漫谈几何量子化（五）真空

在 Fock 表象中，真空态被全纯部分湮灭，$Z|0\rangle = 0$. 现在考查有限维相空间，取一个一般的复结构 $(V\oplus V^*)_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$，希望把“全纯部分”的元素用某种方式写出来。

先来说明，投影 $W \to V_{\mathbb{C}}:\ (v,\alpha)\mapsto v$ 是同构。首先，它是单射，这是因为，如果 $0\neq w=(0,\alpha)\in W$, 那么

$$\mathrm{i}\sigma(\bar{w},w) = \mathrm{i}(\bar{\alpha}(0)-\alpha(0)) = 0$$

与正性条件矛盾。又因为它们维数相同，所以是同构。（在无穷维的时候应该有其它办法可以论证这一点，我暂时还没有想到。）这样，对每一个 $v\in V_{\mathbb{C}}$, 有唯一的 $(v,\alpha_v)\in W$. 现在就可以定义线性算子

$$A: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}^*, \quad Av=\alpha_v.$$

迷向条件说明这个算子作为 $V_{\mathbb{C}}^*\otimes V_{\mathbb{C}}^*$ 的元素是对称的，而正性条件说明它的虚部是正定的。W 和 A 的关系可以总结为：前者是后者作为映射的图像。

反之，只要有了一个虚部正定的对称双线性型 A，它的图像就给出一个复结构。这是辛向量空间上复结构的第三种形式--- Gauss 测度。现在“全纯部分”的元素可以写作 (v, Av).

上一节只说了经典相空间上的复结构，由谐振子的类比，态空间与反全纯函数空间同构。然而，还没有涉及可观察量及其在态空间上的作用。有限维情形，可以用 Stone-von Neumann 定理。在谐振子的时候用了 Schrodinger 表象，现在对于多维相空间，采用新的表象（等价于 Schordinger 表象），即，态空间是 $L^2(V)$,

$$v\mapsto \mathrm{i}D_v, \qquad \alpha\mapsto m_\alpha,\ \text{meaning},\ (m_\alpha f)(u)=\alpha(u)\,f(u)$$

计算交换子，

$$(D_v m_\alpha f)(u) = D_v(\alpha(u)\,f(u)) = \alpha(v)f(u)+\alpha(u)\,D_v f(u)$$

就是说，

$$[\mathrm{i}D_v, m_\alpha] = \mathrm{i}\ \alpha(v)\ \mathrm{id} = \mathrm{i}\ \sigma(\ (v,0),\ (0,\alpha)\ ).$$

这是 Heisenberg 正则量子化。

结合关于 Gauss 测度的讨论，来看什么样的函数被全纯部分湮灭。简单计算一下，

$\mathrm{i}\, D_v\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Au)(u)/2} = -(Av)(u)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Au)(u)/2}$

形式地重写以上等式,

$\left(\mathrm{i}D_v + m_{Av}\right) L_A = 0$

左边括号里的算子其实是经典变量 $(v, Av) \in W$ 在 Stone-von Neumann 表示里对应的算子。这个简单计算就是说，以上 Gauss 指数函数被全纯部分 $W = \mathrm{Graph}(A)$ 对应的所有算子湮灭。相容复结构通过 Gauss 测度的形式给出了真空态。

总结一下：

（1）辛向量空间 $V \oplus V^*, \quad \sigma\Big(\ (v_1, \alpha_1),\ (v_2, \alpha_2)\ \Big)$;

（2）$V \oplus V^*$ 上相容复结构的三种形式：
（一）辛同构 $J : V \oplus V^* \to V \oplus V^* \quad \text{s.t.} \quad \sigma(Jx, Jy) = (x, y)$;
（二）极大正性迷向子空间 $W \subset (V \oplus V^*)_{\mathbb{C}} \quad \text{s.t.} \quad (V \oplus V^*)_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$;
（三）V 上的 Gauss 测度 A, 即虚部正定的对称双线性型。

（3）选取一个相空间上的相容复结构，Fock 空间即为对称张量空间 $S(\overline{W}) = \oplus_{k\geq 0} S^k(\overline{W})$. 它同平方可积函数空间 $L^2(V)$ 的关系如下：

$S(\overline{W}) \to L^2(V), \quad \bar{w}_1 \cdots \bar{w}_s \ \mapsto\ \rho(\bar{w}_1 \cdots \bar{w}_s)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(Av)(v)/2}$
这里 ρ 指 Stone-von Neumann 表示。

如果 V 是一个无穷维的拓扑向量空间，比如某个时空场方程的所有解在等时截面附近的“芽”（场的初值）组成的空间，那么以上概念和程序都依然有效（需要更加精细的定义）。相容的复结构将给出一个 Fock 表象及真空态。与有限维不同的是，所有这些 Fock 表象并不等价，而且平方可积空间没有自然的定义，这时候（3）里面的式子应当被视为在选取的相容复结构（Gauss 测度）意义下的 $L^2(V)_A$ 的定义. 在一个带边的时空流形上，Lagrange 作用量和类空边界将给出经典相空间，时空内部（即系统的历史）将给出一个特殊的复结构，这个复结构帮助确定 Fock 空间及真空态。下一节准备将以上概念体现于自由玻色场。

参考文献：

Graeme Segal's notes on QFT.

Gerald B. Folland: *Harmonic Analysis in Phase Space.* (AM-122)