求解微分方程的李对称方法（一）

撰文：*苏剑林*　　　　***科学空间：***http://spaces.ac.cn

一、一阶常微分方程

1.1.无穷小变换

考虑

$$\overline{x}=\varphi(x,y,\varepsilon),\overline{y}=\phi(x,y,\varepsilon)$$

的变换，其中 $x=\varphi(x,y,0),y=\phi(x,y,0)$

我们在 $\varepsilon=0$ 附近展开（只考虑一阶无穷小）：

$$\begin{aligned}\overline{x}&\approx\varphi(x,y,0)+\xi(x,y)\varepsilon=x+\xi(x,y)\varepsilon\\ \overline{y}&\approx\phi(x,y,0)+\eta(x,y)\varepsilon=y+\eta(x,y)\varepsilon\end{aligned}$$

其中 $\xi(x,y)=\left.\frac{\partial\overline{x}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\eta(x,y)=\left.\frac{\partial\overline{y}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ 。则它跟以下算子（无穷小生成元）相联系：

$$X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$$

该算子给出了函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})$ 的变换下增量的线性主部，即

$$\begin{aligned}f(\overline{x},\overline{y})&\approx f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\overline{x}}{\partial\varepsilon}\varepsilon+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\overline{y}}{\partial\varepsilon}\varepsilon\\ &=f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\xi\varepsilon+\frac{\partial f}{\partial y}\eta\varepsilon=f(x,y)+\varepsilon Xf\end{aligned}$$

所以若 $Xf=0$，则 $f(x,y)$ 在 $(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})$ 的变换之下保持不变。（精确到一阶无穷

小）

1.2.正则坐标

可对算子 X 进行变量代换进行化简。设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，期望算符 X 变换成 $X=\frac{\partial}{\partial v}$ 的简单形式。我们有

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

那么就有

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v},\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}$$

那么

$$\tilde{X}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}=\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v}\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$=\left(\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

$$=\left(Xu\right)\frac{\partial}{\partial u}+\left(Xv\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

上式可以推广到多个变量。我们令

$$Xu=\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}=0,Xv=\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}=1$$

由此生成的代换变量称为正则坐标，我们只需要上述线性偏微分方程组的一个特解就够了。

1.3.首次延拓

为了考虑微分方程的变换，我们需要知道导数的变换规律，即 $y'=\frac{dy}{dx}\rightarrow\overline{y}'=\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}$ 下的变换，这成为算子 X 的首次延拓，具体过程如下。

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}\approx\frac{d(y+\eta\varepsilon)}{d(x+\xi\varepsilon)}=\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+\frac{d\eta}{dy}\varepsilon}{1+\frac{d\xi}{dx}\varepsilon}\right)$$

$$\approx\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{d\eta}{dy}\varepsilon\right)\left(1-\frac{d\xi}{dx}\varepsilon\right)\approx y'\left(1+\frac{d\eta}{dy}\varepsilon-\frac{d\xi}{dx}\varepsilon\right)$$

即

$\bar{y}' \approx y' + \zeta_1 \varepsilon$

$\zeta_1 = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dx} y' = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) y' - \frac{\partial \xi}{\partial y} \left(y' \right)^2$

如果我们把 x, y, y' 看成是相互独立的变量，则算子 X 可以（首次）延拓为：

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial y'}$$

延拓的目的在于，当我们对微分方程进行变换时，可以把 x, y, y' 分开运算，而不是让 x, y 在 y' 中的相互交缠。现在可以看到，对于函数 $F(x, y, y')$ 来说，$F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = F(x, y, y') + \varepsilon XF(x, y, y') = F + \varepsilon XF$。所以若 $XF = 0$，则 F 在 $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ 的变换之下保持不变，即 F 容许无穷小生成元 X。

另外不难发现使用正则坐标后，$X = \frac{\partial}{\partial v}$ 的首次延拓就是它自身。

1.4.方程的对称性

如果在 $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ 的变换之下，$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y})$，则函数 $f(x, y)$ 具有一种对称性。但是这里我们更多考虑的是方程的对称性，情况有一些不同。考虑方程 $f(x, y) = 0$，如果方程具有对称性，只需要 $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ 即可，但是 $f(\bar{x}, \bar{y})$ 的形式未必与 $f(x, y)$ 相同。

事实上，如果方程具有 $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ 的对称性，则有

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = f(x, y) + G(x, y, f, \varepsilon)$$

其中 $G(x, y, 0, \varepsilon) = G(x, y, f, 0) = 0$。展开至一阶，则有

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \approx f(x, y) + \varepsilon H(x, y, f)$$

即 $Xf = H$，$H(x, y, 0) = 0$。或者写作 $Xf\big|_{f=0} = 0$。（精确到一阶无穷小）

1.5.用对称性解微分方程

如果方程在 $(x, y) \to (\bar{x}, \bar{y})$ 的变换下形式保持不变，则该方程具有一种对称性，变换 $\bar{x} = \varphi(x, y, \varepsilon), \bar{y} = \phi(x, y, \varepsilon)$ 则是该方程的对称的一个描述。

1.5.1.正则坐标法

只要发现了一个一阶微分方程的对称性，就可以求出它的正则坐标，进而将此微分方程化为最简形式。考虑微分方程

$$y' = f(x,y)$$

如果已知它容许无穷小生成元 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$。在正则坐标 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 之下，算子 X 及其延拓都变为 $\tilde{X}=\frac{\partial}{\partial v}$，而方程 $y'-f(x,y)=0$ 可以期望变成 $\frac{du}{dv}-g(u,v)=0$。那么 $0=\tilde{X}\left(\frac{du}{dv}-g\right)\Big|_{\frac{du}{dv}-g=0}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{du}{dv}-g\right)\Big|_{\frac{du}{dv}-g=0}=-\frac{\partial g}{\partial v}\Big|_{\frac{du}{dv}-g=0}=-\frac{\partial g}{\partial v}$，即 $g(u,v)$ 不显含 v，方程变为简单的 $\frac{du}{dv}-g(u)=0$，这容易积分出来。

正则坐标的成功之处在于，它把求解常微分方程组变成了寻找对称性及求解微分方程组 $Xu=\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\eta\frac{\partial u}{\partial y}=0, Xv=\xi\frac{\partial v}{\partial x}+\eta\frac{\partial v}{\partial y}=1$，这是一个线性的一阶方程组，通常对于简单的 ξ,η 都会有很容易的解。

1.5.2.积分因子法

微分方程可以改写成 $dy-fdx=0$，如果可以通过乘上一个积分因子 μ 使得 $(\mu)dy-(\mu f)dx=0$ 且 $\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\mu f,\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mu$，那么我们就可以求出原方程的解 $\omega(x,y)=c$。积分因子所满足的方程为 $\frac{\partial(\mu f)}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$，通常来说这并不会比原方程简单。但是利用对称分析，可以很容易让我们找出积分因子。

假设微分方程 $y'=f(x,y)$ 容许算子 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$，我们考虑将方程的解写成 $\omega(x,y)=c$ 的形式，c 是积分常数。考虑变量代换 $u=\omega(x,y),v=v(x,y)$，可以预料方程会变成 $\frac{du}{dv}=0$ 的形式。也就是说，此时的 (u,v) 也是一组理想的正则坐标，可以断定 $X\omega=0$ 或 $X\omega=1$。

另一方面，$0=\frac{d\omega}{dx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}f$，$X\omega=\xi\frac{\partial\omega}{\partial x}+\eta\frac{\partial\omega}{\partial y}=\left(\eta-\xi f\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}$，由此可以断定 $X\omega=1$，因为如果 $X\omega=0$ 将得到 $\eta-\xi f=0$ 或 $\frac{\partial\omega}{\partial y}=0$ 的平凡结果，这不符合所求。因此 $\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{\eta-\xi f}$ 及 $\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{f}{\eta-\xi f}$，也就是说，积分因子 $\mu=\frac{1}{\eta-\xi f}$。

采用积分因子的方法更为直接，然后，它给我的感觉是似乎没有变量代换那样流畅自然。

1.6.给定对称性的方程

然而，寻找微分方程的对称性是没有一般规律的，甚至很多时候只能够凭借经验去猜测。因此我们通常是反过来，给定一种对称性，看看哪些方程具有这个对称性。

1.6.1.直接积分

考虑容许 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ 及其延拓 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta_1\frac{\partial}{\partial y'}$ 的微分方程 $y'=f(x,y)$，我们有

$$X\left(y'-f(x,y)\right)\Big|_{y'-f(x,y)}=0$$

得到 $\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)y'-\frac{\partial\xi}{\partial y}\left(y'\right)^2-\xi\frac{\partial f}{\partial x}-\eta\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{y'-f(x,y)=0}=0$。代入 $y'-f(x,y)$ 得

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)f-\frac{\partial\xi}{\partial y}f^2$$

根据 ξ,η 可以解出 $f(x,y)$，即在给定对称性的情况下，可以求出适合这个对称性的一类方程。

1.6.2.正则坐标法

1.6.1 的方法需要求解偏微分方程，计算量颇大，利用正则坐标法可以更简单地求出容许 X 的一类方程。根据前面的结果，已知微分方程 $y'=f(x,y)$ 容许 $X=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$，那么可以求出它的正则坐标 (u,v)，方程在此变换下变为 $\frac{du}{dv}=g(u)$，那么：

$$g(u)=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy}{\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial x}dy}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}y'}{\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}y'}$$

把$u=u(x,y)$代入$g(u)$，$g(u)$是u的任意函数，然后就可以解出y'来，得到容许 X 的一类方程。

1.7.计算对称性

在充分性的条件下，我们已经得到$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)f-\frac{\partial \xi}{\partial y}f^2$；若要根据$f$计算$\xi,\eta$，则不妨设$\eta=\xi f+\sigma$，代入化简得到

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}+f\frac{\partial \sigma}{\partial y}=\sigma\frac{\partial f}{\partial y}$$

这看上去相当简单，但是为了得到它的通解，需要求解特征方程

$$dx=\frac{dy}{f}=\frac{d\sigma}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

这等价于先求解原来的微分方程，因此，这样的计算并没有改变求微分方程解的本质困难。当然，我们只需要$\frac{\partial \sigma}{\partial x}+f\frac{\partial \sigma}{\partial y}=\sigma\frac{\partial f}{\partial y}$的一个特解，在很多情况下，$\xi,\eta$的形式相当简单，因此可以凭借猜测或者直觉等行为得出一个特解即可（ξ,η的形式相当简单，而不是σ的形式相当简单）。

1.8.已知对称性的一阶常微分方程

序号	方程	对称	序号	方程	对称
1	$y'=F(y)$ $y'=F(kx+ly)$	$X=\frac{\partial}{\partial x}$ $X=l\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial y}$	**8**	$y'=\frac{y}{x+F(y/x)}$	$X=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}$
2	$y'=F(y/x)$	$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	**9**	$y'=\frac{y}{x+F(y)}$	$X=y\frac{\partial}{\partial x}$
3	$y'=x^{k-1}F(y/x^k)$	$X=x\frac{\partial}{\partial x}+ky\frac{\partial}{\partial y}$	**10**	$xy'=y+F(x)$	$X=x\frac{\partial}{\partial y}$
4	$xy'=F(xe^{-y})$	$X=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$	**11**	$xy'=\frac{y}{\ln x+F(y)}$	$X=xy\frac{\partial}{\partial x}$

5	$y'=yF(ye^{-x})$	$X=\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	**12**	$xy'=y\left[\ln y+F(x)\right]$	$X=xy\frac{\partial}{\partial y}$
6	$y'=y/x+xF(y/x)$	$X=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}$	**13**	$y'=\frac{y+xF(x^2+y^2)}{x-yF(x^2+y^2)}$	$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$
7	$xy'=y+F(y/x)$	$X=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$			

（上表来源于《微分方程与数学物理问题》）

1.9.本节例子

考虑微分方程 $y'=x+\frac{x^3}{y}$，它在变换 $y\to e^{2\varepsilon}y, x\to e^{\varepsilon}y$ 的变换下形式不变，这导致无穷小生成元 $X=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}$。

利用 1.5.1 的方法，先求出正则坐标，即 $x\frac{\partial u}{\partial x}+2y\frac{\partial u}{\partial y}=0, x\frac{\partial v}{\partial x}+2y\frac{\partial v}{\partial y}=1$，求出最简单的一个解是 $u=\frac{y}{x^2}, v=\ln x$，或者写成 $x=e^v, y=ue^{2v}$，在此坐标变换之下微分方程变为：$\frac{du}{dv}=1+\frac{1}{u}-2u$。这时就可以把原方程积分出来了。

而利用 1.5.2 的方法，求出积分因子 $\mu=\frac{1}{\eta-\xi f}=\frac{y}{(2y+x^2)(y-x^2)}$，可以分解为 $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+x^2}+\frac{1}{y-x^2}\right)$ 于是 $\omega=\int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2y+x^2}+\frac{1}{y-x^2}\right)dy$，积分的结果是 $\frac{1}{6}\ln(2y+x^2)+\frac{1}{3}\ln(y-x^2)+c_1(x)$；而 $\omega=-\int\frac{xy+x^3}{(2y+x^2)(y-x^2)}dx$，积分的结果为 $\frac{1}{6}\ln(2y+x^2)+\frac{1}{3}\ln(y-x^2)+c_2(y)$，取共同的部分 $\frac{1}{6}\ln(2y+x^2)+\frac{1}{3}\ln(y-x^2)=\frac{1}{6}\ln c$，得到 $(2y+x^2)(y-x^2)^2=c$。