漫谈几何量子化（二）闲话

Feynman 发明了路径积分以后，量子理论看起来便不那么反传统了，路径积分的被积函数都是经典的，交换的力学量，被一个幺模复值泛函 $e^{iI/\hbar}$ 加权，得到经典观测值。由量子力学的概率解释，经典观测值应该是可观察量特征值的期望，这样路径积分非常像概率模型，权泛函就像概率密度一样。这里其实我很不理解的是，作为传播子（又叫 Green 函数或基本解），

$$\int_{\{\text{paths } \omega \text{ from a to b}\}} e^{iI(\omega)/\hbar}\, \mathcal{D}\omega$$

的模方是粒子从 a 到 b 的迁移概率，而权函数本身的模方永远是 1，因而不能被视为任何同概率密度有关的量。从这个角度来说，可观察量 $\mathcal{O}$ 的期望为什么是

$$\frac{\int \mathcal{O}(\omega)\, e^{iI(\omega)/\hbar}\, \mathcal{D}\omega}{\int e^{iI(\omega)/\hbar}\, \mathcal{D}\omega}$$

是非常难以理解的一个巧合。

在从算子描述推演路径积分的过程中，如果用虚时间，就得到完美的概率解释。这相当于考虑欧氏指标的时空背景。在这种数学模型中，量子理论可以理解成某些无穷维空间上的特殊概率测度理论。由于路径积分在 non-abelian 规范理论，弦论中的关键作用，这个解释也是很多数学物理学家努力探索的方向。近些年在随机面的数学理论方向有很多发展，这相当于研究二维欧氏时空量子理论的数学基础。

在“一维欧氏时空”，量子的运动完全由 Brownian motion 的数学理论刻画。显然，这种刻画不适用于真实世界，因为时间是实数而不是虚数。Brownian motion 非常适合描述股票等金融产品的价格随机性，如今已广泛用于金融市场理论。股票价格可以视为以时间为指标的一个随机过程（或者本质等价的，路径空间上的一个高斯测度），而随机面理论相当于研究有两个实指标的随机过程，我们应该期望这个理论会有一些跟我们社会生活相关的重要应用。

对于量子这个概念有着许多种不同理解，也许说明这个概念还不是基本概念（至少从数学上来说）。现在言归正传，说说量子化与几何的微妙关系。