漫谈几何量子化（九）几何

观察 Poisson 括号的形式，发现它隐含正则坐标和正则动量的反对称。这种反对称性被抽象为流形上的一个“ 二阶外微分形式 ”

$$\omega = \sum_i dq^i \wedge dp_i$$

它具有以下性质：它是闭形式，$d\omega = 0$; 非退化；它是恰当形式，$\omega = d(\sum q\, dp) = d(-\sum p\, dq)$.

如果想推广到一般流形，第三条性质似乎不是那么必要。仅凭前两条，已经基本可以模拟所有 Hamilton 力学的特征。带有这么一个闭的，非退化 2－形式的流形就叫做“ 辛流形 ”，这个形式就叫做“ 辛形式 ”。

现在用流形上整体的语言定义 Poisson 括号。首先，注意到辛形式是非退化的，所以我们可以利用它来实现“ 指标升降 ”，用数学的话来说，实现切空间和余切空间的同构。它可以把一个微分转化成一个切向量场。流形上的每个光滑函数给出一个微分 df, 用辛形式对偶一下，就得到由 f 给出的切向量场 X_f，满足如下等式，

$$\omega(X, X_f) = df(X) \qquad \forall X$$

要看到它跟 Poisson 括号的关系，需要 Darboux 定理：辛流形里每一点附近都存在一个局部坐标系，使得辛形式在该坐标系下具有之前写下的标准形式。这个定理给出一个好的局部坐标系，在这个坐标系下计算，

$$X_f = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i} \right)$$

非常明显，Poisson 括号应该定义为

$$\{f, g\} = X_f\ g = dg(X_f) = \omega(X_f, X_g).$$

从这个定义立即看到双线性，反对称和 Leibniz 法则。要证明 Jocobi 恒等式，需要注意到 $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0, \quad \forall f \in C^\infty(M)$. 即，光滑函数通过辛形式给出的切向量场保持辛形式。一个重要推论是，

$$[X_f,\ X_g] = X_{\{f,g\}}$$

这个式子是如此接近 Dirac 量子条件。可以预料到它将直接与量子化相关。

Hamilton 力学如果用几何的语言来描述，就是说，辛流形上有一个特殊的光滑函数，叫做 Hamilton 函数，它通过辛形式产生的切向量场就是 Hamilton 正则方程。这组方程的解，几何上就是相应的切向量场生成的流形的单参数光滑同胚群，它描述系统的 “ 相 ” 随时间的演化。