# 漫谈几何量子化（十，十一，十二）

漫谈几何量子化（十）量子条件

“ 量子化 ” 问题在数学上可以这么说：给一个辛流形$(M,\omega)$, 希望构造一个 Hilbert 空间，使得 M 上的函数对应到这个 Hilbert 空间上的算子，$f\mapsto\hat{f}$, 满足以下条件：（1）线性。函数的加法和数乘保持为相应算子的加法和数乘。（2）常函数对应到常数算子。这样物理常数才能作用于波函数。（3）Dirac 量子条件$[\hat{f},\hat{g}]=\mathrm{i}\hbar\widehat{\{f,g\}}$.

把量子条件和上一节提到的 Poisson 括号同切向量场的关系作一比较，发现$f\mapsto\mathrm{i}\hbar X_f$满足线性和量子条件。切向量场作为算子，作用于 M 上的光滑函数。包含光滑函数的 Hilbert 空间，最方便的当然是平方可积函数空间$L^2(M)$. 好像胜利就在眼前。可惜，常函数对应的切向量场是 0, 不符合条件（2）。立即想到的办法是，稍微修正一下，$f\mapsto\mathrm{i}\hbar X_f+\mathcal{M}_f$. 这里$(\mathcal{M}_f\psi)(x)=f(x)\psi(x)$. 这样条件（2）满足了，再计算交换子，

$$[\mathrm{i}\hbar X_f+\mathcal{M}_f,\ \mathrm{i}\hbar X_g+\mathcal{M}_g]=\mathrm{i}\hbar\Big(\mathrm{i}\hbar X_{\{f,g\}}+2\mathcal{M}_{\{f,g\}}\Big)$$

第一遍算的时候肯定会怀疑算错了，一切都那么完美，除了那个2倍。还需要再想办法修正。首先，必须保证条件（2），所以修正项最好含有$X_f$. 然而希望消去的是一个 “ 乘上函数 ” 的算子，那么修正项最好也是乘上函数。从切向量场得到函数的办法，无非是用一个 1-形式$\theta$作用一下。看看最简单的例子，粒子的动量是相空间上的函数，它决定的切向量场是$-d/dq$, 按照现在的计划，$p\mapsto-\mathrm{i}\hbar d/dq-\theta(-d/dq)+p$. 跟 Schordinger 表示相比较，发现$\theta=-p\,dq$. 它是辛形式的 “ 原形式 ”，$d\theta=dq\wedge dp$. 从这个例子得到提示，假设有一个 1-形式满足$d\theta=\omega$, 那么可以把相空间上的函数对应到算子

$$\hat{f}=\mathrm{i}\hbar X_f-\mathcal{M}_{\theta(X_f)}+\mathcal{M}_f$$

计算交换子，

$$[\hat{f},\hat{g}]=\mathrm{i}\hbar\Big(\mathrm{i}\hbar X_{\{f,g\}}-\mathcal{M}_{X_f(\theta(X_g))}+\mathcal{M}_{X_g(\theta(X_f))}+2\mathcal{M}_{\{f,g\}}\Big)$$

再应用外微分公式

$$\omega(X_f,X_g)=d\theta(X_f,X_g)=X_f(\theta(X_g))-X_g(\theta(X_g))-\theta([X_f,X_g])$$

就得到完美结果$[\hat{f},\hat{g}]=\mathrm{i}\hbar\widehat{\{f,g\}}$. 如果辛形式的确有一个 “ 原形式 ”，那么以上构造就给出了 Hilbert 空间和代表可观察量的算子。需要指出，这并没有得到跟量子力学原理吻合的量子化，只要计算一下粒子的正则坐标对应的算子就能看到。其原因是，现在的 Hilbert 空间是坐标和动量的

函数，而量子力学原理要求波函数要么只是坐标的函数，要么只是动量的函数。因此以上过程称为“ 预量子化 ”。

一般的辛流形，其辛形式并不是恰当的，就是说，不存在一个“ 原形式 ”。但是如果限制在局部，就像欧氏空间一样，闭形式总是恰当形式。因此在每个局部都可以进行预量子化。这显然强烈依赖于局部坐标的选取。怎样把这些局部的数据“ 拼接 ”起来是下一节要说的问题。