漫谈几何量子化（七，八，九）

漫谈几何量子化（七）流形

经典相空间一般都是辛空间，从历史角度来说就是可以写下 Hamilton 运动方程的空间。数学上把量子化总结为从一个辛空间出发构造 Hilbert 空间及其上一系列满足 Heisenberg 交换关系的算子的问题。谐振子的例子里，这个辛空间本质上只是一个向量空间，物理学家往往称这种空间为“ 拓扑平凡的 ”。数学上非常感兴趣的是，给一个“ 拓扑非平凡 ”的辛空间，量子化到底是什么意思。

一类拓扑非平凡的空间都落在一个比较好的范畴中，它们在数学上就叫“ 流形 ”。一个 n 维“ 流形 ”是一个拓扑空间，它的每个局部在拓扑上都等价于 $\mathbb{R}^n$ 的开集，就是说，局部上每个点对应到 $\mathbb{R}^n$ 的一个点，有一组坐标，这就是局部坐标系。两个局部重叠的地方，就有两个局部坐标系，它们相差一个坐标变换。由以上定义，这些坐标变换自然是拓扑等价（即双方连续的一一对应）。如果其中某些坐标变换还是无穷次可微的，而且它们涉及到的局部可以合起来覆盖整个流形，那么这个流形就是“ 光滑 ”的。把所有互为光滑变换的局部坐标系都收集起来，它们叫做这个光滑流形的“ 容许坐标系 ”。

在光滑流形上，可以谈论“ 光滑 ”函数。一个函数如果在一个容许坐标系下是光滑的，那么在另一个重叠的容许坐标系下也光滑，因为坐标变换是光滑的。通常这么叙述这种好处：光滑性不依赖于局部坐标选取。在流形上，与局部坐标选取无关的“ 概念 ”，“ 性质 ”，和与局部坐标变换相容的“ 量 ”，才是有几何意义的。这一点，微分几何的创始人 Gauss, Riemann 应该都心里有数。Einstein 在他的物理学里也强调了这一点。

在流形上没有线性结构，不能把两个点加在一起，也不能连接两个点成为一个“ 向量 ”。不过在每一点的局部，就好像在欧氏空间一样，可以在这一点对函数“ 求方向导数 ”，这种运算是局部函数空间上的线性算子。以它们为模型的整体对象叫做在该点的“ 切向量 ”。在局部上还有一个有趣的东西就是函数在一点的“ 微分 ”，

$$df_a = \sum_i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_a dx^i$$

以它为模型的整体对象叫做一个“ 余切向量 ”（或者仍然叫做微分）。然后顾名思义，一个“ 光滑切向量场 ”就是在每一点有一个切向量，以光滑方式依赖于基点。对偶的概念是“ 微分 1—形式 ”，即，光滑余切向量场。在局部坐标系下，切向量场和微分 1-形式通常写成

$$X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \xi = \xi_i(x)\,dx^i$$

这里用了 Einstein 求和约定。系数都是局部坐标系里的光滑函数（但不是整体的光滑函数，将随坐标变换而变）。

在每一点上，由方向导数和微分组成的多重线性对象，以整体方式定义以后，叫“ 张量 ”。张量场跟前面类似。搞数学的喜欢用整体记号，就像上面那个式子一样，把分量和基写在一起，变换局部坐标的时候，基底和分量同时变，而它们的组合不变，从而左边的字母代表一个不依赖于局部坐标系的量；搞物理的喜欢只写出分量而省略基底，这样的记号明显依赖于局部坐标系。