漫谈几何量子化（六）实例

一个带边的 n 维时空流形 M 上的自由玻色场作用量是

$$I=\int_M\Big(-\frac{1}{2}d\phi\wedge *d\phi-\frac{1}{2}m^2\phi\cdot *\phi\Big)$$

或者更清楚一点,

$$I=\int_M\Big(-\frac{1}{2}\|d\phi\|^2-\frac{1}{2}m^2\|\phi\|^2\Big)\,dV$$

在它的类空边界 ∂M 上，可以进行“ 正则量子化 ”程序。首先，找到时空里的经典场位形，即，对作用量作变分，得到 Euler-Lagrange 方程 （Klein-Gordon）

$$(\Box-m^2)\phi=0$$

这个方程的算子解 $\phi(\mathbf{x},t)$ 经常称为“ 在壳 ”的场。它们被视为相互作用图像中随时间演化的力学变量，在现在的自由理论情形，实际上也是 Heisenberg 图像中随时间演化的力学变量。在一个固定的时刻 t，不同空间位置的场算子 $\{\phi(\mathbf{x},t)\}_{\mathbf{x}}$ 组成系统的“ 正则位形 ”。经过 Legendre 变换，找到系统的“ 正则动量 ”空间 $\{\partial_t\phi(\mathbf{x},t)\}_{\mathbf{x}}$. 所有的正则位形和正则动量实际上给出了 Klein-Gordon 方程的初值（或者末值），根据方程的性质，这组初值是颇为任意的，比如，对任何光滑的初值，总能找到方程的解。

如果一个类空边界分支 $K\subset\partial M$ 是等时面，那么系统的经典相空间（所有正则位形和动量），用几何的语言，就是 $\Omega^0(K)\oplus\Omega^{n-1}(K)$, 即，场的初值及法向导数。这里的记号分别指 K 上的 0 阶微分形式（即函数）和 (n-1) 阶微分形式。它们正好互为对偶，通过配对

$$(f,\alpha)\ \mapsto\ \int_K f\alpha$$

这个积分有意义是因为函数乘上顶阶形式还是顶阶形式，从而可以在流形上积分。这样经典相空间成为之前研究过的标准的辛向量空间。

要构造 Fock 表象和真空态，必须引进相容复结构。这个复结构来自于整个时空流形（可以被视为系统的历史，如果把经典相空间作为末值的话）。时空里场方程的所有解（在壳的场）组成空间 W, 它可以嵌入 $(\Omega^0(K)\oplus\Omega^{n-1}(K))_{\mathbb{C}}$ 作为子空间,

$$\phi\ \mapsto\ \Big(\phi|_K,\ \mathrm{i}\,(*d\phi)|_K\Big)$$

就是把场方程的解对应到其初值，再用虚数单位“ 扭 ”一下。这个映射是嵌入由初值问题解的唯一性以及连续依赖性保证（双曲方程好像没有这么好的性质，所以这里在严格性上有很大的问题，解决的办法是归结为另一个不够严格的过程---先用虚时间，把双曲方程化为椭圆方程，在完成量子化手续，算出散射概率或者关联函数以后再回到 Lorentz 时空指标）。

这么巧的是，这个嵌入的像定义了一个相容复结构，

$$\left(\Omega^0(K) \oplus \Omega^{n-1}(K)\right)_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$$

这样就可以构造出 Fock 空间和真空态（有兴趣的同修可以考虑一下这里的细节）。事实证明，这个表象只依赖于边界 K 的邻域，而与任一有限时间之前的时空无关。这个现象，我还没有领会。盼熟悉物理的同修加以点拨。