漫谈几何量子化（十三，十四，十五）

漫谈几何量子化（十三）

上一节联系了正则变换，Lagrange 子流形和生成函数。现在来寻找一个正则变换，使 Hamilton 正则方程组具有最简单的形式。

Hamilton 方程具有整体形式 $\dot{\phi}_t = X_H(\phi_t)$, 即系统的演化是由 Hamilton 量 H 的 “ 辛梯度 ” 生成的。所以 Hamilton 方程在任何辛局部坐标下具有相同的形式。 如果能选取一个局部辛坐标系 (q', p') 使得 Hamiton 量只依赖于 q',而不依赖于 p', 那么 Hamilton 方程就成为

$$\dot{q}' = 0, \qquad \dot{p}' = -\frac{\partial H}{\partial q'}(q')$$

从而直接得到所有的解

$$q' = a \ (\text{constant array}), \qquad p' = b + ct$$

这里 a, b 是积分常数，由初始条件决定，而常数 $c = -\frac{\partial H}{\partial q'}(a)$. 再用逆变换得到物理的坐标和动量 (q,p) 随时间的演化。

如果局部生成函数 $S(q, q')$ 生成具有以上性质的变换，那么首先根据上一节

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \qquad p' = -\frac{\partial S}{\partial q'},$$

Hamilton 量独立于新正则坐标的条件为

$$\frac{\partial H}{\partial p'}\left(q(q', p'),\ \frac{\partial S}{\partial q}(q(q', p'),\ q')\right) = 0$$

这个条件等价于

$$H\left(q(q', p'),\ \frac{\partial S}{\partial q}(q(q' p'), q')\right) = C(q')\ .$$

这里 $C(q')$ 是只依赖于 q' 的数。

寻找满足这个条件的函数 $S(q,q')$ 的方法就是解以下这个以 q 为变量，以 S(q) 为未知函数，以 C(q') 为参数的方程，

$$H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q}\right)=C(q')$$

这个偏微分方程就叫做不含时的 Hamilton-Jacobi 方程。如果这个方程有一族以 q' 为参数的解 $S(q,q')$, 则这一族解作为 (q,q') 的函数生成的变换 $(q,p)\mapsto(q',p')$ 满足上一段那个较为复杂的条件，从而是此节开头要求的“ 好 ”的正则变换。

看看最简单的例子，一维谐振子。Hamilton-Jacobi 方程的形式为

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2+m^2\omega^2q^2=C(q')$$

本质上是一个线性常微分方程，可以直接积分。做一个方便的选择，取 $C(q')=(q')^2$, 则得到一族解

$$S(q,q')=\frac{(q')^2}{2m\omega}\ \arcsin\left(\frac{m\omega q}{q'}\right)+\frac{qq'}{2}\ \sqrt{1-\left(\frac{m\omega q}{q'}\right)^2}$$

它生成的正则变换

$$q'=\sqrt{p^2+m^2\omega^2q^2},\qquad p'=\ \text{a complicated function}$$

是满足 $\dot{q}'=0,\quad \ddot{p}'=0$ 的正则坐标。（新正则坐标 q' 实际上是 Hamilton 量的函数 $\sqrt{2mH}$, 在系统演化中守恒。）

当然，在谐振子的情况，直接解 Hamilton 方程要容易得多。其它很多系统也是如此。Hamilton-Jacobi 方法只有理论上的意义。

H-J 方程有一个几何解释。它的一个局部解 S(q) 生成相空间里局部的一个 Lagrange 子流形（dS 的图像），Hamilton 量沿着这个子流形是常数。H-J 方程的一族解就生成一族局部 Lagrange 子流形。如果这一族局部 Lagrange 子流形充满相空间的一个邻域（被新正则坐标 q' 参数化），那么它们给出新的非常方便的正则坐标（由 $S(q,q')$ 生成的正则变换，每一 Lagrange 子流形就是新动量空间 $\{(q',p')|\ q'=\text{const}\ \}$）。

一般的辛流形并不一定能实现为某个位形空间的余切丛。寻找新的正则坐标在一般辛流形情形的类似过程就是 寻找 Lagrange 分叶结构，即，找一族 Lagrange 子流形来充满整个辛流形。波函数只依赖于一半正则坐标这个特点就被搬到一般辛流形上，成为 实极化这个概念。