漫谈几何量子化（一，二，三）

漫谈几何量子化（一）小史

从数学上理解“ 量子化 ” 是数学物理的课题之一。应用量子理论来探索新的数学对象和新的数学性质，根据某些学者提议，可以叫做“ 物理数学 ”。自从量子力学诞生，数学家就一直在思索量子化的数学本质。我个人来揣度 Weyl 当初对量子化的理解，可以说是用代数来细化几何。 在广义相对论提出以后，量子力学尚在酝酿之时，Weyl 已经试图把电磁学纳入几何框架，即所谓 $U(1)$ 规范场论。在他看来，经典物理基础理论对应于几何。矩阵力学和波动力学出现以后，Weyl 第一个从数学上描述了量子力学，这就是他的著作《群论与量子力学》，他的语言基本上是当时的抽象代数。“ 经典物理用几何描述, 量子物理用代数描述 ”，这可以视为对量子化的一种理解。

矩阵力学和波动力学统一在“ 变换理论 ” 框架下，这使得具有深刻分析背景的 von Neumann 意识到，某种函数空间上的微分算子理论对应于波动力学，而这种空间的代数结构可以用来归纳矩阵力学。因为这种函数空间已经被 Hilbert 的学生 Schmidt 研究过，而大家普遍相信是 Hilbert 的思想引导了对这种函数空间的研究，所以 von Neumann 用了 Hilbert space 这个名字。 据数学史研究者澄清，Hilbert space 的主要思想基本来自于 Schmidt 本人。von Neumann 的名著〈量子力学的数学基础〉用分析和代数的结合体 ——— 算子代数来描述量子物理，他的基本定理是 Stone-von Neumann 定理：由坐标和动量生成的“ Heisenberg 代数 ” $[Q,P]=\mathrm{i}\hbar$ 只有唯一的自伴表示等价类，其中一个代表的表示空间是坐标的平方可积函数空间，坐标和动量分别表示为算子

$$(Qf)(q) = q\,f(q), \quad Pf = -\mathrm{i}\hbar D_q f.$$

这种对量子理论的理解可以大致总结为“ 非交换 ” 观点，因为 Hilbert 空间 L^2 可以被理解为来源于力学变量的“ 非交换性 ”（更准确地说是“ 几乎交换性 ”）。由 von Neumann 这一脉相承而来的是我个人认为最有希望切入量子化本质的“ 非交换几何 ”。