漫谈几何量子化（十五） 时间演化

说年底之前要完成这个系列的，一转眼就到了。逝者如斯夫，不舍昼夜。各位一定要珍惜自己的黄金时代，多学多想多做。

在这一节也许应该谈谈 Schrodinger 方程了。一般认为这是量子力学最核心的基本假设。几何量子化理论试图从经典几何的概念“重构” Schrodinger 方程，注意，是重构，而不是导出。正如 sage 所说，量子化程序本身就是假设，即令通过这套程序使 Schrodinger 方程成为推论，也只能说明关于量子化程序的假设同关于 Schrodinger 方程的假设等价。何况，“极化” 的过程导致，并不是所有的经典力学变量都能实现为量子力学变量，特别的，并不是任意形式的经典 Hamiltonian 都能实现为态空间上的自伴算子。

现在回忆几何量子化程序。从一个辛流形出发，构造一个 “预量子化” 复线丛 L，再给这个线丛一个 Hermitian 度量（即，在每一点定义复向量的长度），使得这个 Hermitian 度量的曲率正好是 $-i\omega$. 然后再取辛流形上一个 ω 相容的复结构（复极化），这样 L 成为一个全纯线丛。取这个线丛的所有全纯且平方可积的截面，组成系统的 Hilbert 空间 V。

Schrodinger 方程给出系统状态的时间演化。在经典力学里，系统的时间演化由 Hamilton 函数的 “相流” 给出，即，由 Hamilton 函数 H 得到向量场 X_H, 使得 $\omega(X,X_H)=dH(X)$. 如果 X_H 生成单参数变换群 $\rho_t:M\to M$, 则必有 $\rho_t^*\omega=\omega$，即，它一定是单参数正则变换群，它就是经典系统的时间演化。由向量场得到单参数变换群的过程，就是求解 Hamilton 正则方程组的过程。

如果假设 ρ_t 保持 “极化”（在复极化的情形，就是保持复结构，即每一变换都是全纯同胚），那么线丛 L 的每一平方可积全纯截面 s 被拉回到 L 的另一平方可积全纯截面 ρ_t^*s, 取值为 $(\rho_t^*s)(x)=\rho_t^{-1}s(\rho_t x)$。而截面的时间演化是这个拉回的逆，$\widetilde{\rho}_t=(\rho_t^*)^{-1}:V\to V$, 满足方程

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\rho}_t s=\mathcal{L}_{X_H}s=-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathcal{H}}\,\widetilde{\rho}_t s$$

这里 $\widehat{H}=$ 就是函数 H 的量子对应 $i\hbar\nabla_{X_H}+\mathcal{M}_{\mathcal{H}}$.

以上是 Schrodinger 方程，但是这里假设了 ρ_t 保持极化。这个条件太强，以至于在最简单的情形下都不成立。所以需要寻找另外的办法来重构 Schrodinger 方程。如果 ρ_t 不保持极化，那么问题在于 $\widetilde{\rho}_t s$ 不再是全纯截面，但它仍然在一个更大的 Hilbert 空间里，就是 L 的所有（不必全纯）平方可积截面空间 U. 令 pr 为 U 到 V 的正交投影，则总可以定义 $s_t=pr(\widetilde{\rho}_t s)\in V$. 只是在正交投影以后，不能保证 $|s_t|=|s|$, 时间演化不一定幺正，或者说 Hamiltonian 不一定能实现为自伴算子。幸运的是，对物理中经常出现的 Hamiltonian, 这样定义的演化正好是幺正的。这个巧合还不能从数学角度理解。