# 漫谈几何量子化（八）力学

如果一个系统包含 N 个粒子，它们在空间的位置受到 s 个独立方程的限制。满足这些方程的位置组成 3N 维欧氏空间的一个子集 M, 称为“ 位形空间 ”。

$$F_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots, x_N, y_N, z_N) = 0, \qquad i = 1, \cdots, s$$

这些方程独立的意思是，Jacobi 矩阵 $DF$ 的秩处处是 s. 根据隐函数定理，在 M 的每一点，存在一个邻域 $U \subset M$，在这个邻域里，可以找到 3N-s 个独立坐标函数，其它 s 个坐标函数由这 3N-s 个独立坐标的函数决定。这相当于说，M 的每个局部都拓扑等价于 $\mathbb{R}^{3N-s}$ 的开子集，即，M 是一个 3N-s 维的流形。如果 F 还是光滑的，那么 M 是一个光滑流形。局部坐标系里的坐标就是 Lagrange 分析力学的“ 正则坐标 ”。

Lagrange 的方法是定义一个函数 L, 变量为正则坐标和该坐标点的“ 虚速度 ”（在考虑粒子运动轨迹之前，无法谈论速度。这里的虚速度是位形空间 M 的切向量，也就是粒子在这一位置的可能速度）。用流形的语言，指定一个切向量的同时，也就指定了它的基点，而所有切向量的集合称为“ 切丛 ”。所以 Lagrange 量 L 实际上是切丛上的函数。

Legendre 变换利用 Lagrange 量把虚速度变为动量。用流形的语言，就是把切向量映到余切向量，把切丛 $TM$ 映到余切丛 $T^*M$. 在余切丛上，局部坐标是正则坐标和正则动量，它们满足 Hamilton 运动方程。它们的函数也满足相应的运动方程，而所有运动方程都能写成统一的形式，

$$\frac{df(t, q(t), p(t))}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

这里的 Poisson 括号局部定义为

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{3N-s} \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right)$$

Poisson 括号是双线性，反对称的，满足 Jacobi 恒等式和 Leibniz 法则，这里就不详述了。要用到的时候其意自明。需要单独列出的是，

$$\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$$

Hamilton 力学的特征被数学家总结为辛几何。位形空间的余切丛 $T^*M$（物理学家称为相空间）是所谓“ 辛流形 ”的范例。