泉州师专学报 自然科学版
1998年 第1期

阿达玛(*Hadamard*)不等式的证明及几何意义

张 锦 川

(泉州教育学院)

摘要 本文阐述阿达玛(*Hadamard*)不等式的几种证法，并指出此不等式在*Euclid*空间中的几何意义.

关键词 行列式不等式 (半)正定矩阵 *Gram* 行列式 向量正交

1 引言与引理

1893年，阿达玛(*J. Hadamard*)给出一个著名的行列式不等式[1]，即

定理1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$为一 n 阶实矩阵，那么

$$|detA|\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

并且等式成立之充要条件为 A 的 n 个非零行向量两两正交，或者包含零行.

Hadamard 不等式在线性代数中的重要地位及意义是人所共知的，就国内而言，人们长期使用的、权威的高等代数(线性代数)教材、教参对此都有涉及(如[2]——[8])，而且是不可或缺的内容.而它从不同侧面的推广与改进工作，近二十年来，仍在不断地进行[9]—[15].因此，本文综合一些资料及自己的浅识，给出了此不等式(包括利用分析、拓扑性质)的多种不同证法，并且指出该不等式在 *Euclid* 空间中有着明确的几何意义。关于它的推广及证明，将另文阐述.

以 $C^{m\times n}(R^{m\times n})$表示复(实)$m\times n$ 矩阵之集合，$detA$ 表正方阵 A 的行列式，I_n 表 n 阶单位阵，A^*表 A 的伴随阵，A^T 表矩阵 A 的转置，A^H 表 A 的共轭转置，等等.A 为正定阵与 *Hermite* 正定阵分别指实阵与复阵情形.

引理1 设 B 是一 n 阶正定阵，则二次型

$$f(X)=det\begin{bmatrix}B & X\\ X^T & 0\end{bmatrix},X^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{2}$$

是负定的.

证1 将(2)中的行列式依次按最后一行与最后一列展开，得

$$f(X)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}B_{ij}x_ix_j=-X^TB^*X,$$

B_{ij}为 B 的代数余子式.由 B 的正定性知 B^*是正定的，故引理成立.

证2 对(2)作替换 $X=BY$，得

$$f(X)=det\begin{pmatrix}B & BY\\ X^T & 0\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix}B & 0\\ X^T & -\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\end{pmatrix}=(-detB)X^TY=(-detB)Y^TBY.$$

故由 B 的正定性知引理成立.

证 3 由 *Schur* 公式[16]得

$$f(X)=det\begin{pmatrix}B & X\\ X^T & 0\end{pmatrix}=detB(-X^TB^{-1}X).$$

又由 B 正定知 B^{-1} 正定,故引理得证.

引理 2 设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$ 是一 n 阶正定阵,则 $detB\leqslant\prod_{i=1}^{n}b_{ii}$,并且等式成立的充要条件为 B 是一对角阵.

证 1 当 $n=1$ 时,引理成立.假定对 $n-1$ 阶正定阵引理已证,则对于 n 阶正定阵,记 $B=\begin{array}{cc}\begin{array}{cc} n-1 & 1\end{array} & \\ \begin{pmatrix}B_{n-1} & \beta\\ \beta^T & b_{nn}\end{pmatrix} & \begin{array}{c} n-1\\ 1\end{array}\end{array}$,则 B_{n-1} 是 $n-1$ 阶正定阵,且由引理 1 得

$$detB=det\begin{pmatrix}B_{n-1} & 0\\ \beta^T & b_{nn}\end{pmatrix}+det\begin{pmatrix}B_{n-1} & \beta\\ \beta^T & 0\end{pmatrix}\leqslant b_{nn}detB_{n-1}$$

且等式成立的充要条件为 $\beta=0$.从而由归纳假定知此时引理成立.

证 2 由块初等变换及 B 的正定性得

$$\begin{aligned}detB&=det\begin{pmatrix}B_{n-1} & \beta\\ \beta^T & b_{nn}\end{pmatrix}=det\left[\begin{pmatrix}B_{n-1} & 0\\ \beta^T & b_{nn}-\beta^TB_{n-1}\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n-1} & B_{n-1}^{-1}\beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]\\&=detB_{n-1}(b_{nn}-\beta^TB_{n-1}^{-1}\beta)\leqslant b_{nn}detB_{n-1},\end{aligned}$$

且等式成立的充要条件为 $\beta=0$,从而由归纳法易见本引理成立.

注 1 利用极限可证得 $detB\leqslant b_{nn}detB_{n-1}$.事实上,设 $C=\begin{pmatrix}B_{n-1} & \beta\\ \beta^T & b_{nn}+\lambda\end{pmatrix}$,其中 $\lambda=\varepsilon-\dfrac{detB}{detB_{n-1}}$,$\varepsilon$ 为任意正实数,则 $detC=detB+\lambda detB_{n-1}=\varepsilon detB_{n-1}>0$,所以 C 是正定的,从而 $b_{nn}+\varepsilon-\dfrac{detB}{detB_{n-1}}>0$,即 $detB<b_{nn}detB_{n-1}+\varepsilon detB_{n-1}$,令 $\varepsilon\to0$,则得 $detB\leqslant b_{nn}detB_{n-1}$.

利用 *Binet*—*Cauchy* 公式可得

引理 3 设 $M\in C^{m\times n}$,则 MM^H 是一个 *Hermite* 半正定阵,特别地,若 M 是行满秩的,则 MM^H 是 *Hermite* 正定的.

引理 4 设 M 为一 n 阶 *Hermite* 正定阵,N 为一 n 阶 *Hermite* 半正定阵,则 $det(M+N)\geqslant detM$,并且,等式成立之充要条件为 $N=0$.

证 先考虑 $M=I_n$ 的情形.若 $N=0$,则 $det(I_n+N)=detI_n=1$.若 $N\neq0$,设 $rankN=r$,由[5]知 N 的所有主子式全非负,且至少有一 r 阶主子式大于 0.又由[4],行列式 $det(I_n+N)$ 等于 I_n 的所有可能的子式$\triangle$与 N 中相当于$\triangle$位置的子式的代数余子式$\triangle^*$乘积之和,注意到 I_n 的主子式全为 1,且其它子式全为 0,而 N 的 i 阶主子式的代数余子式就是它的余子式.因此,$det(I_n+N)$ 等于 $detI_n$ 与 N 的所有主子式之和,故 $det(I_n+N)>1$.因此,当 $M=I_n$ 时引理成立.

一般地，可设 $M=PP^H$，P 是一 n 阶非奇异阵，于是注意到 $P^{-1}N(P^{-1})^H$ 是 Hermite 半正定的，可有

$$\begin{aligned}det(M+N) &= det(P(I_n+P^{-1}N(P^{-1})^H P^H)\\ &=det(PP^H)det(I_n+P^{-1}N(P^{-1})^H)\geqslant detM,\end{aligned}$$

并且等式成立的充要条件是 $P^{-1}N(P^{-1})^H=0$，即 $N=0$.

引理 5 设 $m+n$ 阶分块矩阵 $K=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} m & n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} M & L \\ L & N \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ n \end{array} \end{array}$ 是 Hermite 正定的，则

(Ⅰ)在 K 中 M 的 Schur 补[15] $K/M=N-LM^{-1}L^H$ 是 Hermite 正定的；

(Ⅱ) $detK\leqslant detMdetN$，且等式成立的充要条件为 $L=0$.

证 因有 $K=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ LM^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K/M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & M^{-1}L^H \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$，所以(Ⅰ)真，且

$$detK = detMdetK/M. \tag{3}$$

由引理 3 易见 $LM^{-1}L^H$ 是 Hermite 半正定的，因而由(Ⅰ)及引理 4 得

$$detN = det(K/M + LM^{-1}L^H) \geqslant detK/M \tag{4}$$

且等式成立的充要条件是 $LM^{-1}L^H=0$，而 $L=0$，故由(3)、(4)知(Ⅱ)真.

引理 5′ 设 $M=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} & \\ \begin{pmatrix} N_1 & N_3^T \\ N_3 & N_2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k \\ n-k \end{array} \end{array}$ 是一 n 阶正定阵，则 $detM\leqslant detN_1+detN_2$，且等式成立的充 要条件是 $N_3=0$.

证 1 此显然为引理 5 之推论.

证 2 可利用 Lagrange—Peubmpauu 定理证之.

Ⅰ)若实对称阵 $M=(m_{ij})_{n\times n}$ 的顺序主子式 $detM_k(k=1,2,\cdots,n-1)$ 全不为 0，则二次型

$$f(X) = X^TMX = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j = \sum_{k=1}^n(detM_k/detM_{k-1})y_k^2$$

此处 $detM_0=1$，且 $y_k = x_k + \sum_{j=k+1}^n c_{kj}x_j, k=1,2,\cdots,n$. 这称作变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的 Jacobi 变换，其中 c_{kj} 是 m_{ij} 的有理函数. 其次，当 M 是正定阵时，利用上面的 Jacobi 变换于广义积义

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-X^TMX}dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

由重积分变量替换的 Jacabi 公式[17]得

$$Ⅱ)J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{k=1}^n(detM_k/detM_{k-1})y_k^2}dy_1dy_2\cdots dy_n = \prod_{k=1}^n\left(\frac{detM_k}{detM_{k-1}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz\right)^n$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(detM)^{\frac{1}{2}}}.$$

最后，对积分 J_n 作变量替换 $\begin{cases} x_i=-y_i, i=1,2,\cdots,k; \\ x_i=y_i, i=k+1,\cdots,n \end{cases}$

且令 $Y_1^T=(y_1,\cdots,y_k)$，$Y_2^T=(y_{k+1},\cdots,y_n)$，$b=e^{2\sum_{i=1}^k\sum_{j=k+1}^n m_{ij}y_iy_j}$，则得

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Y_1^TN_1Y_1-Y_2^TN_2Y_2}bdy_1\cdots dy_n$$

于是，注意到积分与变量的的选取无关以及 $b+b^{-1}\geqslant 2$，其中取等号的充要条件是 $m_{ij}=0,i=1,\cdots,k,j=k+1,\cdots,n$，那么，由 Ⅱ）有

$$\begin{aligned}2J_n&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Y_1^TN_1Y_1-Y_2^TN_2Y_2}(b+b^{-1})dy_1\cdots dy_n\\&\geqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Y_1^TN_1Y_1}dy_1\cdots dy_k\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}e^{-Y_2^TN_2Y_2}dy_{k+1}\cdots dy_n\\&=2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(detN_1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\pi^{\frac{n-k}{2}}}{(detN_2)^{\frac{1}{2}}}=2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(detN_1detN_2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

故引理 5′得证.

引理 6 设 $M=\begin{pmatrix}M_1\\M_2\end{pmatrix}\in R^{k\times n}$ 为一行满秩矩阵，其中 $M_1=(m_{11},\cdots,m_{1n})$，则

$$detMM^T\leqslant detM_1M_1^TdetM_2M_2{}^T \tag{5}$$

并且等式成立之充要条件为 M_1 与 M_2 的各行正交.

证 先考虑 $k=n$ 的情形. 由行列式的依行展开定理，*Cauchy*—Рунхковкп11 不等式及行列式的 *Binet*—*Cauchy* 公式可得

$$detMM^T=(detM)^2=(\sum_{i=1}^n m_{1i}M_{1i})^2\leqslant\sum_{i=1}^n m_{1i}^2\sum_{i=1}^n M_{1i}^2=detM_1M_1^TdetM_2M_2^T,$$

且等式成立之充要条件为 $(m_{11},\cdots,m_{1n})=t(M_{11},\cdots,M_{1n}),t\in R$. 从而 $\sum_{i=1}^n m_{1i}m_{ji}=t\sum_{i=1}^n M_{1i}=0,j=2,\cdots,n$. 此时引理得证.

当 $k<n$ 时，记以齐次线性方程组 $MX=0$ 的一个基础解系为行向量的矩阵为 N（为 $(n-k)\times n$ 矩阵，且 $MN^T=0$），令 $P=\begin{pmatrix}M\\N\end{pmatrix}$，则 $detPP^T=detMM^TdetNN^T$，且

$$detPP^T\leqslant detM_1M_1{}^Tdet\begin{pmatrix}M_2\\N\end{pmatrix}(M_2{}^T,N^T)=detM_1M_1{}^TdetM_2M_2{}^TdetNN^T$$

从而 $detMM^TdetNN^T\leqslant detM_1M_1^TdetM_2M_2{}^TdetNN^T$，并且等式成立的充要条件是 M_1 与 M_2 的各行正交. 又因 N 是行满秩的，有 $(n-k)$ 阶非奇异阵 Q 使得 $N=Q(I_{n-k},0)$，所以 $NN^T=QQ^T$. 而 NN^T 正定. 故由上面不等式即可推得(5).

引理 7 设 α 是 m 维 *Euclid* 空间 V 的任一向量，$W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$ 是 V 的一个 k 维子空间，记 $\alpha=\alpha_W+\alpha_N$，其中 $\alpha_W\in W,\alpha_N\perp W$，那么向量长 $|\alpha_N|$ 叫做 α 到 W 的距离，它满足：$|\alpha_N|^2=G(\alpha_1,\cdots\alpha_k,\alpha)/G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$，这里 $G(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 表示向量 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 的 *Gram* 行列式.

证 设 $\alpha_W=\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$，其中 $x_i\in R$. 由 $\alpha_N\perp\alpha_i$ 得 $\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_1)x_1+\cdots+(\alpha_k,\alpha_1)x_k=(\alpha,\alpha_1)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_1,\alpha_k)x_1+\cdots+(\alpha_k,\alpha_k)x_k=(\alpha,\alpha_k)\end{cases}$

因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是 W 的一个基而 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)\neq 0$，故由 *Cramer* 法则得

$$\alpha_W=\frac{1}{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}\sum_{i=1}^k det\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1)&\cdots&(\alpha,\alpha_1)&\cdots&(\alpha_k,\alpha_1)\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\(\alpha_1,\alpha_k)&\cdots&(\alpha,\alpha_k)&\cdots&(\alpha_k,\alpha_k)\end{pmatrix}\alpha_i,$$

于是

$$|\alpha_N|^2=(\alpha_N,\alpha_N)=(\alpha_N,\alpha)$$

$$=(\alpha,\alpha)-\sum_{i=1}^{n}det\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & \cdots & (\alpha,\alpha_1) & \cdots & (\alpha_k,\alpha_1)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_1,\alpha_k) & \cdots & (\alpha,\alpha_k) & \cdots & (\alpha_k,\alpha_k)\end{pmatrix}\frac{(\alpha_i,\alpha)}{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}=\frac{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha)}{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}.$$

2 *Hadamard* 不等式的几种证法

注意到 *Hadamard* 不等式的正确性,我们只需证明

定理 1′ 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为一 n 阶实非奇异阵,则

$$(detA)^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2) \tag{6}$$

而且等式成立之充要条件为 A 的 n 个行向量两两正交.

下面是这个这个定理的几种证法.

证法 1 基于引理 1 的证 1、引理 2 的证 1,并注意到 AA^T 是正定的,由引理 2 及$(detA)^2=detAA^T$ 立知定理 1′成立.

证法 2 据引理 1 的证 2、引理 2 的证 1,注意到 AA^T 是正定的,由引理 2 及$(detA)^2=detAA^T$立得定理 1′.

证法 3 据引理 1 的证 3、引理 2 的证 1,注意到 AA^T 是正定的,由引理 2 及$(detA)^2=detAA^T$可推得定理 1′.

证法 4 据引理 2 的证 2,注意到 AA^T 是正定的,由引理 2 及$(detA)^2=detAA^T$ 知定理 1′成立.

证法 5 注意到 AA^T 的正定性与$(detA)^2=detAA^T$,由引理 5 及第二数学归纳法可推得定理 1′.

证法 6 据引理 5′的证 2,注意到 AA^T 的正定性与$(detA)^2=detAA^T$,由引理 5′及第二归纳法知定理 1′成立.

证法 7 注意到$(detA)^2=detAA^T$,由引理 6 及第一归纳法知定理 1′成立.

证法 8 由引理 7 知$\frac{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha)}{G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)}=|\alpha_N|^2\leqslant(\alpha,\alpha)$,即

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha)\leqslant(\alpha,\alpha)G(\alpha_1,\cdots,\alpha_k) \tag{7}$$

且等式成立的充要条件为 α 与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 皆正交.

设非奇异阵 A 的 n 个行向量为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,则

$$(detA)^2=detAA^T=G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \tag{8}$$

将(7)式应用于(8)式,由第一归纳法即推得定理 1′.

证法 9 直接考虑(8)式的 *Gram* 行列式 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$,因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是线性无关的,而可将它们正交化,令

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_k=\alpha_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{(\alpha_k,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}\beta_i,i=2,\cdots,n \tag{9}$$

则有

$$G(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=det(\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n}^T$$

$$\overset{\text{行}\ T_{21}\frac{-(\alpha_2,\alpha_1)}{(\beta_1,\beta_1)}}{\underset{\text{列}\ T_{12}\left(\frac{-(\alpha_2,\alpha_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\right)}{=\!=\!=\!=\!=\!=}} det\begin{vmatrix} (\beta_1,\beta_1) & 0 & (\alpha_3,\beta_1) & \cdots & (\alpha_n,\beta_1) \\ 0 & (\beta_2,\beta_2) & (\alpha_3,\beta_2) & \cdots & (\alpha_n,\beta_2) \\ (\beta_1,\alpha_3) & (\beta_2,\beta_3) & (\alpha_3,\alpha_3) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\beta_1,\alpha_n) & (\beta_2,\alpha_n) & (\alpha_3,\alpha_n) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{行}\ T_{31}\left(\frac{-(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\right),T_{32}\left(\frac{-(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\right)}{\underset{\text{列}\ T_{13}\left(\frac{-(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\right),T_{23}\left(\frac{(-(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\right)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} det\begin{vmatrix} (\beta_1,\beta_1) & 0 & 0 & \cdots & (\alpha_n,\beta_1) \\ 0 & (\beta_2,\beta_2) & 0 & \cdots & (\alpha_n,\beta_2) \\ 0 & 0 & (\beta_3,\beta_3) & \cdots & (\alpha_n,\beta_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\beta_1,\alpha_n) & (\beta_2,\alpha_n) & (\beta_3,\alpha_n) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=det(diag((\beta_1,\beta_1),\cdots,(\beta_n,\beta_n)))=\prod_{i=1}^{n}|\beta_i|^2 \tag{10}$$

又由(9)式易见

$$|\beta_i|\leqslant|\alpha_i|,i=1,\cdots,n, \tag{11}$$

且等式成立之充要条件为 $\alpha_i\perp\alpha_j(i\neq j,1\leqslant i,j\leqslant n)$. 故由(9),(10),(11)知定理 1′成立.

证法 10 由 *Schmidt* 正交化(9),可知

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是一 n 阶非奇异实阵,则存在一正交阵 Q 与一上三角实阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$使得 $A=QR$,其中 r_{ii}满足 $0<r_{ii}\leqslant(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}},i=1,\cdots,n$. 且等式成立的充要条件是 A 的 n 个行向量两两正交.

从而$(detA)^2=(detQ)^2(detR)^2=\prod_{i=1}^{n}r_{ii}^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)$,定理 1′得证.

证法 11 记 $c_i=(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}{}^2)^{\frac{1}{2}},i=1,2,\cdots,n$,令

$$U=\left\{B=(b_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}\,|\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^2=c_i^2,i=1,2,\cdots,n,\right\},$$

把 U 作为 n^2 维度量空间 $R^{n\times n}$上的点集,U 是列紧的,且关于 n^2 个变量 b_{ij}的函数$(detB)^2$ 在 U 上连续,因此由[18]知$(detB)^2$ 在 U 上达到最大值.

设 $M=(m_{ij})_{n\times n}\in U$ 满足

$$(detM)^2\leqslant(detB)^2,\forall\ B\in U.$$

记 α_i 为 M 的第 i 行,$\beta_i=(M_{i1},\cdots,M_{in})$,则

$$(detM)^2=(\sum_{j=1}^{n}m_{ij}M_{ij})^2\leqslant|\alpha_i|^2|\beta_i|^2$$

且等式成立之充要条件为

$$\alpha_i=\lambda_i\beta_i,\lambda_i\in R. \tag{12}$$

今可断言,由于 M 的选择,α_i 与 β_i 必满足(12). 若不然,则$(detM)^2<|\alpha_i|^2|\beta_i|^2$. 此时用 $\lambda_i\beta_i$ 代替 M 的第 i 行,其中 $\lambda_i=\frac{c_i}{|\beta_i|}$,则所得的矩阵 $M_1\in U$,且有$(detM_1)^2=|\alpha_i|^2|\beta_i|^2$. 与 M 的选取矛盾.

因 M 满足(12),而当 $i\neq j$ 时有

$$(\alpha_i,\alpha_j)=\sum_{t=1}^{n}m_{it}m_{jt}=\lambda_i\sum_{t=1}^{n}m_{jt}M_{it}=0,$$

即 M 的 n 个行向量两两正交. 又此时

$$(detM)^2=detMM^T=det(diag((\alpha_1,\alpha_1),\cdots,(\alpha_n,\alpha_n)))=\prod_{i=1}^{n}c_i^2$$

故定理 1′得证.

3 *Hadamard* 不等式的几何意义

在 R^3 中,若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,则 *Gram* 行列式 $G(\alpha_1,\alpha_2)$ 就是以 α_1,α_2 为邻边的平行四边形面积的平方. 一般地,可定义:n 维 *Euclid* 空间中的 m 个线性无关的向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的 *Gram* 行列式 $G(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$,是为以 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为棱向量的 m 维超平行体的体积的平方(引理 7 说明了定义的合理性). 如此,*Hadamard* 不等式有着明确的几何意义

Euclid 空间中的 m 维超平行体的体积不大于它的棱向量长的乘积,并且等于其棱向量长乘积的充要条件为这些棱向量两两正交,即它是 m 维超长方体.

参 考 文 献

1 J. Hadamard, *Resolution d'une guestion relative aux determinants*, Bull. Sci. Math., 1893, 2:240—248.

2 北京大学数学系,高等代数(第二版),高等教育出版社,1988.

3 张禾瑞、郝钢新,高等代数(第三版),高等教育出版社,1983.

4 谢邦杰,线性代数,人民教育出版社,1978.

5 张远达,线性代数原理,上海教育出版社,1980.

6 屠伯埙,线性代数——方法导引,复旦大学出版社,1986.

7 周伯壎,高等代数,人民教育出版社,1966.

8 蒋尔雄等,线性代数,人民教育出版社,1978.

9 J. L. Lavoie, *A determinantal inequality involving the Moore—Penrose inverse*, Lin. Alg. Appl. 1980, 31:77—80.

10 George P. H. Styan, *On lavoie's determinantal inequality*, Lin. Alg. Appl. 1981, 37:77—80.

11 谢邦杰,*Hadamard* 定理在四元数体上的推广,中国科学(数学专辑),1979,1:88—93.

12 庄瓦金,四元数矩阵的分解与 *Lavoie* 不等式的推广,数学研究与评论,1986,6(4):23—25.

13 屠伯埙,*Hadamard* 定理在四元数除环上的改进,数学学报,1987,30(1):120—124.

14 孙玉祥,姜志生,关于 *Hadamard* 不等式的再改进,应用数学,1990,3(2):79—82.

15 黄礼平,关于四元数矩阵的行列式不等式,数学的实践与认识,1992,2:53—58.

16 R. W. Cottle, *Manifestations of the Schur Complement*, Lin. Alg. Appl., 1974, 8:189—211.

17 华罗庚,高等数学引论(第一卷第二分册),科学出版社,1965.

18 江泽涵,拓扑学引论(第一分册),上海科学技术出版社,1964.