求解微分方程的李对称方法

苏剑林

2013 年 11 月 26 日

目录

1 李对称方法简介

1870年前后，Marius Sophus Lie 认识到，许多解微分方程的方法可以利用群论结合起来. 李对称性方法（Lie Symmetry Methods）是现代非线性微分方程研究的核心. 它们使用了对称的概念以系统的方式产生解. 本文是一个关于李（Lie）对称方法的简要介绍。

相比其他特殊的积分技巧，李对称方法是绝妙的。首先，对称的思想是引人入胜的；其次，李对称方法是简洁的。比如，如果不用李对称方法，那么要总结目前二阶常微分方程积分技巧，要分为超过400种的形式讨论，而李对称方法将其简化为4种。事实上，李对称方法当初就是为了整理大量的各种求积微分方程的技巧而总结出来的。大量的证据表明：群理论是求解非线性微分方程解析解的唯一通用和有效的方法。当其他的一些积分方法失效的时候，群理论是求解微分方程的通用工具。李群方法的最大优点在于，在可解的情况下，群分析理论在处理线性和非线性方程的问题时是等同的。

关于李（Lie）方法的一个关键概念是对称群的一个无穷小生成元. 这一概念体现在本文中。

2 一阶常微分方程

11本章主要的目的是一阶常微分方程（ODE）

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

的积分，其中$y' = \frac{dy}{dx}$。通过探讨(1)的积分，建立李对称方法在解微分方程的基本思路和方法。

2.1 无穷小变换

考虑变换

$$\bar{x} = \varphi(x, y, \varepsilon), \bar{y} = \phi(x, y, \varepsilon) \tag{2}$$

其中$x=\varphi(x,y,0),y=\phi(x,y,0)$ 我们在$\varepsilon=0$附近展开（只考虑一阶无穷小）：

$$\begin{aligned}\bar{x}&\approx\varphi(x,y,0)+\xi(x,y)\varepsilon=x+\xi\varepsilon\\ \bar{y}&\approx\phi(x,y,0)+\eta(x,y)\varepsilon=y+\eta\varepsilon\end{aligned}\tag{3}$$

其中$\xi(x,y)=\frac{\partial\bar{x}}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0},\eta(x,y)=\frac{\partial\bar{y}}{\partial\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$。构造以下算子（又称无穷小生成元）

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}\tag{4}$$

该算子给出了函数$f(x,y)$在变换(2)下增量的线性主部，即

$$\begin{aligned}f(\bar{x},\bar{y})&\approx f(x,y)+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\varepsilon+\left(\frac{\partial f}{\partial\bar{y}}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}\right)\varepsilon\\ &=f(x,y)+\xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon+\eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}\varepsilon\\ &=f(x,y)+\varepsilon Xf(x,y)\end{aligned}\tag{5}$$

所以若$Xf(x,y)=0$，则$f(x,y)$在$(x,y)\mapsto(\bar{x},\bar{y})$的变换之下保持不变（精确到一阶无穷小），称$f(x,y)$ 容许无穷小生成元X。

2.2 正则坐标

可对算子X 进行变量代换进行化简。设

$$u=u(x,y),v=v(x,y)\tag{6}$$

，期望算符X变换成$\tilde{X}=\frac{\partial}{\partial v}$的简单形式。我们有

$$\begin{aligned}df&=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\\ &=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\\ &=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\end{aligned}$$

那么就有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}=\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\right)\\ &=\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial v}\\ &=(Xu)\frac{\partial}{\partial u}+(Xv)\frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

上式可以自然地推广到多个变量。我们令

$$\begin{aligned}Xu &= \xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ Xv &= \xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}=1\end{aligned}\tag{7}$$

从而达到我们的目的，使得$\tilde{X}=\frac{\partial}{\partial v}$。由方程组(7)生成的代换变量称为正则坐标，我们只需要上述线性偏微分方程组的一个特解就够了。

2.3 首次延拓

为了考虑微分方程的变换，我们需要知道导数的变换规律，即$y'=\frac{dy}{dx}\mapsto\bar{y'}=\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}$下的变换，这成为无穷小生成元(4)的首次延拓，具体过程如下。

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} &\approx \frac{d(y+\eta\varepsilon)}{d(x+\xi\varepsilon)}=\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+\frac{d\eta}{dy}\varepsilon}{1+\frac{d\xi}{dx}\varepsilon}\right)\\ &\approx\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{d\eta}{dy}\varepsilon\right)\left(1-\frac{d\xi}{dx}\varepsilon\right)\approx\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{d\eta}{dy}\varepsilon-\frac{d\xi}{dx}\varepsilon\right)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= y'+\zeta\varepsilon\\ \zeta &= \frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dx}y'=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}(y')^2\end{aligned}$$

延拓的意思是什么呢？这是我们考虑微分方程的一个方式，即将x,y和y'看成是相互独立的变量（而不是x,y在$\frac{dy}{dx}$ 一项中交缠），而$f(x,y,y')$ 便是关于变量x,y,y'的一个函数，而如果要考虑$f(x,y,y')$在(2)下的增量，就相当于考虑$f(x,y,z)$ 在$(x,y,z)\mapsto(\bar{x},\bar{y},z+\zeta\varepsilon)$下的增量（其中$z=y'$），于是无穷小生成元(4)相应地延拓为

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial y'}\tag{8}$$

于是我们有

$$f(\bar{x},\bar{y},\bar{y}')\approx f(x,y,y')+\varepsilon Xf(x,y,y')$$

所以相应地若$Xf(x,y,y')=0$，则$f(x,y,y')$在$(x,y)\mapsto(\bar{x},\bar{y})$的变换之下保持不变（精确到一阶无穷小），称$f(x,y,y')$ 容许无穷小生成元X。另外，最简单的无穷小生成元$\frac{\partial}{\partial v}$的首次延拓还是它自己。

2.4 方程的对称性

前面已经提到，如果在(2)的变换之下，$f(x,y)\equiv f(\bar{x},\bar{y})$，则$f(x,y)$具有一种对称性（不变意味着对称），同时$f(x,y)$也容许无穷小生成元(4)。拥有一种对称性即意味着一个容许无穷小生成元，但是同一个无穷小生成元可以对应着不同的对称性。

但是这本文我们更多考虑的是方程，情况有一些不同。考虑方程$f(x,y)=0$拥有对称性(2)，只需要$f(\bar{x},\bar{y})=0$ 即可，但未必有$f(x,y)\equiv f(\bar{x},\bar{y})$。比如方程$x+y=0$ 在伸缩变换$\bar{x}=e^{\varepsilon}x,\bar{y}=e^{\varepsilon}y$之下形式为$e^{-\varepsilon}(\bar{x}+\bar{y})=0$，本质上就是$\bar{x}+\bar{y}=0$，所以该方程拥有相应的对称性，但是$f(x,y)\not\equiv f(\bar{x},\bar{y})$。不仅如此，比如方程$x-y=0$，考虑变换$\bar{x}=e^{\varepsilon}x^2,\bar{y}=e^{\varepsilon}y^2$，可以计算$\bar{x}-\bar{y}=e^{\varepsilon}(x-y)(x+y)$，已知$x-y=0$，所以$\bar{x}-\bar{y}=0$，所以该方程具有相应的对称性，但是$\bar{x}-\bar{y}\not\equiv x-y$。

事实上，在李对称方法中，我们只需要考虑函数或方程所容许的无穷小生成元即可。如果方程$f(x,y)=0$容许无穷小生成元(4)，根据(5)，只需要

$$Xf(x,y)|_{f(x,y)=0}=0 \tag{9}$$

即只需要$Xf(x,y)$在$f(x,y)=0$的条件下等于0，而不需要$Xf(x,y)\equiv 0$。多元情况可以相应类比。如果方程$f(x,y,y')=0$容许X（此时X是首次延拓后的算子），那么

$$Xf(x,y,y')|_{f(x,y,y')=0}=0 \tag{10}$$

2.5 用对称性解微分方程

如果(1)容许无穷小生成元(4)，那么(1)便具有一种对称性。利用对称性可以对(1)进行积分，具体思路有两种：

2.5.1 正则坐标法

根据(10)，我们有

$$X\left[y'-f(x,y)\right]\big|_{y'=f(x,y)}=0 \tag{11}$$

由方程组(7)可以算出X的正则坐标(u,v)，在正则坐标之下，(1)变为$\frac{du}{dv}-g(u,v)=0$，同时无穷小生成元X变换为$\tilde{X}=\frac{\partial}{\partial v}$。而(10)相应地变为

$$\tilde{X}\left[\frac{du}{dv}-g(u,v)\right]\Bigg|_{\frac{du}{dv}=g(u,v)}=0$$

注意此时$\frac{du}{dv},u,v$是独立的变量，因此$\tilde{X}\left[\frac{du}{dv}-g(u,v)\right]=-\frac{\partial}{\partial v}g(u,v)$，这意味着$\frac{\partial}{\partial v}g(u,v)=0$，即$g(u,v)$不显含$v$，于是(1)变为了

$$\frac{du}{dv}=g(u) \tag{12}$$

，这是可以简单分离变量的形式：

$$v=\int\frac{du}{g(u)}$$

2.5.2 积分因子法

我们可以把(1)改写成$dy-fdx=0$，假设(1)的通积分为$\omega(x,y)=c$，则两边微分有$\frac{\partial\omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\omega}{\partial y}dy=0$，对比$dy-fdx=0$，我们得出存在积分因子$\mu=\mu(x,y)$，使得

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\mu f,\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mu \tag{13}$$

因此，找出积分因子也可以帮助我们求积(1)。然而，直接求解上述偏微分方程组往往比求解(1)更为复杂，因此用传统方法求解时我们往往只能凭借经验去猜测积分因子。不过，利用李对称分析，可以让我们很容易找出积分因子。

下面给出一个理解积分因子法的别致思路。

假设(1)容许无穷小生成元(4)，$\omega(x,y)=c$是(1)的通积分。考虑变量$u=\omega(x,y),v=v(x,y)$，$v(x,y)$是待定函数。由于$d\omega=0$，因此在这组变量之下(1)变为$\frac{du}{dv}=0$。因此(u,v)实际上就是最理想的正则坐标！根据正则坐标的定义方程组(7)，必有$X\omega=0$或$X\omega=1$。

另一方面，$0=\frac{d\omega}{dx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}f$，于是$X\omega=\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}=(\eta-\xi f)\frac{\partial\omega}{\partial y}$，由此就可以断定$X\omega=1$，因为如果$X\omega=0$将得到$\eta-\xi f=$

0或$\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$的平凡结果。因此$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{\eta-\xi f}$以及$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{f}{\eta-\xi f}$，也就是说，积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\eta-\xi f}$$

可见，李对称分析给出了求积分因子的简单公式。采用积分因子来积分(1)的方法更为直接，然而，它给我的感觉是似乎没有变量代换那样流畅自然。

2.6 计算对称性

从上面各小节的分析过程可以看出，李方法的核心是找到对称性，也就是发现方程所容许的无穷小生成元(4)。假设(1)容许(4)，那么就有(11)。而

$$\begin{aligned}X\left[y'-f(x,y)\right]&=\zeta-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}\\&=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}(y')^2-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}\\&=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)f-\frac{\partial\xi}{\partial y}f^2-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}\\&=0\end{aligned}$$

所以

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)f-\frac{\partial\xi}{\partial y}f^2 \tag{14}$$

这就是无穷小生成元的决定方程。为了求解(14)，不妨设$\eta=\xi f+\sigma$，代入化简得到

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+f\frac{\partial\sigma}{\partial y}=\sigma\frac{\partial f}{\partial y} \tag{15}$$

这看上去相当简单，但是为了得到它的通解，需要求解特征方程

$$dx=\frac{dy}{f}=\frac{d\sigma}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

这等价于先求解原来的微分方程，因此，这样的计算并没有改变求微分方程解的本质困难。当然，我们只需要(14)的一个特解，在很多情况下，ξ,η的形式相当简单（但往往σ的形式不那么简单），因此可以凭借猜测或者直觉等行为得出一个特解即可。

2.7 给定对称性的方程

由于发现微分方程对称性具有本质上的困难，因此我们通常是反过来，给定一种对称性（无穷小生成元(4)），看看哪些方程具有这种对称性。这部分也有两种不同的计算方法。

2.7.1 直接积分法

已知ξ和η可以求解偏微分方程(14)得到一类函数$f(x,y)$，从而找到容许(4)的一类方程$y'=f(x,y)$。但是这种方法计算量颇大。

2.7.2 正则坐标法

给定(4)的形式，就可以求出相应的一组正则变量(u,v)，并且根据(2.5.1)，方程(1)在正则坐标下变为(12)。将(12)换回以x,y为变量的形式，就得到了容许(4)的一类方程了。即

$$\frac{du}{dv}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy}{\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}y'}{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}y'}$$

所以有

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}y'}{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}y'}=g(u)$$

$g(u)$是u的任意函数。从上式可以解出$y'=f(x,y)$。

2.8 已知对称性的常微分方程

在此谨摘录一个来源于《微分方程与数学物理问题》的表格。

序号	方程	对称
1	$y' = F(kx+ly)$	$X = l\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}$
2	$y' = F(y/x)$	$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
3	$y' = x^{k-1}F(y/x^k)$	$X = x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}$
4	$xy' = F(xe^{-y})$	$X = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$
5	$y' = yF(ye^{-x})$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
6	$y' = \frac{y}{x} + xF(y/x)$	$X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}$
7	$xy' = y + F(y/x)$	$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$
8	$y' = \frac{y}{x+F(y/x)}$	$X = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$
9	$y' = \frac{y}{x+F(y)}$	$X = y\frac{\partial}{\partial x}$
10	$xy' = y + F(x)$	$X = x\frac{\partial}{\partial y}$
11	$xy' = \frac{y}{\ln x + F(y)}$	$X = xy\frac{\partial}{\partial x}$
12	$xy' = y[\ln y + F(x)]$	$X = xy\frac{\partial}{\partial y}$
13	$y' = \frac{y+xF(x^2+y^2)}{x-yF(x^2+y^2)}$	$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$

表 1: 常见的对称性及其对应方程

2.9 本章算例

考虑微分方程

$$y' = y + \frac{x^3}{y}$$

，容易检验它在$y \mapsto e^{2\varepsilon}y, x \mapsto e^{\varepsilon}$下保持不变（或者直接查阅(2.8)节的表格1）。这表明上述方程容许无穷小生成元$X = x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$。

利用(2.5.1)的正则坐标法，先求出X的正则坐标，即求解偏微分方程组$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, x\frac{\partial v}{\partial x} + 2y\frac{\partial v}{\partial y} = 1$，可以求出最简单的一个解是$u = \frac{y}{x^2}, v = \ln x$，或者写成$x = e^v, y = ue^{2v}$，在此坐标之下微分方程化简为

$$\frac{du}{dv} = 1 + \frac{1}{u} - 2u$$

这是可以直接简单积分的形式。

而利用(2.5.2)的积分因子法，求出积分因子$\mu(x,y) = \frac{1}{\eta - \xi f} = \frac{y}{(+x^2)(y-x^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+x^2} + \frac{1}{y-x^2}\right)$，于是$\omega = \int \mu dy = \frac{1}{6}\ln(2y+x^2) + \frac{1}{3}\ln(y-x^2) + c_1(x)$；另一方面$\omega = -\int(\mu f)dx = \frac{1}{6}\ln(2y+x^2) + \frac{1}{3}\ln(y-x^2) + c_2(y)$。两者的公

共部分即是$\omega = \frac{1}{6}\ln(2y+x^2) + \frac{1}{3}\ln(y-x^2)$，那么通解为

$$\omega(x,y) = \frac{1}{6}\ln(2y+x^2) + \frac{1}{3}\ln(y-x^2) = \frac{1}{6}\ln c$$

或者

$$(2y+x^2)(y-x^2)^2 = c$$

3　一阶常微分方程组

本章的目的是将一阶常微分方程（ODEs）的理论进行高阶推广，而处于一般性考虑，这里直接探讨积分一阶常微分方程组

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{16}$$

或者写成分量形式

$$\dot{x_i} = f_i(x,t)(i = 1,2,...,n) \tag{17}$$

这里x是$(x_1, x_2, ..., x_n)$的简写。

3.1　无穷小变换

仿照第一章的写法，先讨论类似(2)的变换

$$\bar{x}_i = \varphi_i(x,t,\varepsilon), \bar{t} = \varphi_t(x,t,\varepsilon) \tag{18}$$

这里也有$x_i = \varphi_i(x,t,0), t = \varphi_t(x,t,0)$。那么对应的无穷小变换为

$$\bar{x}_i = x + \xi_i(x,t)\varepsilon, \bar{t} = t + \xi_t(x,t)\varepsilon \tag{19}$$

其中$\xi_i(x,t) = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}, \xi_t(x,t) = \frac{\partial \bar{t}}{\partial \varepsilon}|_{\varepsilon=0}$。这对应于无穷小生成元

$$X = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \xi_t \frac{\partial}{\partial t} \tag{20}$$

这里用到了“爱因斯坦求和约定”，即重复的指标表示遍历1到n求和，即$a_i b_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)$。该无穷小生成元给出了函数$f(x,t)$ 在变换(18) 下增量的线性主部，即

$$f(\bar{x},\bar{t}) \approx f(x,t) + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\varepsilon + \xi_t \frac{\partial f}{\partial t}\varepsilon \quad = f(x,t) + \varepsilon X f(x,t) \tag{21}$$

所以若$Xf(x,t) = 0$，则$f(x,y)$在$(x,t) \mapsto (\bar{x},\bar{t})$的变换之下保持不变（精确到一阶无穷小），称$f(x,t)$ 容许无穷小生成元X。

3.2 正则坐标

对于多元的情况，同样可以找出正则坐标

$$u_i = u_i(x,t), \tau = \tau(x,t) \tag{22}$$

使得(20) 化简为$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t}$的简单形式。类似(2.2)节，我们有

$$\tilde{X} = (Xu_i)\frac{\partial}{\partial u_i} + (X\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}$$

我们令

$$\begin{cases} Xu_i = \xi_j \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \xi_t \dfrac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \\ X\tau = \xi_j \dfrac{\partial \tau}{\partial x_j} + \xi_t \dfrac{\partial \tau}{\partial t} = 1 \end{cases} \tag{23}$$

从而使得$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t}$，由方程组(23)生成的代换变量就是我们需要的正则坐标，我们只需要上述线性偏微分方程组的一个特解就够了。

3.3 首次延拓

对于多元情况我们同样可以考虑无穷小生成元(20)的首次延拓，但是在高阶微分方程中，算子的延拓只有概念上的意义。也就是说，我们只需要计算，无穷小生成元X遇到没有导函数的式子时，其形式就是(20)，当遇到有导函数的式子时，其形式就是(20)的延拓，至于延拓的具体形式是什么，并不需要在意。有兴趣的朋友可以仿照(2.3)节进行推演。（请注意使用爱因斯坦求和约定，不然重复写求和符号$\sum$会使得形式比较繁琐。）下面直接给出结果：

$$\begin{aligned} X &= \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \zeta_i \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \xi_t \frac{\partial}{\partial t} \\ \zeta_i &= \frac{d\xi_i}{dt} - \dot{x}_i \frac{d\xi_t}{dt} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \frac{\partial \xi_i}{\partial t} - \frac{\partial \xi_t}{\partial t}\dot{x}_i - \frac{\partial \xi_t}{\partial x_j}\dot{x}_j\dot{x}_i \end{aligned} \tag{24}$$

3.4 方程组的对称性

跟方程一样，方程组的对称性也和函数的对称性有所区别。如果方程组$f_i(x,t) = 0$容许无穷小生成元(20)，只需要

$$Xf_i(x,t)|_{f_1=0, f_2=0, \ldots, f_n=0} = 0 \tag{25}$$

即只需要$Xf_i(x,t)$在所有$f_i(x,t)=0$的条件下等于0，而不需要$Xf_i(x,t)\equiv 0$。如果方程组$f_i(x,\dot{x},t)=0$ 容许X （此时X是首次延拓后的算子），那么

$$Xf(x,\dot{x},t)|_{f_1=0,f_2=0,\dots,f_n=0}=0 \tag{26}$$

3.5 用对称性降一阶：正则坐标法

在一阶常微分方程中，我们说过可以用对称性来解微分方程，当推广到微分方程组时，情况有一点不同。已知方程组的一个对称性，我们可以把方程组降低一阶（一阶常微分方程降低一阶后就完全解出来了）。而且更特殊的是，尽管你有可能已知方程组的N个对称性，你却未必可以将方程组降低N阶。关于降多阶的情况，将在第三章系统讨论。本节只讨论利用一个对称性降低一阶的方法。跟一阶常微分方程不同，一般地，对于方程组降阶来说只有正则坐标法可用。

如果方程组(17)容许无穷小生成元(20)，那么可以求出正则坐标(u,τ)，这里的u是$(u_1,u_2,\dots,u_n)$的简写。在此正则坐标下，方程组(17)变换成

$$\frac{du_i}{d\tau}=g_i(u,\tau) \tag{27}$$

此时无穷小生成元(17)变为了$\frac{\partial}{\partial\tau}$，根据(25)，由

$$\tilde{X}\left[\frac{du_i}{d\tau}-g_i(u,\tau)\right]\Big|_{\frac{du_1}{d\tau}=g_1(u,\tau),\dots,\frac{du_n}{d\tau}=g_n(u,\tau)}=0 \tag{28}$$

因此就有$\frac{\partial}{\partial\tau}g_i(u,\tau)=0$（参考(2.5.1)），即各$g_i(u,\tau)$都不显含$\tau$，于是(17)变成了

$$\frac{du_i}{d\tau}=g_i(u) \tag{29}$$

，这就把(17)降低了一阶，为了看出这一点，不失一般性，可以将(29)改变为

$$\frac{du_i}{du_n}=\frac{g_i(u)}{g_n(u)},i=1,2,\dots,(n-1) \tag{30}$$

这将变量数目减少1。如果可以继续发现了(30)的对称性，就可以用同样的方法降阶，直到完全把微分方程组积分出来为止。

3.6 计算对称性

根据(26)，对于容许(24)的微分方程组(17)，有$\xi_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\xi_t\frac{\partial f_i}{\partial t}=\zeta_i$，即

$$\xi_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}+\xi_t\frac{\partial f_i}{\partial t}=\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\dot{x}_j+\frac{\partial\xi_i}{\partial t}-\frac{\partial\xi_t}{\partial t}\dot{x}_i-\frac{\partial\xi_t}{\partial x_j}\dot{x}_j\dot{x}_i \tag{31}$$

这里总有n个方程，但是有$n+1$个未知量，因此一般都是可解的，而且我们只需要一个特解。很遗憾，并没有一般方法发现它的特解。类比(2.6)的技巧，不妨设$\xi_i=\xi_t f_i+\sigma_i$，代入(31)后化简得

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}+f_j\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j}=\sigma_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{32}$$

这实现了消元，但是并没有降低求解的本质困难。更糟糕的是，σ_i的特解往往比ξ_i,ξ_t的特解更为复杂。但是，存在这种可能性，对于一类微分方程，拥有一般的步骤去发现它的对称性，然而，局限于计算上的复杂性（但计算复杂不是本质的困难），我们通常把这部分内容交给计算机实现。有机会的话，我们将在第四章探讨这部分内容。

3.7 给定对称性的方程

同样，我们有两种途径得到容许无穷小生成元(20)的一类微分方程组。相比求解(31)的复杂性，显然正则坐标更为方便。在已知(20)的形式之下，可以求出正则坐标(u,τ)，在此坐标之下，微分方程组(17)变为

$$\frac{du_i}{d\tau}=g_i(u) \tag{33}$$

所以

$$\frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial u_i}{\partial t}}{\frac{\partial \tau}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial \tau}{\partial t}}=g_i(u) \tag{34}$$

根据(34)就可以解出一类方程组。

3.8 本章算例

本节我们考虑二阶常微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3$$

采取本章思路，即将它作为一阶常微分方程组来考虑

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=xy^2-ty^3\end{cases}$$

一个比较容易发现的对称性是：方程组在$\bar{x}=x,\bar{y}=e^{-\varepsilon}y,\bar{t}=e^{\varepsilon}t$下保持不变（尺度变换下的对称），这个对称性导致无穷小生成元$X=-y\frac{\partial}{\partial y}+t\frac{\partial}{\partial t}$。由(23)可知正则坐标决定方程为：

$$\begin{cases} -y\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+t\dfrac{\partial u_1}{\partial t}=0 \\ -y\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+t\dfrac{\partial u_2}{\partial t}=0 \\ -y\dfrac{\partial \tau}{\partial y}+t\dfrac{\partial \tau}{\partial t}=1 \end{cases}$$

容易发现的一个特解为

$$\begin{cases} u_1=x \\ u_2=yt \\ \tau=\ln t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=u_1 \\ y=u_2e^{-\tau} \\ t=e^{\tau} \end{cases}$$

在这组坐标之下，方程组变为

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{d\tau}=u_2 \\ \dfrac{du_2}{d\tau}=u_1u_2^2-u_2^3+u_2 \end{cases}$$

现在成功实现了降阶。如果可以找到该方程的对称性，就可以继续降低一阶从而完全积分出来。然而，发现该方程的对称性是不容易的。因此我们暂时把该方程搁置下载，而去寻找李对称积分更一般的规律。在下一章中，我们会重新回到这个方程组来。