漫谈几何量子化（十一）丛与联络

取流形 M 的一个开覆盖，就是一族开集 $\{U_\alpha\}$ 使得 $\cup_\alpha U_\alpha = M$. 它们可以取得比较好，比如，它们都同胚于欧氏空间，它们之间任意的交集也都同胚于欧氏空间。这种覆盖叫一个好的覆盖。它的好处是，在它们重叠的地方，Poincare 引理总成立：闭形式一定是恰当形式。

这样在每一个开集 U_α 上，辛形式有原形式 θ_α. 上一节的程序就构造了算子 $\hat{f}_\alpha$，作用在局部的函数上，

$$\mathrm{i}\hbar X_f\psi(x) - \theta_\alpha(X_f)\psi(x) + f(x)\psi(x)$$

如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 在这个交集上就有两个算子 $\hat{f}_\alpha$，$\hat{f}_\beta$，来自两个开集上的预量子化程序。它们作用在同一函数上得到不同的结果，相差 $(\theta_\beta - \theta_\alpha)(X_f)\psi(x)$. 因为两个1-形式的外微分都是辛形式，所以在重叠部分它们的差是一个闭的 1-形式，这个闭的1-形式是局部恰当的，可以写成一个局部函数（定义在重叠部分）的微分，

$$\theta_\beta - \theta_\alpha = d\lambda_{\alpha\beta}$$

对每一对开集，都有这么一个定义在重叠区域上的函数。这些局部函数可以用来拼接局部数据。做法如下。既然来自于两个开集的算子作用在同一函数上得到不同结果，那么最好各司其职，只作用在自己那个开集的局部函数 ψ_α 上。在两个开集重叠的部分，自然希望两个算子作用在各自的局部函数上得到的结果之间有某种简单关系。也就是说，希望把

$$(\theta_\beta - \theta_\alpha)(X_f)\psi = d\lambda_{\alpha\beta}(X_f)\psi$$

吸收到某种简单关系中去。解过微分方程的人都比较熟悉的技巧是，将函数乘上积分因子可以把线性项吸收到导数之中。这提示我们可以通过积分因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{\alpha\beta}/\hbar}$ 将不同开集的局部函数联系起来，即，如果在 U_β 上取了局部函数 ψ_β, 那么在 U_α 上就相应地取局部函数 $\psi_\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{\alpha\beta}/\hbar}\psi_\beta$, 再分别用 $\hat{f}_\alpha$，$\hat{f}_\beta$ 作用，得到

$$\hat{f}_\alpha\psi_\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{\alpha\beta}/\hbar}\ \hat{f}_\beta\psi_\beta,$$

也就是说，作用以后的局部函数之间的关系跟作用以前局部函数之间的关系是一样的。有了这个结果，就可以定义流形上一个整体的量（暂时叫做一个“ 波 ”），它在各个开集上的限制都是局部函数，在两个开集重叠的部分满足以上变换关系。再定义一个整体的算子，它作用在一个“ 波 ”上面，就是之前的分片作用 $\{\hat{f}_\alpha\}$，作用之后，发现局部得到的结果还可以拼成一个“ 波 ”。(上一个式子保证这一点。）所以可以把所有的“ 波 ”放在一起组成一个空间，它上面有可观察量 $\hat{f}$ 的作用。现在可以说，在辛形式不是恰当的时候，也可以做预量子化，只不过这个时候的 Hilbert 空间里面不再是流形上整体定义的函数了，而是由局部函数根据某种变换规则拼

接起来的“ 波 ”。

以上的拼接过程并不严密。比如，如果有三个开集，两两相交，那么从开集1的局部函数得到开集3的相应局部函数的办法有两个：直接乘上1，3 之间的积分因子，或者先乘上1，2之间的积分因子找到开集2里相应的局部函数，再通过2，3之间的变换找到开集3里相应的局部函数。如果三个开集没有共同的部分，那就不会有什么问题。如果三个开集的交不空，在这个交上面，第三个局部函数的值可能因为上述两种方式而不相符。这就是说，如果局部函数要能拼接成一个整体对象，这些积分因子必须满足条件

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{\alpha\beta}/\hbar}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{\beta\gamma}/\hbar}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_{\gamma\alpha}/\hbar}=1,\qquad \text{or}\qquad \lambda_{\alpha\beta}+\lambda_{\beta\gamma}+\lambda_{\gamma\alpha}\in 2\pi\hbar\,\mathbb{Z}$$

这个条件并不容易满足。虽然这些和一定是常数（微分一下就看到了），不过注意到固定了θ_α以后，$\lambda_{\alpha\beta}$的选取也不是唯一的，还可以加上任意的实常数。

这个整性条件有一个同调论的解释。在覆盖中的每个开集里取一个点，如果两个开集的交非空，就用一条线段连接两个开集里的点（使线段在它们的并里面），如果三个开集的交非空，就填入相应的三角形（也在并里面），...... 这些单形可能在流形中是退化的（比如二维流形的四个开集相交的情况）。流形的上同调可以用这个单纯复形来计算。特别地，容易看到辛形式ω在每个这样的三角形上的积分都是$\lambda_{\alpha\beta}+\lambda_{\beta\gamma}+\lambda_{\gamma\alpha}$加上一些边界修正项。这样辛形式在单纯复形的一个2维闭链上的积分就等于所有这种形式的“ 三项和 ”加在一起（边界修正都抵消了）。因此，如果存在λ 使得这些“ 三项和 ”都是2π的整数倍，那么辛形式ω在 M 里的闭曲面上积分一定是$2\pi\hbar$的整数倍，或者用同调的语言，$\omega/(2\pi\hbar)$所在的 de Rham 同调类一定要落在整系数同调群在实系数同调群的像里。

这一节已经涉及到了很不浅显的数学。将局部函数拼接成整体对象，在数学上是构造了一个 M 上的“ 复线丛 ”。一个“ 波 ”就是这个复线丛的一个“ 截面 ”。对任何 M 上的光滑函数 f 构造的算子的前两项（某个局部坐标系下）

$$\mathrm{i}\hbar\left(X_f+\frac{\mathrm{i}\theta_\alpha}{\hbar}(X_f)\right)$$

合起来称为“ 协变导数 ”，是流形上的整体对象，记作∇_{X_f}. 它作用于线丛的截面。其中只在局部有定义的 1-形式θ_α称为“ 联络形式 ”，在坐标变换下作“ 规范变换 ”$\theta_\beta=\theta_\alpha+d\lambda_{\alpha\beta}$.

在对辛形式“ 整性 ”的分析中，用到了 Cech 上同调的想法，就是通过好的开覆盖的相交性质来计算和看待流形的同调群。那些“ 三项和 ”放在一起称为一个 Cech 2-上链，它来自于“ 函数值的 Cech 1-上链 ”λ. 积分因子也组成一个“ 函数值的 1-上链 ”。“ 整性条件 ”用同调的语言，就是说这个积分因子的 1-上链是闭的。闭上链一般称为“ 上循环 ”。所以在一般的纤维丛上，转移函数（积分因子）需要满足这个“ 上循环 ”条件。Cech 上同调可以看作好的开覆盖给出的那个单纯复形的上同调。

用数学语言总结一下：对于辛形式满足整性条件的辛流形(M,ω)，可以进行预量子化。首先，构造一个线丛和丛上一个联络，使得这个联络的曲率是$\mathrm{i}\omega/\hbar$. 然后，取线丛的所有光滑截面，组

成线性空间 V, 这些截面是 " 波函数 " 的推广。最后，对 M 上每一个光滑函数 f（经典力学变量），构造作用在 V 上的算子 $\hat{f} = \mathrm{i}\hbar\nabla_{X_f} + \mathcal{M}_f$. 这些算子满足 Dirac 量子条件，且常数变量对应到常数算子。

虽然这里的数学很漂亮，但这还不是真正的量子化。要同量子力学原理相一致，需要去掉一些 " 波函数 "（截面），还要在剩下的截面之间定义内积，使量子力学的概率解释有效。