# 漫谈几何量子化（十四）复极化

在辛向量空间量子化的例子里，实极化是 Schrodinger 表象，复极化是 Fock 表象。Fock 表象中的态矢量是复变量 $q+ip$ 的反全纯函数。而数学传统用全纯函数讨论问题比较方便，所以在预量子化时做一个小变动，即让 Heisenberg 量子条件成为 $[\hat{f},\ \hat{g}]=-i\widehat{\{f,g\}}$. 这样预量子化得到的复线丛的曲率形式是 $F=-i\omega$.

如果 M 有一个复结构 J，而且复结构同原来的辛结构有某种相容性，即，M 在此复结构下是一个 Kahler 流形（选取这样一个 Kahler 结构叫做“ 复极化 ”），那么复线丛的联络 $-i\theta$ 给了复线丛一个“ 全纯结构 ”，使它成为一个“ 全纯线丛 ”，即可以选择 M 的开覆盖使线丛的转移函数是 M 局部的全纯函数。有了全纯结构，就可以谈论“ 全纯截面 ”，即可以用转移函数拼成整体截面的局部全纯函数。这些“ 全纯截面 ”是 Fock 表象全纯函数的推广，它们代表系统的不同状态。把所有的全纯截面收集起来，就得到了系统的态空间。如果想严格地得到 Hilbert 空间，就需要定义一个内积。这个内积可以由线丛的全纯结构自然给出。在这个内积下，取所有平方可积的全纯截面，就得到一个真正的 Hilbert 空间。如果 M 上的一个光滑函数 f 的 Hamilton 向量场保持复结构 J, 那么它在预量子化时对应的算子把全纯截面映到全纯截面，从而是态空间上的算子，这样的 f 被量子化了。由此，并非所有的经典力学变量都可以在几何量子化的框架中被量子化。保持复极化的力学量可以量子化，当然，还有一些不保持复极化的力学量在特殊的情况下也可以量子化。以后会谈到。

复极化方法使几何量子化同复几何联系起来，更有趣的是，同代数几何联系起来。这是因为，Kodaira 嵌入定理保证，对紧致 Kahler 流形 M，以上构造的这个线丛可以把 M 作为解析子流形嵌入复射影空间。这个结果加上周炜良定理（复射影空间的紧致光滑解析子流形一定是代数流形），就说明容许复极化的可量子化紧致辛流形一定是代数流形。（可量子化就是以上线丛的存在性。）

不妨看看最简单的代数流形，复射影直线 $\mathbb{C}P^1$，它自然是一个 Kahler 流形，它上面有自然线丛（射影直线上每一点是仿射平面里的一条直线），这个线丛的对偶线丛正好是预量子化线丛，它的全纯截面就是齐次坐标，所以量子化得到一个二维的 Hilbert 空间。以后会看到，$\mathbb{C}P^1$ 是 spin-1/2 粒子的经典相空间，而量子化得到的二维 Hilbert 空间中的矢量就是自旋波函数。将复射影直线的辛形式乘上 k, 得到一个新的辛流形，它的预量子化线丛是原来预量子化线丛的 k 次张量积，这个新线丛的截面其实是 k 次齐次二元多项式，它们张成 k+1 维空间，这是 spin-k/2 波函数的取值空间。

这是一个很典型的 代数几何---表示论---几何量子化 相互关联的例子，它是所谓 Borel-Weil-Bott 定理在李群 SU(2) 时候的特殊形式。