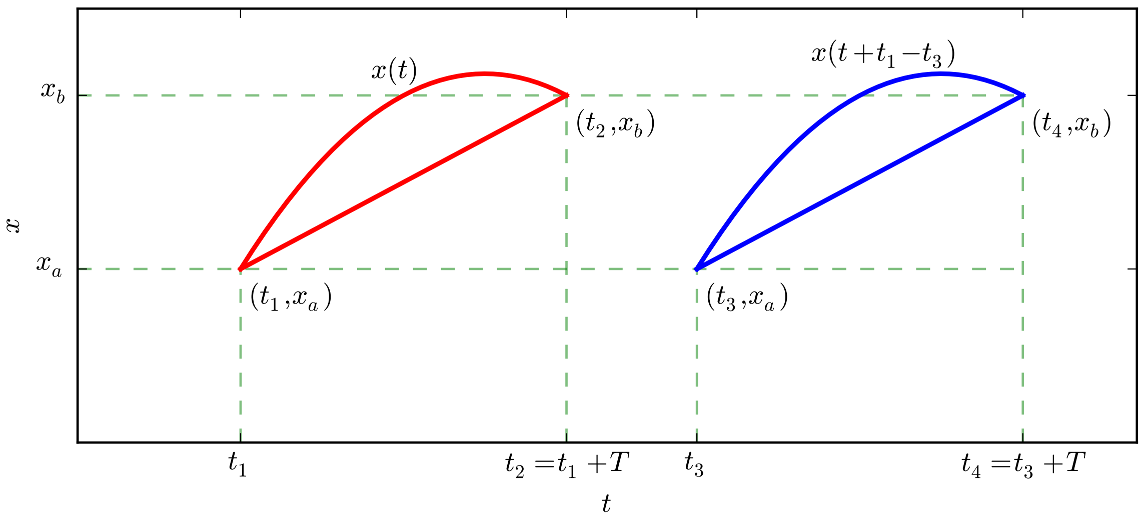

《量子力学与路径积分》习题解答

作者： 苏剑林

版本： V0.1

网址： http://spaces.ac.cn

路径积分习题解答 V0.1

苏剑林

科学空间：http://spaces.ac.cn

2015 年 9 月 14 日

目录

1 第二章 量子力学的运动规律

1.1 2-1 经典作用量

1.1.1 问题 2-1

一个自由粒子，其 $L = m\dot{x}^2/2$。证明自由粒子的经典运动所对应的作用量 S_{cl} 为

$$S_{cl} = \frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \qquad (2-8)$$

参考答案：

作用量 $\int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t)dt$ 是关于 $x \equiv x(t)$ 的一个泛函，而所谓经典作用量，就是找出粒子的经典路径 x_{cl}，然后再代入作用量的表达式中去。

对于自由粒子，将 L 代入欧拉 -拉格朗日方程（即 (2-7) 式）得到 $m\ddot{x} = 0$，从而经典运动路径为 $x_{cl}(t) = c_1 t + c_2$，c_1, c_2 是待定常数，常数由边界条件 $x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$ 来确定。最终结果是

$$x_{cl}(t) = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a}\right)t + \frac{t_b x_a - t_a x_b}{t_b - t_a}$$

所以

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2}m\dot{x}_{cl}^2(t)dt = \frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a}$$

1.1.2 问题 2-2

一个谐振子，其 $L = (m/2)(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$。令 $T = t_b - t_a$，证明其经典作用量为

$$S_{c1} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right] \qquad (2-9)$$

参考答案：

本问题的计算思路跟问题 2-1 是一样的，只不过计算上更加复杂。为了不至于让符号太多，我们设 $m = \omega = 1$，随后我们可以通过检查量纲来恢复这两个变量。此时 $L = (\dot{x}^2 - x^2)/2$，变分得到经典运动方程 $\ddot{x} + x = 0$，其中通解包含两个待定常数，同样由边界条件 $x(t_a) = x_a, x(t_b) = x_b$ 来确定。

已经知道对于任意常数 c，$\sin(t + c)$ 都是 $\ddot{x} + x = 0$ 的解，因此考虑到边界条件，我们使用如下格式的通解

$$x_{cl}(t) = c_1\sin(t - t_a) + c_2\sin(t - t_b)$$

该通解在边界点时只有一个常数，因此可以方便地确定两个常数：

$$c_1 = \frac{x_b}{\sin(t_b - t_a)}$$
$$c_2 = \frac{x_a}{\sin(t_a - t_b)}$$

为了算 S_{c1}，我们可以使用分部积分法：

$$\begin{aligned}
S_{c1} &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2}(\dot{x}_{cl}^2 - x_{cl}^2)dt \\
&= \frac{1}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}(\ddot{x}_{cl} + x_{cl})\,dt \\
&= \frac{1}{2}x_{cl}\dot{x}_{cl}\Big|_{t_a}^{t_b} \\
&= \frac{1}{2}x_b\ \dot{x}_{cl}\big|_{t_b} - \frac{1}{2}x_a\ \dot{x}_{cl}\big|_{t_a}
\end{aligned}$$

其中由于经典运动方程 $\ddot{x}_{cl} + x_{cl} = 0$，所以 $\frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}(\ddot{x}_{cl} + x_{cl})\,dt = 0$。这样一来我们就免除了再次进行积分运算。将 $x_{cl}(t)$ 的表达式代入上式，得到

$$S_{c1} = \frac{1}{2\sin T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos T - 2x_a x_b\right]$$

最后我们来把 m 和 ω 恢复，这只需要检查量纲。首先留意 sin 和 cos 部分，三角函数的自变量必须是无量纲的，而目前是时间 T，为了将其变成无量纲的，只需要乘上角速度 ω，因为角速度的量纲是“时间$^{-1}$”。其次，L 是具有能量量纲的，因此作用量 S 量纲是能量量纲乘上时间量纲，也就是“质量 $\times$ 长度^2/时间”。方括号只是长度的平方，因此，需要在外边乘上 $m\omega$（这是一个量纲为“质量/时间”的量），所以，得到

$$S_{c1} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right]$$

1.1.3　问题 2-3

求出常力 f 作用下的一个粒子的 S_{cl}，其拉氏量为 $L = m\dot{x}^2/2 + fx$。

参考答案：

同样，我们设 $m = f = 1$，最后再来恢复它，我们应当熟悉这种方法，它能给我们带来方便。此时，$L = \dot{x}^2/2 + x$，变分作用量，得到经典运动方程 $\ddot{x} = 1$。积分之，可以得到通解

$$x_{cl}(t) = \frac{1}{2}t^2 + c_1 t + c_2$$

这启示我们，可以设 $x_{cl} = y_{cl} + \frac{1}{2}t^2$，或许可以将问题转化为自由粒子的情况。事实正是如此，我们有

$$\begin{aligned}
S_{c1} &= \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + x\right)dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{1}{2}(\dot{y}_{cl} + t)^2 + \left(y_{cl} + \frac{1}{2}t^2\right)\right]dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{1}{2}\dot{y}_{cl}^2 + t^2 + \underbrace{(y_{cl} + t\dot{y}_{cl})}_{\frac{d}{dt}(ty_{cl})}\right]dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b}\frac{1}{2}\dot{y}_{cl}^2 dt + \frac{1}{3}t^3\Big|_{t_a}^{t_b} + ty_{cl}\big|_{t_a}^{t_b} \\
&= \int_{t_a}^{t_b}\frac{1}{2}\dot{y}_{cl}^2 dt + \frac{1}{3}(t_b^3 - t_a^3) + (t_b y_b - t_a y_a)
\end{aligned}$$

根据我们的设定，$y_a = x_a - \frac{1}{2}t_a^2$, $y_b = x_b - \frac{1}{2}t_b^2$。上式第一项正是自由粒子的作用量，根据问题 2-1，它等于

$$\frac{1}{2}\frac{(y_b-y_a)^2}{t_b-t_a} = \frac{1}{2}\frac{[(x_b-x_a)-\frac{1}{2}(t_b^2-t_a^2)]^2}{t_b-t_a}$$

所以最终结果是

$$\begin{aligned}
S_{cl} &= \frac{1}{2}\frac{[(x_b-x_a)-\frac{1}{2}(t_b^2-t_a^2)]^2}{t_b-t_a} + \frac{1}{3}(t_b^3-t_a^3) + \left[t_b\left(x_b-\frac{1}{2}t_b^2\right) - t_a\left(x_a-\frac{1}{2}t_a^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{[(x_b-x_a)-\frac{1}{6}(t_b^2-t_a^2)]^2}{t_b-t_a} - \frac{1}{3}(t_b^3-t_a^3) + (t_bx_b-t_ax_a) \\
&= \frac{(x_b-x_a)^2}{2T} + \frac{T(x_a+x_b)}{2} - \frac{T^3}{24}
\end{aligned}$$

其中 $T = t_b - t_a$，我们以后经常会使用这个代换。恢复 m, f 后的结果为

$$S_{cl} = \frac{m(x_b-x_a)^2}{2T} + \frac{fT(x_a+x_b)}{2} - \frac{f^2T^3}{24m}$$

1.1.4 问题 2-4

按照经典力学，动量定义为

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \tag{2-10}$$

证明端点的动量为

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_b} = \frac{\partial S_{cl}}{\partial x_b} \tag{2-11}$$

以及

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_a} = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial x_a}$$

参考答案：

这个问题相当于把 x_b 换成随时变化的 x，也就是说，我们考虑

$$S_{cl}(x) = \int_{t_a}^{t_b} L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)dt, \quad x(t_a) = x_a, x(t_b) = x$$

对 x 求导：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}S_{cl}(x) &= \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial \dot{x}_{cl}}{\partial x}\right)dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial x_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}dt + \int_{t_a}^{t_b}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}d\left(\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}\right) \quad \text{(接着对后一项用分部积分)} \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}\bigg|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right)}_{\text{请回忆“欧拉-拉格朗日方程”}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}dt \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial x}\bigg|_{t_a}^{t_b} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial (x_{cl}|_{t_a}^{t_b})}{\partial x} \quad \text{(这一步是因为 } t_a, t_b, x_a, x \text{ 之间是相互独立的)} \\
&= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial (x-x_a)}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}
\end{aligned}$$

从而

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)_{x=x_b} = \frac{\partial S_{cl}}{\partial x_b}$$

类似可证后一式子。

1.1.5 问题 2-5

按经典力学，能量定义为

$$E = \dot{x}p - L \tag{2-12}$$

证明端点 b 能量的表达式为

$$\left(\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L\right)\bigg|_{x=x_b} = -\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_b} \tag{2-13}$$

以及相应地在端点 a 的能量是 $\frac{\partial S_{cl}}{\partial t_a}$。

参考答案：

与问题 2-4 类似，考虑 t_b 为任意变化的 τ 时，$S_{cl}(\tau)$ 的导数。

$$S_{cl}(\tau) = \int_{t_a}^{\tau} L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)dt, \quad x(t_a) = x_a, x(\tau) = x_b$$

所以（下面的 L 表示 $L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t)|_{t=\tau}$）

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau}S_{cl}(\tau) &= L + \int_{t_a}^{\tau} \frac{\partial L}{\partial \tau}dt \quad (\text{注意到 } L \text{ 也是 } \tau \text{ 的函数，因此多一偏导数项}) \\
&= L + \int_{t_a}^{\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial \dot{x}_{cl}}{\partial \tau}\right)dt \quad (\text{接着对后一项用分部积分}) \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t_a}^{\tau} + \int_{t_a}^{\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right)\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}dt \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t_a}^{\tau} \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\bigg|_{t=t_a}\frac{\partial (x_{cl}|_{t=t_a})}{\partial \tau} \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau} - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\bigg|_{t=t_a}\frac{\partial x_a}{\partial \tau} \\
&= L + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau}
\end{aligned}$$

上面的最后几步中，因为 t_a 与 τ 无关，所以可以直接交换“取 $t = t_a$”与“对 τ 求导”的顺序，但是不能直接交换“取 $t = \tau$”与“对 τ 求导”的顺序。对于任意 $f(t, \tau)$，我们有

$$\frac{df(\tau, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial t}\bigg|_{t=\tau} + \frac{\partial f(t, \tau)}{\partial \tau}\bigg|_{t=\tau}$$

从而

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\right|_{t=\tau}+\left.\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}\right|_{t=\tau} &= \frac{d}{d\tau}(x_{cl}|_{t=\tau}) \\ &= \frac{d}{d\tau}x_{cl}(\tau) \\ &= \frac{d}{d\tau}(x_b) \\ &= 0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau}S_{cl}(\tau) &= L+\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial \tau}\right|_{t=\tau} \\ &= L-\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\frac{\partial x_{cl}}{\partial t}\right|_{t=\tau} \\ &= L-\dot{x}_{cl}\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right|_{t=\tau}\end{aligned}$$

至此，$(2-13)$ 式得证。

1.2　2-2 量子力学的几率幅

1.2.1　问题 2-6

规定路径积分的泛函种类可惊人地变化。到目前为止，我们已经考虑了一些泛函，如式 $(2-15)$。这里我们要考虑另一个完全不同的类型。（待完善）

2　第三章 用一些特例阐述概念

2.1　3-1 自由粒子

2.1.1　问题 3-1

一粒子由 a 点到达 b 点的几率，按定义应该正比于传播子 $K(b,a)$ 的平方的绝对值的平方。对于自由粒子传播子式 $(3-3)$，这就是

$$P(b)dx=\frac{m}{2\pi\hbar(t_b-t_a)}dx \tag{3-6}$$

显然，这是相对几率，因为对 x 的全部区域的积分发散。这种特别的归一化意味着什么？证明，这相应于粒子在 a 点开始运动时的动量为任何值的可能性一样大的经典图像。证明粒子动量在 dp 区间先赢的相对几率是 $dp/2\pi\hbar$。

参考答案：

根据问题 2-1 和问题 2-4，自由粒子的经典动量为

$$p=\frac{\partial S_{cl}}{\partial x}=\frac{m}{2}\frac{x-x_a}{t_b-t_a}\quad (\text{这里 } x=x_b)$$

所以

$$\frac{dp}{2\pi\hbar}=\frac{m}{2\pi\hbar(t_b-t_a)}dx=P(b)dx$$

可见粒子在区间 dp 的相对几率正比于 $1/2\pi\hbar$，这是一个常数，因此这相应于粒子在 a 点开始运动时的动量为任何值的可能性一样大的经典图像，这意味着自由粒子的动量和位置都是非常不确定的。

2.1.2　问题 3-2

用代入法证明，只要 t_b 大于 t_a，自由粒子传播子 $K(b,a)$ 满足微分方程

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K(b,a)}{\partial t_b}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K(b,a)}{\partial x_b^2} \tag{3-18}$$

参考答案：

只需要依次写出：

$$\begin{aligned}
K(b,a)&=\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
\frac{\partial K(b,a)}{\partial t_b}&=\frac{\pi i}{m}\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-3/2}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
&\quad-\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)^2}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
&=\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\frac{1}{2(t_b-t_a)}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
&\quad-\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)^2}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
\frac{\partial K(b,a)}{\partial x_b}&=\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\frac{im(x_b-x_a)}{\hbar(t_b-t_a)}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
\frac{\partial^2 K(b,a)}{\partial x_b^2}&=\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\frac{im}{\hbar(t_b-t_a)}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}\\
&\quad-\left[\frac{2\pi i(t_b-t_a)}{m}\right]^{-1/2}\frac{m^2(x_b-x_a)^2}{\hbar^2(t_b-t_a)^2}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}
\end{aligned}$$

可见，除了一个常数因子外，$\frac{\partial K(b,a)}{\partial t_b}$ 与 $\frac{\partial^2 K(b,a)}{\partial x_b^2}$ 是对应相等的，所以不难证明式 $(3-18)$

2.2　3-2 通过狭缝的衍射

2.2.1　问题 3-3

将式 $(3-20)$ 中的几率幅平方，再对 x 积分，证明：通过原狭缝的几率是

$$P(\text{通过})=\frac{m}{2\pi\hbar T}2b \tag{3-35}$$

参考答案：

首先写出 $(3-20)$ 式

$$\begin{aligned}
\psi(x)=\int_{-b}^{b}&\left(\frac{2\pi i\hbar\tau}{m}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau}\right]\\
&\times\left(\frac{2\pi i\hbar T}{m}\right)^{-1/2}\exp\left[\frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T}\right]dy
\end{aligned} \tag{3-20}$$

然后有

$$
\begin{aligned}
|\psi(x)|^2 =&\psi^*(x)\psi(x)\\
=&\left(\frac{m}{2\pi\hbar\tau}\right)\left(\frac{m}{2\pi\hbar T}\right)\\
&\times\int_{-b}^{b}\exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau}\right]\exp\left[\frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T}\right]dy\\
&\times\int_{-b}^{b}\exp\left[-\frac{im(x-z)^2}{2\hbar\tau}\right]\exp\left[-\frac{im(x_0+z)^2}{2\hbar T}\right]dz
\end{aligned}
$$

为求 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx$，先对 x 积分：

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{im(x-y)^2}{2\hbar\tau}-\frac{im(x-z)^2}{2\hbar\tau}\right]dx\\
=&\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{im(z-y)x}{\hbar\tau}+\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]dx\\
=&2\pi\delta\left(\frac{m(z-y)}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]\quad\left(我们有\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx\\
=&\frac{m^2}{4\pi^2\hbar^2\tau T}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}2\pi\delta\left(\frac{m(z-y)}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]\\
&\times\exp\left[\frac{im(x_0+y)^2}{2\hbar T}\right]\exp\left[-\frac{im(x_0+z)^2}{2\hbar T}\right]dydz\\
=&\frac{m^2}{2\pi\hbar^2\tau T}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b}\delta\left(\frac{m(z-y)}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{im\left(y^2-z^2\right)}{2\hbar\tau}\right]\\
&\times\exp\left[\frac{im(y-z)x_0}{\hbar T}+\frac{im\left(z^2-y^2\right)}{2\hbar T}\right]dydz
\end{aligned}
$$

记积分区域为 D，D 包含原点。作坐标变换：

$$
\begin{cases}
u=y-z\\
v=y+z
\end{cases}
$$

其雅可比行列式为 $\frac{1}{2}$，上述积分变为

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2dx\\
=&\frac{m^2}{2\pi\hbar^2\tau T}\iint_D\delta\left(-\frac{mu}{\hbar\tau}\right)\exp\left[\frac{imuv}{2\hbar\tau}+\frac{imux_0}{\hbar T}-\frac{imuv}{2\hbar T}\right]\frac{1}{2}dudv\\
=&\frac{m}{4\pi\hbar T}\iint_D\delta\left(u\right)\exp\left[\frac{imuv}{2\hbar\tau}+\frac{imux_0}{\hbar T}-\frac{imuv}{2\hbar T}\right]dudv\\
=&\frac{m}{4\pi\hbar T}\int_{-2b}^{2b}dv\quad（由于\ \delta(u)\ 的存在，只取\ u=0\ 这一区域，即一条直线。）\\
=&\frac{m}{4\pi\hbar T}4b=\frac{m}{2\pi\hbar T}2b
\end{aligned}
$$

2.3 3-4 波函数

2.3.1 问题 3-4

假若一个自由粒子在 $t=0$ 时有确定的动量（即波函数为 $Ce^{ipx/\hbar}$）。借助于式 $(3-3)$ 和 $(3-42)$ 证明：在以后的某时刻，这个粒子仍有同一固定的动量（即波函数通过 $Ce^{ipx/\hbar}$ 与 x 相关），并且随时间的变化正比于 $e^{-i(p^2/2m\hbar)t}$。这意味着粒子有确定的能量 $p^2/2m$。

参考答案：

根据 $(3-3)$ 式，有

$$K(x,t;y,0)=\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}$$

根据 $(3-42)$ 式，有

$$\begin{aligned}\psi(x,t)=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im(x-y)^2}{2\hbar t}\cdot\exp(ipy/\hbar)dy\\=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left[x^2+y^2+2(pt/m-x)y\right]dy\\=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left[\left(2ptx/m-p^2t^2/m^2\right)+\left(y+pt/m-x\right)^2\right]dy\\=&C\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left(2ptx/m-p^2t^2/m^2\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\frac{im}{2\hbar t}\left(y+pt/m-x\right)^2dy\\=&C\exp\frac{im}{2\hbar t}\left(2ptx/m-p^2t^2/m^2\right)\\=&Ce^{ipx/\hbar}e^{-i(p^2/2m\hbar)t}\end{aligned}$$

2.3.2 问题 3-5

应用问题3-2 的结果和式 $(3-42)$ 证明：波函数满足方程：

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\qquad(3-42)$$

这是自由粒子的薛定谔方程。

参考答案：

根据问题3-2，我们有

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$$

其中 $K=K(x,t;y,t_0)$，任意给定初始的波函数 $\psi(y,t_0)$，我们有

$$-\int\frac{\hbar}{i}\frac{\partial K}{\partial t}\psi(y,t_0)dy=-\int\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\psi(y,t_0)dy$$

由于求偏导数的变量和求积分的变量无关，因此求积分和求偏导数的次序可以交换：

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\int K\psi(y,t_0)dy}{\partial t}=-\int\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\int K\psi(y,t_0)dy}{\partial x^2}$$

根据 $(3-42)$ 式，积分部分正好是任意时刻的波函数 $\psi(x,t)$，所以

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

2.4　3-5 高斯型积分

2.4.1　问题 3-6

由于自由粒子拉氏量是二次型的，证明（问题2-1）

$$K(b,a)=F(t_b,t_a)\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)} \tag{3-52}$$

并且论述证明 F 只可能与时间的差值有关，即 $F(t_b,t_a)=F(t_b-t_a)$。

参考答案：

由于自由粒子拉氏量是二次型的，所以可以用 $(3-51)$ 式来求传播子，也就是：

$$K(b,a)=F(t_b,t_a)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}[b,a]\right) \tag{3-51}$$

根据问题2-1，自由粒子的经典作用量 $S_{cl}[b,a]$ 为

$$S_{cl}[b,a]=\frac{m}{2}\frac{(x_b-x_a)^2}{t_b-t_a}$$

代入即得 $(3-52)$。下面来论述 $F(t_b,t_a)=F(t_b-t_a)$。

事实上，可以论证更一般的结论：

对于拉氏量中不显含有 t 的情形，其传播子 $K(b,a)$ 均只可能与时间的差值有关，即 $K(b,a)=K(x_b,t_b;x_a,t_a)=K(x_b,x_a,t_b-t_a)$。换句话说，我们不可能知道做实验的绝对时间！

为此，我们考虑如下两个系统：

$$S_{\text{系统 }1}=\int_{t_1}^{t_2}L(x,\dot{x})dt \quad 和 \quad S_{\text{系统 }2}=\int_{t_3}^{t_4}L(x,\dot{x})dt$$

两个系统的 L 是一样的，并且都不显含 t，区别在于系统 1 的端点为 (t_1,x_a) 和 (t_2,x_b)，系统 2 的端点为 (t_3,x_a) 和 (t_4,x_b)，t_1 与 t_3、t_2 与 t_4 不一定相等，但是保持 $t_4-t_3=t_2-t_1=T$。不管是量子力学还是经典力学，系统的所有性质由所给出的作用量 S 确定，换言之，$S_{\text{系统 }1}$ 和 $S_{\text{系统 }2}$ 包含了这两个系统自身所有的经典力学性质和量子力学性质。现在就来考虑两个系统对应的路径积分。

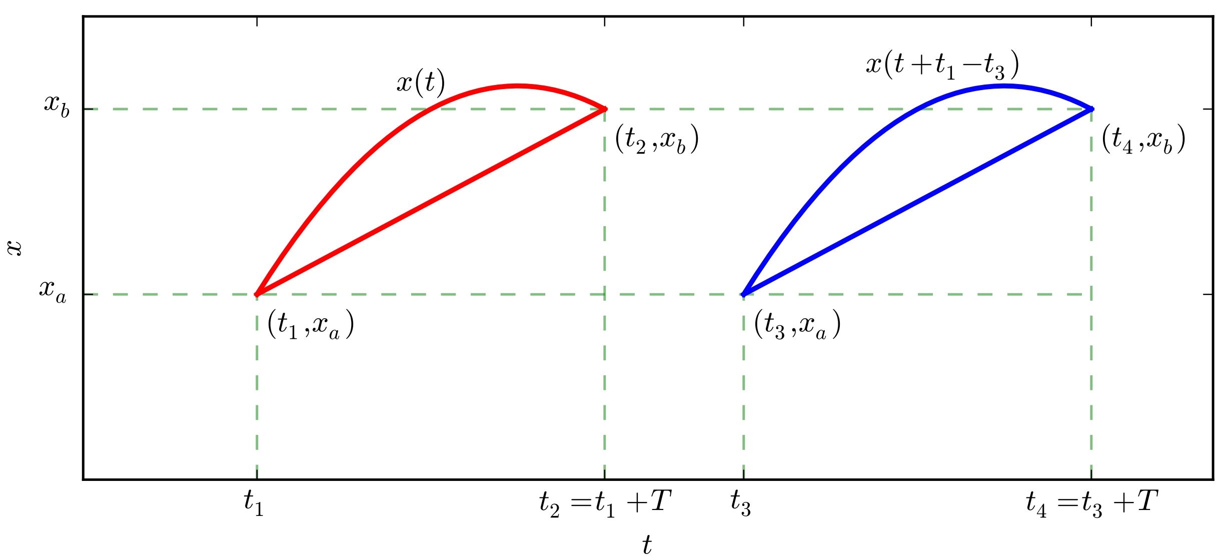

图 1: 考虑两个不同的但类似的系统

路径积分是要把两时空点之间所有的路径按 $e^{iS/\hbar}$ 叠加起来，从图 1 可以看出，系统 1 的每条路径（如 $x(t)$）都与系统 2 的某条路径（如 $x(t+t_1-t_3)$）一一对应，它们仅仅相差一个平移。而对于系统 1 的 $x(t)$ 和系统 $2x(t+t_1-t_3)$，考虑它们的作用量：

$$S[x(t)]=\int_{t_1}^{t_2}L(x(t),\dot{x}(t))dt \quad 和 \quad S[x(t+t_1-t_3)]=\int_{t_3}^{t_4}L(x(t+t_1-t_3),\dot{x}(t+t_1-t_3))dt$$

可以设 $L(x(t),\dot{x}(t))$ 的原函数为 $F(t)$[1]，因此

$$\begin{aligned} S[x(t)] =& F(t)|_{t_1}^{t_2}=F(t_2)-F(t_1) \\ S[x(t+t_1-t_3)] =& F(t+t_1-t_3)|_{t_1}^{t_2} \\ =& F(t_4+t_1-t_3)-F(t_3+t_1-t_3) \\ =& F(t_2)-F(t_1)=S[x(t)] \end{aligned}$$

因此，系统 1 的每条路径（如 $x(t)$）都与系统 2 的某条路径（如 $x(t+t_1-t_3)$）一一对应，并且路径的作用量相同（这意味着两条路径对各自传播子的贡献是相同的）——结论就是：两个系统的传播子是一样的！我们无法区分它们！由于 t_1,t_3 是任意的，所以传播子不可能跟它们有关，唯一固定的时间变量是时间差 T，因此，传播子只可能是 T 的函数。

上述仅仅是论证，不能算是证明，但是写出严格的数学证明是不必要的。因为这里的路径积分的定义，本身都是不严格的，我们只是凭借着已知的数学基础和物理直觉来得到这些结论。

回到原题，自由粒子的拉氏量不显含 t，因此它的传播子 $K(b,a)=F(t_b,t_a)\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar(t_b-t_a)}$ 只能是时间差 t_b-t_a 的函数，因此 $F(t_b,t_a)$ 只能是时间差 t_b-t_a 的函数。

2.4.2 问题 3-7

关于 F 的进一步的信息可以由式 $(2-31)$ 表示的性质获得。首先注意，问题3-6 的结果意味着 $F(t_b-t_a)$ 可以写成 $F(t)$，其中 t 是时间间隔 t_b-t_a。通过在式 $(3-52)$ 中应用这种形式的 F，再代入式 $(2-31)$，用 $F(t)$ 和 $F(s)$ 表示 $F(t+s)$，其中 $t=t_b-t_c, s=t_c-t_a$。证明，若将 F 写为

$$F(t)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}f(t) \tag{3-53}$$

则新函数 $f(t)$ 必然满足

$$f(t+s)=f(t)f(s) \tag{3-54}$$

这意味着，$f(t)$ 必定具有下述形式：

$$f(t)=\exp(at) \tag{3-55}$$

其中 a 可以是复数，即 $a=\alpha+i\beta$。由我们至此所建立的原则出发，很难得到关于函数 $f(t)$ 的进一步的信息。然而，按式 $(2-21)$ 中的定义而特殊选定的归一化常数 A 意味着，近似到 ϵ 的第一阶有 $f(\epsilon)=1$。这相应于在式 $(3-55)$ 中令 a 等于零。$F(t)$ 的结果与式 $(3-3)$ 一致。

参考答案：

对于自由粒子的传播子，由问题3-5 我们已经确定了它与 x_a,x_b 有关的部分，剩下一个只与 t_b-t_a 相关的因此，因此，将它代进 $(2-31)$ 中，可以先完成对 x_c 的积分，换言之（为了减少变量个数，我

[1] 不管我们能不能把它求出来，但是理论上它是存在的。相应地，$L(x(t+t_1-t_3),\dot{x}(t+t_1-t_3))$ 的原函数就是 $F(t+t_1-t_3)$。

们让 $m=\hbar=1$）：

$$\begin{aligned}F(t+s)\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)} =&K(b,a)\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}K(b,c)K(c,a)dx_c\\ =&\int_{-\infty}^{+\infty}F(t)\exp\frac{i(x_b-x_c)^2}{2t}\cdot F(s)\exp\frac{i(x_c-x_a)^2}{2s}dx_c\\ =&F(t)F(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{i(x_b-x_c)^2}{2t}\exp\frac{i(x_c-x_a)^2}{2s}dx_c\end{aligned}$$

可以直接完成上述积分，这需要把指数展开，然后配平方，过程中的系数会比较复杂，但是没有本质上的困难[2]。结果是：

$$\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)}$$

因此

$$F(t+s)=F(t)F(s)\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}=F(t)F(s)\sqrt{\frac{(2\pi it)(2\pi is)}{2\pi i(t+s)}}$$

所以可以设 $F(t)=\sqrt{\frac{1}{2\pi it}}f(t)$（恢复 $m,\hbar$ 后正好是 $(3-53)$ 式），得到 $(3-54)$ 式

$$f(t+s)=f(s)f(t)$$

这是关于 $f(t)$ 的函数方程，指数函数是它的唯一解[3]，因此 $f(t)$ 可以一般地写成 $(3-55)$ 式

$$f(t)=\exp(at)$$

完整而正确的答案是 $a=0$，但是这里我们无法得到这一结果了。

　　可见，如果传播子仅仅确定到相差一个只与 t 相关的因子 $f(t)$，那么我们可以通过 $(2-31)$ 式得到关于 $f(t)$ 的一个函数方程，通过求解函数方程的方式可以进一步确定 $f(t)$ 的部分信息——一般来说是相差一个复常数因子。后面将通过更加有力的方式得到这一因子（参考第四章）。

2.5　3-6 势场中的运动

　　本节的问题的主要核心是经典作用量的计算，因此，它更像节 2-1 的问题。

[2] 但是读者如果熟悉傅里叶变换，我们可以偷偷懒。设 $y=x_c-x_a$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{i(x_b-x_c)^2}{2t}\exp\frac{i(x_c-x_a)^2}{2s}dx_c=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{i(x_b-x_a-y)^2}{2t}\exp\frac{iy^2}{2s}dy$$

上式正好是函数 $\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2t}$ 和 $\exp\frac{ix^2}{2s}$ 的卷积，根据傅里叶变换的性质，卷积的傅里叶变换等于傅里叶变换的乘积，而 $\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2t}$ 和 $\exp\frac{ix^2}{2s}$ 的傅里叶变换分别为 $\sqrt{-\frac{2\pi t}{i}}\exp\frac{\omega^2 t}{2i}$ 和 $\sqrt{-\frac{2\pi s}{i}}\exp\frac{\omega^2 s}{2i}$ 因此上述积分的傅里叶变换等于

$$\sqrt{-\frac{2\pi t}{i}}\exp\frac{\omega^2 t}{2i}\sqrt{-\frac{2\pi s}{i}}\exp\frac{\omega^2 s}{2i}=2\pi i\sqrt{ts}\exp\frac{\omega^2(t+s)}{2i}$$

即，所以所求积分等于上式的逆傅里叶变换，即

$$\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)}=\sqrt{-\frac{2\pi ts}{i(t+s)}}\exp\frac{i(x_b-x_a)^2}{2(t+s)}$$

[3] 从数学角度来看，这种说法欠缺准确性，只有加上连续性要求——$f(t)$ 关于 t 是连续的，才能证明指数函数是唯一解。当然，从物理角度讲，我们认为这种连续性是“显然成立”的。

2.5.1 问题 3-8

谐振子的拉格朗日量是

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \tag{3-58}$$

证明所得的传播子是（参看问题 2-2）

$$K = F(T)\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[(x_a^2+x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right]\right\} \tag{3-59}$$

式中 $T = t_b - t_a$。注意，相乘函数 $F(T)$ 的显式并没有得出来。用其他方法可以获得它，并且对于谐振子，它是（参考节 3-11）

$$F(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2} \tag{3-60}$$

参考答案：

在问题 2-2 中我们已经求出对于谐振子 $(3-58)$ 的经典作用量为 $(2-9)$

$$S_{c1} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_a^2+x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right]$$

而作用量是二次型的，因此它具有精确的表达式 $(3-59)$

$$K = F(T)\exp\frac{iS_{cl}}{\hbar} = F(T)\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[(x_a^2+x_b^2)\cos\omega T - 2x_a x_b\right]\right\}$$

至于 $F(T)$ 的进一步信息，需要利用下一节的方法才能继续求解。当然，有毅力的读者可以仿照问题 3-7，利用式 $(2-31)$ 得到关于 $F(T)$ 的函数方程。但我不是特别建议读者去做这件事情。

2.5.2 问题 3-9

找出在恒定外场 f 中运动的粒子的传播子，其拉格朗日量为

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + fx \tag{3-61}$$

结果是

$$K = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x_b-x_a)^2}{2T} + \frac{fT(x_a+x_b)}{2} - \frac{f^2T^3}{24m}\right]\right\} \tag{3-62}$$

其中 $T = t_b - t_a$。

参考答案：

在问题 2-3 中我们已经求出对于拉氏量 $(3-61)$ 的经典作用量为

$$S_{c1} = \frac{m(x_b-x_a)^2}{2T} + \frac{fT(x_a+x_b)}{2} - \frac{f^2T^3}{24m}$$

而作用量是二次型的，因此它具有精确的表达式

$$K = F(T)\exp\frac{iS_{cl}}{\hbar} = F(T)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{m(x_b-x_a)^2}{2T} + \frac{fT(x_a+x_b)}{2} - \frac{f^2T^3}{24m}\right]\right\}$$

为了确定 $F(T)$，只需要留意到，式 $(3-50)$ 意味着

$$F(t_b,t_a) = \int_0^0 \exp\left\{\int_{ta}^{t_b}\left[a(t)\dot{y}^2 + b(t)\dot{y}y + c(t)y^2\right]dt\right\}\mathscr{D}y(t)$$

注意到被积函数 $a(t)\dot{y}^2+b(t)\dot{y}y+c(t)y^2$ 仅仅包含了二次幂的项，换言之，诸如 $f(t)x$ 的一次幂的项，并不影响 $F(t_b,t_a)$，因此，在问题3-9 中，$F(T)$ 等于不存在 fx 项时（即自由粒子）的结果，因此

$$F(T)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}$$

至此已经得到 $(3-62)$。

2.5.3 问题 3-10

在 z 方向上恒定的外磁场中运动的粒子带电荷 e，质量是 m，其拉格朗日量为

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{eB}{2c}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right) \tag{3-63}$$

证明：所得的传播子是

$$\begin{aligned}K=&\left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{3/2}\left(\frac{\omega T/2}{\sin(\omega T/2)}\right)\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\left[\frac{(z_b-z_a)^2}{T}\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\frac{\omega/2}{\tan(\omega T/2)}\right)\left[(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2\right]+\omega(x_ay_b-x_by_a)\right]\right\}\end{aligned} \tag{3-64}$$

其中 $T=t_b-t_a,\omega=eB/mc$。

参考答案：

为了简化符号，我们设 $m=eB/c=1$，那么 L 简化为

$$L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)+\frac{1}{2}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)$$

我们的工作分为两步，第一步是求经典作用量，第二步求 $F(T)$。注意到 L 可以分为两部分：一部分是 x,y 相关的，另一部分是 z 的，其中 z 部分 $\frac{1}{2}\dot{z}^2$ 仅仅相当于一个自由粒子，因此可以分离出来，得到

$$K=\left(\frac{1}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2}\exp\frac{i}{2\hbar}\frac{(z_b-z_a)^2}{T}\times K_{x,y}$$

其中 $K_{x,y}$ 是对应于拉氏量

$$L_{x,y}=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+\frac{1}{2}\left(x\dot{y}-\dot{x}y\right)$$

的传播子。出于二次型拉氏量一贯的思路，我们先求它的经典作用量，为此，变分得到经典运动方程：

$$\begin{cases}\ddot{x}=\dot{y}\\ \ddot{y}=-\dot{x}\end{cases}$$

这是一个微分方程组，可以常规地求解它。然而利用复数的技巧我们可以更简便地求解，设 $Z=x+yi$，那么上述方程等价于

$$\ddot{Z}=-i\dot{Z}$$

可以解得

$$Z=C_1+C_2e^{-i(t-t_a-T/2)}\quad\text{(构造对于边界点对称的解。)}$$

其中常数由以下方程确定

$$\begin{cases}x_a+y_ai=Z_a=C_1+C_2e^{iT/2}\\ x_b+y_bi=Z_b=C_1+C_2e^{-iT/2}\end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} C_2 = \dfrac{Z_a - Z_b}{e^{iT/2} - e^{-iT/2}} = \dfrac{Z_a - Z_b}{2i\sin(T/2)} \\ C_1 = \dfrac{1}{2}[Z_a + Z_b - C_2(e^{iT/2} + e^{-iT/2})] = \dfrac{1}{2}\left[Z_a + Z_b - \dfrac{Z_a - Z_b}{i\tan(T/2)}\right] \end{cases}$$

（后面的过程告诉我们，没必要把 C_1 求出来。）再看 $L_{x,y}$，有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) &= \frac{1}{2}\dot{Z}\dot{\bar{Z}} \\ \frac{1}{2}\left(x\dot{y} - \dot{x}y\right) &= \frac{1}{2}Re\left(-i\bar{Z}\dot{Z}\right) \\ L_{x,y} &= Re\left(\frac{1}{2}\dot{Z}\dot{\bar{Z}} - \frac{1}{2}i\bar{Z}\dot{Z}\right) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_{cl} = &\int_{t_a}^{t_b} L_{x,y}dt = Re\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{Z}\dot{\bar{Z}} - \frac{1}{2}i\bar{Z}\dot{Z}\right)dt \\ =&\frac{1}{2}Re\left[\dot{Z}\bar{Z}\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}\left(\ddot{Z} + iZ\right)\bar{Z}dt\right] \\ =&\frac{1}{2}Re\left(\dot{Z}\bar{Z}\Big|_{t_a}^{t_b}\right) \\ =&\frac{1}{2}Re\left[\frac{Z_a - Z_b}{2\sin(T/2)}\left(-e^{-iT/2}\bar{Z}_b + e^{iT/2}\bar{Z}_a\right)\right] \\ =&\frac{1}{2}Re\left[\frac{Z_a - Z_b}{2\sin(T/2)}\left(-e^{-iT/2}\left(\bar{Z}_b - \bar{Z}_a\right) + \left(e^{iT/2} - e^{-iT/2}\right)\bar{Z}_a\right)\right] \\ =&\frac{1}{2}Re\left[-\frac{\left|Z_a - Z_b\right|^2}{2\sin(T/2)}e^{-iT/2} + i\left(Z_a\bar{Z}_a - Z_b\bar{Z}_a\right)\right] \\ =&\frac{1}{4\tan(T/2)}\left|Z_a - Z_b\right|^2 - \frac{1}{2}Re\left(iZ_b\bar{Z}_a\right) \\ =&\frac{1}{4\tan(T/2)}\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right] + \frac{1}{2}(x_a y_b - x_b y_a) \end{aligned}$$

上述运算过程的困难之处在于仔细明辨哪些项是实数，哪些项是纯虚数，以达到化简的目的，一旦做到了这一点，就不是特别复杂了。所以

$$K_{x,y} = F(T)\exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\left[\left(\frac{1/2}{\tan(T/2)}\right)\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right] + (x_a y_b - x_b y_a)\right]\right\}$$

接着可以代入 K 的表达式，恢复量纲，求得

$$\begin{aligned} K = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} F(T)\exp\Bigg\{\frac{im}{2\hbar}\Bigg[&\frac{(z_b - z_a)^2}{T} \\ &+ \left(\frac{\omega/2}{\tan(\omega T/2)}\right)\left[(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\right] + \omega(x_a y_b - x_b y_a)\Bigg]\Bigg\} \end{aligned}$$

$F(T)$ 的表达式需要利用后面的方法才能进一步求解得到。

本题也表名，在处理磁场中运动的相关问题之时，可以适当地利用复数来起到化简的效果。因为通过特殊的选定，复数乘积的实部或者虚部，都可以表示二维的叉积。

2.5.4 问题 3-11

假定问题 3-8 种的谐振子被外力 $f(t)$ 驱动，其其拉格朗日量为

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2}x^2 + f(t)x \tag{3-65}$$

证明：所得的传播子是 $(T = t_b - t_a)$

$$K = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega T}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right)$$

其中

$$\begin{aligned} S_{cl} =& \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left[(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega T - 2x_b x_a\right.\\ &+ \frac{2x_b}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b} f(t)\sin\omega(t-t_a)dt + \frac{2x_a}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b} f(t)\sin\omega(t_b-t)dt \\ &\left.- \frac{2}{m^2\omega^2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t} f(t)f(s)\sin\omega(t_b-t)\sin\omega(s-t_a)dsdt\right] \end{aligned} \tag{3-66}$$

最后这一结果在许多高深问题中非常重要。它在量子电动力学中有许多特殊的应用，因为电磁场可以表示为一组受迫谐振子。

参考答案：

显然，问题的难度仍然是求 S_{cl}，因为根据问题 3-9 中参考答案所讨论的，前面的因子 $F(T)$ 等于没有 $f(t)x$ 项时的 $F(T)$，也就是谐振子时的 $F(T) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}}$（参考问题 3-8）。

接着求 S_{cl}。事实上，笔者觉得由 $(3-66)$ 式给出的形式不是特别优美的。下面会给出较为一般的形式。

为了简化记号，我们将令 $m = \omega = 1$。首先求解经典运动方程，变分的结果得到：

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

这是一道二阶线性常微分方程，带有非齐次项。我们已经知道，这种方程的通解是对应的齐次方程的通解加上原方程的一个特解。因此，我们将它表示成

$$x(t) = x_c(t) + y(t)$$

其中 $x_c(t)$ 正式对应的齐次解，且 $x_c(t_a) = x_a, x_c(t_b) = x_b, y(t_a) = y(t_b) = 0$，也就是说，边界条件由 $x_c(t)$ 来拟合。代入到 L 中去，有

$$\begin{aligned} L =& \frac{1}{2}(\dot{x}_c + \dot{y})^2 - \frac{1}{2}(x_c + y)^2 + f(t)(x_c + y) \\ =& \left(\frac{1}{2}\dot{x}_c^2 - \frac{1}{2}x_c^2\right) + f(t)x_c + \left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2 + f(t)y\right) + (\dot{x}_c\dot{y} - x_c y) \end{aligned}$$

自然有 $S_{cl} = \int Ldt$。可以逐一分析各项，首先第四项可以用分部积分：

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b}(\dot{x}_c\dot{y} - x_c y)dt = \dot{x}_c y\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}(\ddot{x}_c + x_c)ydt \\ =\dot{x}_c(t_b)y(t_b) - \dot{x}_c(t_a)y(t_a) = 0 \end{aligned}$$

因此这一项实际是 0。再看第一项，实际上它是自由谐振子的作用量，在问题2-2 中我们已经给出答案，这里记为 S_c

$$S_c = \frac{1}{2\sin T}\left[(x_a^2 + x_b^2)\cos T - 2x_a x_b\right]$$

于是

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2 + f(t)y\right)dt$$

问题2-2 中，我们同样已经给出了 $x_c(t)$ 的表达式

$$x_c(t) = \frac{1}{\sin T}\left[x_b\sin(t-t_a) + x_a\sin(t-t_b)\right]$$

因此，第二项也是已知的，唯一未知的是第三项。第三项还可以分部积分化简为

$$\begin{aligned}\int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}y^2 + f(t)y\right)dt &= \frac{1}{2}y\dot{y}\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\left[\ddot{y} + y - f(t)\right]ydt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)ydt \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)ydt\end{aligned}$$

因此

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)ydt$$

求出第三项需要知道 $\ddot{x} + x = f(t)$ 的一个特解 $y(t)$，满足 $y(t_a) = y(t_b) = 0$。为了求解它，我们利用格林函数技巧。首先求解下述方程

$$\ddot{G}(t,s) + G(t,s) = \delta(t-s), G(t_a,s) = G(t_b,s) = 0$$

其中 $\delta(t)$ 是著名的狄拉克 δ 函数。求出之后，可以代入地证明：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds$$

就是所求的 $y(t)$，并且满足所要求的边界条件。而且一般来说，对于非齐次的线性方程，一般会存在一个格林函数 $G(t,s)$，使得非齐次的方程的解能够表示成 $\int G(t,s)f(s)ds$。求出 $G(t,s)$ 之后，作用量就可以表示成：

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b} f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)dsdt$$

请注意，我们研究的是粒子在时间区间 $[t_a, t_b]$ 内的运动，换言之，$f(t)$ 在 $t > t_b$ 或 $t < t_a$ 时是怎么样的，根本不会影响我们所研究的问题，因此，上述积分中，虽然包含了 $\int_{-\infty}^{+\infty}$，而真正对结果会有影响

仅仅是 $\int_{t_a}^{t_b}$ 部分[4]

$$S_{cl} = S_c + \int_{t_a}^{t_b} f(t)x_c dt + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b} f(t)G(t,s)f(s)dsdt$$

因此问题就只剩下了求 $G(t,s)$，它已经被很多数学物理教程所求出，答案是：

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t-t_b)\sin(s-t_a)}{\sin T}, & t > s \\ \dfrac{\sin(s-t_b)\sin(t-t_a)}{\sin T}, & t < s \end{cases}$$

积分号是 $\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b}$，也就是说积分区域是有 $t = t_a, t = t_b, s = t_a, s = t_b$ 围成的方形区域，由于 $G(t,s)$ 的分段特点，可以把它以对角线分成两块，分别对应于 $t > s$ 和 $t < s$，分别积分，如图 2 所示。

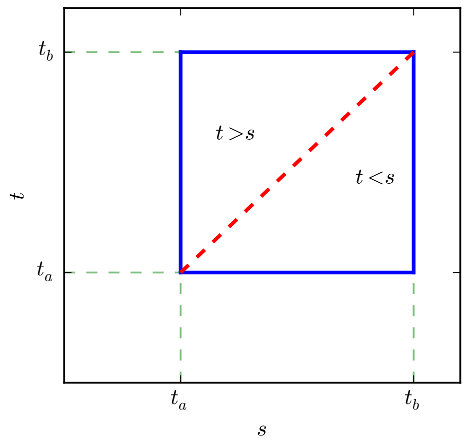

图 2: 划分积分区域

整理积分的结果是

$$\frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b} f(t)G(t,s)f(s)dsdt = \frac{1}{\sin T}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t} f(t)\sin(t-t_b)\sin(s-t_a)f(s)dsdt$$

至此，各个未知的量已经求出，最后综合以上各个步骤，并且恢复 m, ω，可以得到 $(3-66)$ 式。

[4]我们也可以换个更数学的角度来理解它，定义一个新的力：

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} f(t), t \in [t_a, t_b] \\ 0, \text{其他} \end{cases}$$

在我们所研究的时间区间内，我们并没有办法区别究竟所受外力是 $f(t)$ 还是 $\hat{f}(t)$，因此必然有：

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)f(s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t,s)\hat{f}(s)ds \\ &= \int_{t_a}^{t_b} G(t,s)f(s)ds \end{aligned}$$

当然，这也意味着这样所求出来的 $y(t)$ 的有效区间仅仅是 $[t_a, t_b]$。

2.5.5 问题 3-12

若一个谐振子的波函数（在 $t=0$ 时）是

$$\psi(x,0)=\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-a)^2\right] \tag{3-67}$$

则应用式 $(3-42)$ 和问题3-8 的结果证明：

$$\psi(x,T)=\exp\left\{-\frac{i\omega T}{2}-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2-2axe^{-i\omega T}+a^2\cos(\omega T)e^{-i\omega T}\right]\right\} \tag{3-68}$$

再找出几率分布 $|\psi|^2$。

参考答案：

问题解决的思路很清晰，跟问题3-4 类似，不外乎就是求积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(y-a)^2\right]\times\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}\exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left[(x^2+y^2)\cos\omega T-2xy\right]\right\}dy$$

同样，为了减少变量，让 $m=\omega=\hbar=1$，那么积分简化为

$$\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{ix^2}{2\tan T}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-a)^2+\frac{i}{2\sin T}\left(y^2\cos T-2xy\right)\right]dy$$

类似的积分我们在问题3-7 已经做过了，为此，对虚指数部分配方，得到

$$\frac{i}{2\sin T}\left(y^2\cos T-2xy\right)=\frac{i}{2\tan T}\left(x\sec T-y\right)^2-\frac{ix^2}{\sin 2T}$$

所以积分可以转换为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{ix^2}{2\tan T}-\frac{ix^2}{\sin 2T}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}(y-a)^2+\frac{i}{2\tan T}\left(x\sec T-y\right)^2\right]dy\\ =&\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{i\tan T}{2}x^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[\frac{i}{2\tan T}\left(x\sec T-y\right)^2-\frac{1}{2}(y-a)^2\right]dy\end{aligned}$$

如果令 $s=-i,t=\tan T$，则积分完全就是问题3-7 中的样子了，直接根据问题3-7 就可以得到结果

$$\sqrt{\frac{2\pi\tan T}{\tan T-i}}\exp\frac{i(x\sec T-a)^2}{2(\tan T-i)}$$

所以总的结果是

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi i\sin T}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{i\tan T}{2}x^2\right)\sqrt{\frac{2\pi\tan T}{\tan T-i}}\exp\frac{i(x\sec T-a)^2}{2(\tan T-i)}\\ =&\sqrt{\frac{1}{\cos T+i\sin T}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[x^2-2axe^{-iT}+a^2\cos Te^{-iT}\right]\right\}\quad\text{（合并指数项，将分母实数化，整理即得。）}\\ =&\exp\left\{-\frac{iT}{2}-\frac{1}{2}\left[x^2-2axe^{-iT}+a^2\cos Te^{-iT}\right]\right\}\end{aligned}$$

恢复指数后得到 $(3-68)$ 式。

要注意，$(3-67)$ 式是还没有归一化的，因而 $(3-68)$ 式也并没有归一化。对 $(3-67)$ 式归一化，也就是给 $\psi(x,0)$ 乘上因子

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x,0)|^2\,dx\right)^{-1/2}=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-a)^2\right]dx\right)^{-1/2}=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}$$

从而完整的 $\psi(x,T)$ 为

$$\psi(x,T)=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\exp\left\{-\frac{i\omega T}{2}-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[x^2-2axe^{-i\omega T}+a^2\cos(\omega T)e^{-i\omega T}\right]\right\}$$

最后，要求的几率分布为

$$|\psi(x,T)|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x-a\cos\omega T)^2\right]$$

2.5.6 附：求 $F(T)$ 的方法

待补充。

2.6 3-11 用傅里叶级数对路径积分求值

2.6.1 问题 3-13

保留所有常数，证明，这意味着，当 N 趋于无限大时，变换系数行列式 J 满足

$$J\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{2T}{\pi^2\epsilon}\right)^{(N+1)/2}\left(\prod_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)\to 1\quad \text{当}N\to\infty \tag{3-94}$$

参考答案：