漫谈几何量子化（四，五，六）

漫谈几何量子化（四）表象

在场论中，经典相空间一般都是无穷维空间。无穷维缺少有限维的一个重要性质，即平移旋转不变的 Lebesgue 测度的存在性。我们已经看到在 Stone-von Neumann 的处理中（即 Schrodinger 表示），平方可积函数空间 $L^2(\mathbb{R})$ 可以作为态空间，而平方可积是对 Lebesgue 测度而言的。但是在无穷维，没有这么一个“ 典则 ”的测度。

再来看 Fock 表象。重新审视对有限维相空间的处理。在没有约束的情况下，只要固定了坐标系，有限维相空间可以看作向量空间。所有可能的位置组成向量空间 $V \cong \mathbb{R}^n$，所有可能的动量应该被视为对偶空间（线性泛函组成的空间） V^*（这是因为动量由 Legendre 变换定义，数学上来说是一种对偶），使得经典相空间 可以写成 $X = V \oplus V^*$. 这是一个“ 辛向量空间 ”，就是说，上面配备了一个非退化的反对称双线性型 $\sigma : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$\sigma\Big((v_1, \alpha_1), \quad (v_2, \alpha_2)\Big) = \alpha_2(v_1) - \alpha_1(v_2)$$

实向量空间上的“ 复结构 ”是指一个线性变换，其平方是负恒等，$J^2 = -I$. 辛向量空间上的“ 相容复结构 ”是指这个复结构要保持辛形式，即，

$$\sigma(Jx, Jy) = \sigma(x, y) \qquad \forall x, y$$

容易看到复结构的本征值是 $\pm\mathrm{i}$. 要谈论它的本征向量，必须把原来的实向量空间“ 复化 ”，即考虑复向量空间 $X_{\mathbb{C}} = X \otimes \mathbb{C} = X \oplus \mathrm{i}\, X$，把 J 扩张到这个复向量空间上成为复线性变换。这个复向量空间可以分解成 J 的本征子空间的直和，$X_{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$. 不同的复结构对应不同的这种直和分解。如果复结构还是跟辛结构相容的，那么以上直和分解必须满足“ 正性条件 ”

$$\mathrm{i}\,\sigma(\bar{w}, w) > 0 \qquad \forall w \in W$$

和 Lagrange 条件，即 W 是极大的迷向子空间，所谓迷向是指

$$\sigma|_W = 0.$$

之前讨论谐振子的时候采用的复结构是（省略系数）

$$W = \langle\, e_q + \mathrm{i}\, e_p \,\rangle, \qquad J(e_q) = -e_p, \quad J(e_p) = e_q$$

那么容易看到，Fock 表象中的态矢量一一对应到反全纯部分的多项式，用多重线性代数的语言，即 $\overline{W}$ 上的对称张量。Fock space $= S(\overline{W})$.

这个程序可以用于无穷维辛向量空间，即，固定一个正性直和分解（复结构），态空间就可以用反全纯部分的对称张量来组成。不过注意这只适用于玻色理论，其中正则关系是交换子。对费米

理论，有类似的程序，以后再谈。

真空态的构造问题涉及复结构的第三种形式，下节继续。