漫谈几何量子化（三）源头

先从有限维自由度系统的量子化说起。最简单的是一维谐振子，其 Hamiltonian 是

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

经典相空间是余切丛$(T^*\mathbb{R},\ \Omega = dq \wedge dp)$, 正则量子化把坐标和动量看成算子，满足交换关系

$$[Q, P] = \mathrm{i}\hbar\{q, p\} = \mathrm{i}\hbar.$$

如果要求这个系统描述一个粒子的运动，态空间必须是不可约的，而以上交换关系的所有不可约表示都等价于前面提到的 Schrodinger 表示，表示空间是坐标的平方可积函数空间，坐标表示为乘法算子，动量表示为求导算子。Hamiltonian 现在成为一个线性微分算子，如果要求波函数在无穷远消失，Hamiltonian 的谱必须是离散的，而它本身是正定算子，所以存在最小本征值，所属的本征波函数代表的态叫做 " 真空 "，可以显式解出。

从数学上来说，以上过程相当于先利用经典相空间上的辛形式定义出一个 Lie 代数 --- Heisenberg 代数，再直接运用 Stone-von Neumann 定理写出 Heisenberg 代数的唯一自伴表示，表示空间里的真空态则由 Hamiltonian 的本征值问题给出。用物理学的说法，这相当于在 Schrodinger 表象或者（等价的）动量表象中进行计算。

现代量子力学教材上常见的是使用 Fock 表象，即构造复变量

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ \left(q + \frac{\mathrm{i}p}{m\omega}\right),$$

正则量子化把这个复变量看作算子，满足$[Z, \overline{Z}] = 1$. 如果有一态矢满足$Z|0\rangle = 0$, 那么所有矢量

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{Z}^n\ |0\rangle$$

组成以上交换关系的不可约表示，从而可以被视为单粒子系统的态空间＊。容易看到在 Schrodinger 表象下，$|0\rangle = \mathrm{e}^{-m\omega q^2/2\hbar}$ 满足以上湮灭方程。既然对所有多项式 p, $p(\overline{Z})\ \mathrm{e}^{-m\omega q^2/2\hbar} \in L^2(\mathbb{R})$, 而且它们组成稠密子集，所以从代数上构造的 Fock space 可以等同于从分析上构造的 Schrodinger 表示空间。

$$\overline{\left\{p(\overline{Z})\ |0\rangle\right\}} = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{Z}^n\ |0\rangle\right\} = L^2(\mathbb{R}).$$

从数学上来说，Fock 表象相当于在经典相空间上选取了一个“ 复结构 ”，使经典相空间成为一个复空间，而系统的态空间可以视为这个复空间上所有的“ 反全纯函数 ”组成的空间。这个空间如果要跟 Schrodinger 表象中的平方可积空间保持一致，我们选取的这个复结构就最好跟原来的辛结构有很密切的关系，这种“ 好 ”的复结构叫做辛空间上的“ 相容复结构 ”，后面再详细说明。

以上这两种从经典相空间构造态空间和真空态的方式，在数学中被总结为“ 实极化 ”和“ 复极化 ”，这里的“ 极化 ”当然跟物理学里的“ 极化 ”没有任何关系，我不知道这个名称的来源是什么。

*［注］：这种构造不可约表示的方法是 Lie 代数表示论的核心方法，“ 最高权表示 ”。至于是数学家先找到这种方法还是物理学家先找到这种方法，我没有仔细考证，不过 Elie Cartan 对 Lie 代数的分类应该在量子力学出现之前。