i 的子模链：

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = A_i$$

使得 $M_j/M_{j-1} \cong A_i/p_j$，$p_j$ 是 A_i 的素理想，但因为 A_i 是局部环，只有一个素理想 m_i，因此 $M_j/M_{j-1} \cong A_i/m_i = F_i$，于是我们得到正合序列

$$0 \to M_{j-1} \xrightarrow{\text{incl}} M_j \xrightarrow{\text{自然同态}} F_i \to 0$$

注意到各个 M_i 是 A_i 作为 A_i-模的子模，因此实际上它们都是 A_i 的理想（也是子环），所以它们也是 k 上的向量空间，于是根据命题 6.9，我们有

$$\dim_k M_j = \dim_k M_{j-1} + \dim_k F_i$$

对于 $\dim_k M_j$ 来说，这是个等差数列，因此

$$\dim_k M_j = \dim_k 0 + j \dim_k F_i = j \dim_k F_i \;\Rightarrow \dim_k A_i = r \dim_k F_i$$

所以 A_i 是有限的。由 A_i 的任意性，得到 A 是有限 k-代数。

8.3.2

ii) $\Rightarrow$ i)：A 是有限 k-代数，也就是说 A 作为 k 上的向量空间是有限维的，那么根据命题 6.10，A 作为 k-模满足降链条件，即 A 的每个 k-子模降链是稳定的。而 A 作为 A-模，它的每个 A-子模也就是它的理想（也是子环），显然也是 k-子模，那么 A 的每个 A-子模降链也都是 k-子模降链，故也是稳定的，即 A 作为 A-模也满足降链条件，因此 A 是 Artin 环。

8.6 设 A 是一 Noether 环，q 是 A 中一个 p-准素理想。考虑从 q 到 p 的准素理想链，证明所有这种链都具有限有界长度，并且所有极大链的长度都相同。

注意，本题的链的条件是以 q 开始，以 p 终止，这里的 q 是事先给定的，也就是说下面的有限、有界、常数，都是对于特定的 q 而言。本题需要证明三点：1、证明每个链的长度是有限的；2、证明所有链的长度有上界；3、证明所有极大链的长度为一个常数。

8.6.1

考虑 A 的准素理想链：

$$q = q_0 \subsetneq q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq q_n = p$$

过渡到商环 $B = A/q$，则根据命题 1.1，B 中的理想与 A 中包含 q 的理想一一对应，并且根据命题 4.7，q_i 在 A 中 p-准素，那么 $\bar{q}_i = q_i/q$ 也在 B 中 $\bar{p}$-准素，所以我们得到准素理想链：

$$0 = \bar{q}_0 \subsetneq \bar{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \bar{q}_n = p/q = \bar{p}$$

8.6.2

因为 $\bar{p}$ 是 B 中的素理想，记 $S = B\backslash\bar{p}$，我们可以考虑局部环 $S^{-1}B = B_{\bar{p}}$，显然 $S \cap \bar{p} = \emptyset$，因此根据命题 4.8，$S^{-1}\bar{q}_i$ 是 $B_{\bar{p}}$ 中的 $S^{-1}\bar{p}$-准素理想，那么得到准素理想链：

$$0 = S^{-1}\bar{q}_0 \subsetneq S^{-1}\bar{q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq S^{-1}\bar{q}_n = S^{-1}\bar{p}$$

8.6.3

不难证明 $m = S^{-1}\bar{p}$ 是局部环 $B_{\bar{q}}$ 唯一的极大理想。根据命题 7.1 和 7.4，因为 A 是 Noether 环，所以 $B_{\bar{p}}$ 也是 Noether 环；而根据命题 7.14，存在常数 N，使得 $m^N = (\sqrt{0})^N \subseteq 0$，也就是 $m^N = 0$，根据命题 8.6，$B_{\bar{p}}$ 是 Artin 环。那么对于 $B_{\bar{p}}$ 的任意理想 b，都有 $m^N = 0 \subseteq b \subseteq m$，因此根据 7.16.i 和 iii，$b$ 是 m-准素的，也就是说 $B_{\bar{p}}$ 的任意理想都是 m-准素的。

8.6.4

这样，我们将 A 的从 q 到 p 的准素理想链转化为 $B_{\bar{p}}$ 的准素理想链，并且具有两个良好性质：1、$B_{\bar{p}}$ 既是 Noether 环，又是 Artin 环；2、$B_{\bar{p}}$ 的任意理想都是准素的。根据这两点，问题就转化为了 $B_{\bar{p}}$ 中的理想链问题（去掉了“准素”这个约束），根据命题 6.8，$B_{\bar{p}}$ 有合成列，这对应于 A 中的极大的准素理想链，根据命题 6.7，其长度是有限的、固定的。于是三点都得证：1、每个准素理想链的长度是有限的；2、所有准素理想链的长度有上界；3、所有极大的准素理想链的长度为一个常数。

9 离散赋值环和 Dedekind 环

9.2 设 A 是 Dedekind 整环，如果 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 是系数在 A 中的多项式。f 的容度 (content) 是 A 中理想 $c(f) = (a_0, \ldots, a_n)$。证明 Gauss 引理：$c(fg) = c(f)c(g)$。

设 $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$，那么

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots + a_nb_mx^{n+m}$$

9.2.1

首先，可以证明对于任意环 A，都有

$$c(fg) \subseteq c(f)c(g)$$

因为我们有

$$c(fg) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) \subseteq (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$
$$c(fg) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, a_nb_m) \subseteq (b_0, b_1, \ldots, b_n)$$

因此

$$c(fg) \subseteq (a_0, a_1, \ldots, a_n)(b_0, b_1, \ldots, b_n) = c(f)c(g)$$

9.2.2

下面要证 $c(f)c(g) \subseteq c(fg)$。设 m 是 A 的极大理想，那么考虑局部环 A_m，根据定理 9.3，A_m 是离散赋值环，设 v 是它的赋值。留意到 A 的维数和 Noether 性质在 A_m 中依然保留，因此根据命题 9.2.iii，A_m 的极大理想 m_m 是主理想，记为 $m_m = (\alpha)$，同时根据命题 9.2.v，A_m 的每个理想都是 (α) 的幂，也就是每个理想都能写成 (α^k) 的形式。

在局部环 A_m 中考虑 f, g，记为 f_m, g_m，不妨设 $c(f_m) = (\alpha^s), c(g_m) = (\alpha^t), c(f_mg_m) = (\alpha^r)$，那么 $c(f_m)c(g_m) = (\alpha^{s+t})$，如果 $c(f_mg_m) \subsetneq c(f_m)c(g_m)$，则 $r > s + t$。令 a_i 是 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 中第一项满足 $v(a_i) = sv(\alpha)$ 的元素[13]，同理设 b_j 是 $b_0, b_1, \ldots, b_m$ 中第一项满足 $v(b_j) = tv(\alpha)$ 的元素，那么考虑 f_mg_m 中的 x^{i+j} 的系数：

$$c_{i+j} = a_0b_{i+j} + \cdots + a_ib_j + \cdots + a_{i+j}b_0$$

或者改写为：

$$a_ib_j = c_{i+j} - a_0b_{i+j} - \cdots - a_{i-1}b_{j+1} - a_{i+1}b_{j-1} - \cdots - a_{i+j}b_0$$

两边取赋值，左边为

$$v(a_ib_j) = v(a_i) + (b_j) = (s + t)v(\alpha)$$

因为 $c_{i+j} \in c(f_mg_m)$，所以有 $v(c_{i+j}) \geq rv(\alpha) \geq (s + t + 1)v(\alpha)$，而根据 a_i, b_j 的选择，我们可以得到 $v(a_kb_{i+j-k}) = v(a_k) + v(b_{i+j-k}) \geq (s + t + 1)v(\alpha), 0 \leq k \leq i + j, k \neq i$，所以右边为

$$v\Big(c_{i+j} - a_0b_{i+j} - \cdots - a_{i-1}b_{j+1} - a_{i+1}b_{j-1} - \cdots - a_{i+j}b_0\Big) \geq (s + t + 1)v(\alpha)$$

---

[13] 根据 v 的定义，我们有 $v(a_i) \geq v(\alpha^s) = sv(\alpha)$，也就是说，$v(a_i)$ 总是不小于 $sv(\alpha)$。

即

$$(s+t)v(\alpha) \geq (s+t+1)v(\alpha)$$

根据离散赋值环的性质，$v(\alpha) > 0$，所以上式是矛盾的。

因此有 $c(f_m g_m) = c(f_m)c(g_m)$[14]。

9.2.3

那么

$$\begin{aligned}\Big(c(fg)\Big)_m =& c(f_m g_m) = c(f_m)c(g_m) \\ =& \Big(c(f)\Big)_m \Big(c(g)\Big)_m \\ \xlongequal{\text{命题 3.11.v}} & \Big(c(f)c(g)\Big)_m\end{aligned}$$

由于成立 $c(fg) \subseteq c(f)c(g)$，那么可以考虑嵌入映射 $\phi : c(fg) \to c(f)c(g)$，它是单的。而由上式、$m$ 的任意性以及命题 3.9，ϕ 是满的，所以

$$c(fg) = c(f)c(g)$$

9.3 一个赋值环（不是域）是 Noether 环当且仅当它是离散赋值环。

首先，根据命题 9.2 前面的讨论，一个离散赋值环必然是 Noether 局部整环，所以 $\Leftarrow$ 是显然的。

然后，对于 $\Rightarrow$，可以利用命题 9.2.i 和 iii。首先，根据命题 5.18，A 是赋值环所以是局部整环，设 m 是它的极大理想。同时 A 是一个 Noether 环，那么根据命题 6.2，它的任意理想 a 是有限生成的，所以可设 $a = (x_1, \dots, x_n), x_i \in A$，根据第五章课后习题 28，因为 A 是赋值环，所以对于 A 的理想 (x_i) 和 (x_j)，有 $(x_i) \subseteq (x_j)$ 或者 $(x_j) \subseteq (x_i)$，所以 $(x_i, x_j) = (x_i)$ 或者 $(x_i, x_j) = (x_j)$。这表明 $a = (x_k)$, 对于某个 $x_k \in \{x_1, \dots, x_n\}$，也就是说，$A$ 的每个理想都是主理想，自然 m 也是主理想，记为 $(\alpha), \alpha \in A$，因为 A 不是域，所以 $\alpha \neq 0$。

设有素理想 $(\beta) \subsetneq (\alpha)$，则存在 γ 使得 $\alpha\gamma = \beta \in (\beta)$，但 (β) 是素理想，因此 $\gamma \in (\beta)$，因此存在 γ' 使得 $\gamma = \beta\gamma'$，或者 $\beta = \alpha\gamma = \beta\alpha\gamma'$，即 $(1-\alpha\gamma')\beta = 0$，因为 α 不是可逆元，因此 $1-\alpha\gamma' \neq 0$，并且 A 是整环，所以 $\beta = 0$。所以 A 只有素理想链

$$0 \subsetneq m$$

所以 $\dim A = 1$。现在命题 9.2 所有的条件都已经满足，因此根据命题 9.2.i 和 iii，A 是离散赋值环。

9.4 设 A 是一个局部整环，A 不是域，而它的极大理想 m 是主理想且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} m^n = 0$。证明 A 是离散赋值环。

我们直接在 A 上构造一个赋值即可。

[14]事实上，通过给出一个具体的赋值，会使得证明更为通俗（但证明更加长了）。

我们可以证明每个 $x \in A_m$ 都可以唯一表示成 $\beta\alpha^t$ 的形式，其中 β 是 A_m 中的可逆元，而 t 是非负整数或者 ∞，那么 $v : x \to t$ 就是一个赋值。证明如下：首先我们有 $\alpha^\infty = 0$，否则设 $\alpha^\infty \neq 0$，考虑理想 (α^∞)，根据命题 9.2，存在 $k \geq 0$，使得 $(\alpha^k) = (\alpha^\infty)$，那就意味着存在 $y \in A_m$ 使得 $y\alpha^\infty = \alpha^k$，所以 $\alpha^k(1-\alpha^\infty y) = 0$，因为 A_m 是整环，所以 $1 = \alpha^\infty y$，矛盾。有了这一点，剩下的过程就跟第九章课后习题 4 一致了，不再赘述。

有了这个具体的赋值后，我们可以直接在下面的讨论中，不使用抽象的赋值 v，而是直接说 a_i, b_i, c_i 对 α^k 的整除性，这就直接跟 $\mathbb{Z}$ 上的高斯引理等同起来了。

A 是一个局部环，所以 A 只有 $m = (\alpha), \alpha \neq 0$ 一个极大理想，那么 m 已经包含了 A 的所有不可逆元。而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} m^n = 0$ 表明 A 的非零元只包含 α 的有限次幂。于是我们可以证明 A 中的每个元素都可以表示为 $\beta\alpha^t$ 这样的形式，其中 $\beta \in A$ 是可逆元，而 $t \geq 0$ 是非负整数，并且定义 $\alpha^\infty = 0$。若否，则设 $\beta\alpha^t \in A$，其中 β 不是可逆元，也不含有 α 的幂，但因为 β 不是可逆元，因此 $\beta \in m = (\alpha)$，所以存在 $\gamma \in A$ 使得 $\beta = \alpha\gamma$，矛盾。

现在考虑 A 的分式域 K，那么 $\forall x/y \in K$，其中 $x, y \in A$，我们有 $x = \beta_x\alpha^{t_x}, y = \beta_y\alpha^{t_y}$，所以 $x/y = \beta_x\beta_y^{-1}\alpha^{t_x - t_y}$，也就是说，$K$ 中的任意元素，都可以表示成 $\beta\alpha^t$ 这样的形式，其中其中 $\beta \in A$ 是可逆元，而 $t \in \mathbb{Z}$。

所以我们可以考虑 K 到 $\mathbb{Z}$ 的映射 $v : \beta\alpha^t \to t$，β 是 A 中可逆元。v 是良好定义的，因为 $\beta_1\alpha^{t_1} = \beta_2\alpha^{t_2}, t_2 \geq t_1$ 推出 $0 = (\beta_1 - \beta_2\alpha^{t_2 - t_1})\alpha^{t_1}$，其中 $\alpha \neq 0$，而 K 是域，所以 $\beta_1 = \beta_2\alpha^{t_2 - t_1}$，但 $t_2 > t_1$ 时，右端是不可逆的，因此只能 $t_1 = t_2, \beta_1 = \beta_2$。

显然

$$
\begin{aligned}
v(\beta_1\alpha^{t_1}\beta_2\alpha^{t_2}) &= t_1 + t_2 = v(\beta_1\alpha^{t_1}) + v(\beta_2\alpha^{t_2}) \\
v(\beta_1\alpha^{t_1} + \beta_2\alpha^{t_2}) &= v\Big((\beta_1 + \beta_2\alpha^{t_2 - t_1})\alpha^{t_1}\Big) \\
&\geq t_1 \qquad (t_2 \geq t_1) \\
&= v(\beta_1\alpha^{t_1})
\end{aligned}
$$

根据定义，v 是 K 的一个赋值，而 $A = \{x | x \in K, v(x) \geq 0\}$，因此根据定义 A 是 K 中 v 的赋值环。

9.7 设 A 是 Dedekind 整环，而 $a \neq 0$ 是 A 中的一个理想。

9.7.1 证明：A/a 中每个理想都是主理想；

先来证明一个引理：*设 a 是题设中 A 的一个理想，那么存在两两互素的素理想 $p_1, \ldots, p_r$ 使得 $a = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$，如果 I 是 A 中包含 a 的理想，那么 I 可以唯一分解成 $p_1^{n_1'} \ldots p_r^{n_r'}$，其中 $0 \leq n_i' \leq n_i, \forall 0 \leq i \leq r$。*

证明：因为 A 是 Dedekind 整环，所以 I 可以唯一分解成 $p_1^{n_1'} \ldots p_r^{n_r'} p_{r+1}^{n_{r+1}'} \ldots p_s^{n_s'}$，其中 $p_1, \ldots, p_r, p_{r+1}, \ldots, p_s$ 是两两互素的，所以根据命题 1.16，$p_1^{n_1'}, \ldots, p_r^{n_r'}, p_{r+1}^{n_{r+1}'}, \ldots, p_s^{n_s'}$ 是两两互素的，所以 $I = p_1^{n_1'} \cap \cdots \cap p_r^{n_r'} \cap p_{r+1}^{n_{r+1}'} \cap \cdots \cap p_s^{n_s'}$ 以及 $a = p_1^{n_1} \cap \cdots \cap p_r^{n_r}$，那么

$$
a = a \cap I = p_1^{\max(n_1', n_1)} \cap \cdots \cap p_r^{\max(n_r', n_r)} \cap p_{r+1}^{n_{r+1}'} \cap \cdots \cap p_s^{n_s'}
$$

根据分解的唯一性，有

$$
\begin{aligned}
&n_1 = \max(n_1', n_1), \ldots, n_r = \max(n_r', n_r) \\
&n_{r+1}' = \cdots = n_s' = 0
\end{aligned}
$$

引理证毕。

9.7.2

设 a 是 A 的一个理想，那么存在两两互素的素理想 $p_1, \ldots, p_r$ 使得 $a = p_1^{n_1} \ldots p_r^{n_r}$，那么有同构

$$
A/a \cong \prod_{i=1}^{r} A/p^{n_i}
$$

证明：由 1.16 知 $p_i^{n_i}/a$ 是两两互素的，那么

$$\bigcap_{i=1}^{r} p_i^{n_i}/a = p_1^{n_i}/a \ldots p_r^{n_r}/a = 0$$

因此根据命题 1.10，映射

$$A/a \to \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{A/a}{p_i^{n_i}/a} \right) \cong \prod_{i=1}^{r} A/p_i^{n_i}$$

是同构，这就证明了

$$A/a \cong \prod_{i=1}^{r} A/p_i^{n_i}$$

9.7.3

接着只需要证明 $A/p_i^{n_i}$ 都是主理想环，那么就可以证明 A/a 是主理想环。设 $I/p_i^{n_i}$ 是 $A/p_i^{n_i}$ 的一个理想，那么 I 是 A 中包含 $p_i^{n_i}$ 的理想，根据引理得 $I = p_i^k, 1 \leq k \leq n_i$，即 I 都是 p_i 的幂。

如果 $p_i/p_i^{n_i} = p_i^2/p_i^{n_i}$，那么 $p_i^3/p_i^{n_i} = p_i(p_i^2/p_i^{n_i}) = p_i(p_i/p_i^{n_i}) = p_i^2/p_i^{n_i} = p_i/p_i^{n_i}$，逐步递推得到 $0 = p_i^{n_i}/p_i^{n_i} = p_i/p_i^{n_i}$，那么 $n_i = 1$，A/p_i 是个域，它的理想只有 0 和 (1)；如果 $p_i/p_i^{n_i} \neq p_i^2/p_i^{n_i}$，那么可以找到 $\alpha \in (p_i/p_i^{n_i}) \backslash (p_i^2/p_i^{n_i})$，那么 $(\alpha) \subseteq (p_i/p_i^{n_i})$，但 (α) 又不是 $p_i^k/p_i^{n_i}, k \geq 2$ 的子集（因为如果 $k \geq 2$，那么 $\alpha \in p_i^k/p_i^{n_i} \subseteq p_i^2/p_i^{n_i}$ 导出矛盾。）。但前一步已经表明 $A/p_i^{n_i}$ 的理想都是 $p_i^k/p_i^{n_i}$ 形势，所以只能有 $(\alpha) = (p_i/p_i^{n_i})$，那么 $(\alpha^k) = (p_i^k/p_i^{n_i})$，即它的所有理想都是主理想。

因此，A/a 是主理想环的直积，因此它也是主理想环，即每个理想都是主理想[15]。

9.7.4 由此导出，A 中每个理想至多可由 2 个元素生成。

如果理想 c 不是 A 中的主理想，选择 c 的一个非零元 $x \in c$，考虑 $A/(x)$ 中的理想 $c/(x)$，根据已证部分，$c/(x)$ 是主理想，也就存存在 $y \in c$，使得 $\Big(y + (x)\Big) = c/(x)$，即 $(y)/(x) = c/(x)$，这表明 $c = (x, y)$，即 c 由两个生成元生成。

[15]直积的元素集合是一个理想，充分必要条件是每个维度都是理想。