齐次对称多项式初等表示的新尝试

苏剑林

摘要

对称多项式基本定理告诉我们每一个对称多项式都可以表示成初等对称多项式的多项式。但这仅仅是理论上的，具体的变换技巧还有待发掘。《高等代数》教程中给出了两种不同的方法，其中一种就是直接根据首项逐次求得，但这因为计算量太高而不被频繁使用。第二种方法是通过待定系数法来求，效率较高，速度也较快。但是，不难发现，它还有以下两个不足：

（1）它的“快”是相对而言的，对于计算机编程计算来说它的确很快，但手工计算来说还是很有限制的，毕竟它将问题转换为一个多元一次方程组，手工求解多元方程组还是不容易的。

（2）通过待定系数法的过程没有体现出对称多项式的特性，淹没了“对称性”在多项式中的规律和美感。

综上所述， 有必要在对称多项式初等表示方面做出新的探讨。本文就是企图进行这样的尝试，不失一般性，只考虑 n 元齐次对称多项式。通过研究，笔者得到了两种可以比较快速地给出对称多项式初等表示的方法，它们在某种意义上是相互补充，笔者将在下面介绍。

关键字

对称多项式；变换；容斥原理

目录

符号说明：

为了描述的方便，本文尝试采用以下记号。

1、圆弧括号内具有符号下标的单项式表示遍历该下标求和。如 $\left(x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i$ 以及 $\left(x_i x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_j$ 等等；使用这个符号的主要原因就是想省去大量的求和符号，同时把多项式运算变得简洁，比如 $\left(x_i\right)\times\left(x_j\right)=\left(x_i x_j\right)$，$\left(x_i^2 x_j\right)\times\left(x_i\right)=\left(x_i^2 x_j x_k\right)$ 等等（每一个括弧意味

着不同的下标），如同普通乘法一般。这实际上是我对张量运算的一种改换。

2、方括号内具有符号下标的单项式表示遍历该下标求和，但在遍历的过程中各下标互不相等。如$\left[x_i\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i$，$\left[x_i x_j\right]=\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_i x_j=2(x_1x_2+x_1x_3...+x_{n-1}x_n)$以及

$\left[x_i x_j x_k\right]=\sum_{k=1,k\neq j,k\neq i}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sum_{i=1}^{n}x_i x_j x_k=6(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4...+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$等等。使用这个不好的主要目的就是省去大量的求和符号。

3、采用《高等代数》的表示初等对称多项式的符号：

$$\sigma_1=\left[x_i\right]$$

$$\sigma_2=\frac{1}{2}\left[x_i x_j\right]$$

$$\sigma_3=\frac{1}{6}\left[x_i x_j x_k\right]$$

...

$$\sigma_n=\frac{1}{n!}\left[x_{k_1}x_{k_2}...x_{k_n}\right]$$

本文提供的两种方法分别基于这两种括弧的不同运用，因此我将这两种方法分别称为“圆括弧法”和“方括弧法”，在此分述如下：

圆括弧法

“圆括弧法”是利用了下面的“基础结果”，并结合容斥原理得到上述定义的圆括弧变换规律，进而给出对称多项式的初等表示。

1.基础结果

我们需要$\left(x_i^m\right)$的初等对称多项式的表达式为基础，其中 m 为任意正整数。关于这些对称表达式，有一个奇妙的生成方法，它涉及到了生成函数以及代数方程这个工具。在以下论述过程中我们暂不区分多项式与多项式函数的区别。

考虑多项式：$f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\sigma_2x^{n-2}...+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x+(-1)^n\sigma_n$，它的 n 个根为$x_1,x_2,...,x_n$，因此多项式也可以改成$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$，不难证明：

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+...+\frac{1}{x-x_n}$$

将每一项用泰勒级数展开：

$$\frac{1}{x-x_1}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{x_1}{x}}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{x_1}{x}+\frac{{x_1}^2}{x^2}+...+\frac{{x_1}^n}{x^n}+...\right)$$

所以

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{x}+\frac{(x_i)}{x^2}+\frac{(x_i^2)}{x^3}+\ldots+\frac{(x_i^n)}{x^{n+1}}+\ldots$$

也就是说，为了得出$\left(x_i^m\right)$，我们只需要将$\frac{f'(x)}{f(x)}$展开为关于$\frac{1}{x}$的泰勒级数，并找出对应的$\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}$项系数即可。这显然是一个美妙的结果。因为我们要以这个表达式为基础，因此我们只需要得到这一系列恒等式即可。用 Mathematica 可以快速地完成$\frac{f'(x)}{f(x)}$的展开。在这里直接写出：

$$\left(x_i^1\right)=\sigma_1$$
$$\left(x_i^2\right)=\sigma_1^2-2\sigma_2$$
$$\left(x_i^3\right)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$
$$\left(x_i^4\right)=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$$
$$\left(x_i^5\right)=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$$
$$\left(x_i^6\right)=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2+6\sigma_2\sigma_4+6\sigma_1\sigma_5-6\sigma_6$$

......

可以发现它是有一些规律的，似乎和杨辉三角有着某种联系。遗憾的是我还未能总结出它的规律。不过本文的主要目的是以这些为基础来快速写出一个对称多项式的初等多项式的表达形式。下面将通过例子来说明。

2.一般对称多项式的表达形式

①第一个简单的例子是：$\sum x_1^2x_2$，不难写出

$$\sum x_1^2x_2=\left[x_i^2x_j\right]=\left(x_i^2x_j\right)-\left(x_i^2x_i\right)=\left(x_i^2\right)\left(x_i\right)-\left(x_i^3\right)$$

其中$\left(x_i^2x_j\right)-\left(x_i^2x_i\right)$一项的来源在于：$\left[x_i^2x_j\right]$是不计算$i=j$部分的，而$\left(x_i^2x_j\right)$则是计算$i=j$部分的，所以要从$\left(x_i^2x_j\right)$中减去$i=j$的部分。

根据上面的结果，有

$$\sum x_1^2x_2=\left(x_i^2\right)\left(x_i\right)-\left(x_i^3\right)=\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)\sigma_1-\left(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\right)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$$

②第二个稍微复杂的例子是：$\sum x_1^3x_2^2$，不难写出

$\sum x_1^3x_2^2=\left[x_i^3x_j^2\right]=\left(x_i^3x_j^2\right)-\left(x_i^5\right)=\left(x_i^3\right)\left(x_i^2\right)-\left(x_i^5\right)$；

接下来我们有

$$\begin{aligned}&\sum x_1^3x_2^2=\left(x_i^3\right)\left(x_i^2\right)-\left(x_i^5\right)\\&=\left(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\right)\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)-\left(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5\right)\\&=\sigma_1\sigma_2^2\text{-}2\sigma_1^2\sigma_3-\sigma_2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_4\text{-}5\sigma_5\end{aligned}$$

即使是手算，这个展开过程也并不困难，事实上这是体现本文方法优越性的一个比较好的例子。如果使用待定系数法的话，则计算过程比较繁琐而且容易出错。

③可以再考虑稍微复杂的例子： $\sum x_1^2x_2^2x_3$

$$2\sum x_1^2x_2^2x_3=\left[x_i^2x_j^2x_k\right]=\left(x_i^2x_j^2x_k\right)-\left(x_i^4x_j\right)-2\left(x_i^3x_j^2\right)+3\left(x_i^5\right)$$

这里有两点要注意的：

1、前边乘以 2 是因为在$\left[x_i^2x_j^2x_k\right]$中$x_i^2,x_j^2$处于等价位置，因此必然会重复计算一次，所以总和实际上是$\sum x_1^2x_2^2x_3$的两倍，这和$\sigma_2=\dfrac{1}{2}\left[x_ix_j\right],\sigma_3=\dfrac{1}{6}\left[x_ix_jx_k\right]$是类似的。而在第一、二个例子中$x_i^2,x_j$地位不等价，因此没有重复计算。

2、该法则的运算就是每次让两个指标相等，通过组合数学的知识算出它的项数，然后不断取舍。简单来讲，就是**容斥原理**的体现。最后我们有：

$$\begin{aligned}&2\sum x_1^2x_2^2x_3\\&=\left(x_i^2x_j^2x_k\right)-\left(x_i^4x_j\right)-2\left(x_i^3x_j^2\right)+3\left(x_i^5\right)\\&=\left(x_i^2\right)^2\left(x_i\right)-\left(x_i^4\right)\left(x_i\right)-2\left(x_i^3\right)\left(x_i^2\right)+3\left(x_i^5\right)\\&=\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)^2\sigma_1-\left(\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4\right)\sigma_1-2\left(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3\right)\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)\\&+3\left(\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3-5\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5\right)\\&=2\sigma_2\sigma_3-6\sigma_1\sigma_4+10\sigma_5\end{aligned}$$

即$\sum x_1^2x_2^2x_3=\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$。但这个例子并没有显示出该方法的优越性，反而突出了它的局限性。事实上，在各变量的次数相差不大时，本方法是最劣于待定系数法的。从最终的结果可以看出，使用待定系数法，也会比较简单。

然而这并非一无所获，可以发现，这种过程并未比通常方法复杂很多，而且在整个过程中处处体现着对称性的作用，因为没有对称性，整个推理都不再成立。另外，我们也可以看到，将一个对称的多项式改成$\left(x_i^m\right)$的多项式却是轻松的。事实上，在某些应用中，比如在证明不等式的某些情况下，这种形式也许更为有效。

方括弧法

事实上，根据容斥原理，我们可以利用本文定义的方括弧给出一个更为直接的变换方法，即直接考虑方括弧之间的形式表换。这种方法的特点是可操作性强，简洁易懂，当然，计算量未必少。我们来重复考虑上面的三个例子

① $\sum x_1^2 x_2$

因为 $\sum x_1^2 x_2 = \left[x_i^2 x_j\right] = \left[x_i x_j x_i\right]$，我们先猜测第一项为 $\left[x_i x_j\right]\left[x_i\right]$，于是写出：

$$\left[x_i x_j\right]\left[x_i\right] = \left[x_i x_j x_k\right] + 2\left[x_i^2 x_j\right]$$

这个式子的意义是相当明确的：$\left[x_i x_j\right]\left[x_i\right]$ 包含两部分，一部分是三个指标都不同的，一部分是由两个指标相同的。而 $\left[x_i\right] = \sigma_1, \left[x_i x_j\right] = 2\sigma_2, \left[x_i x_j x_k\right] = 6\sigma_3$，所以我们有

$$2\sigma_2\sigma_1 = 6\sigma_3 + 2\left[x_i^2 x_j\right] \Rightarrow \sum x_1^2 x_2 = \sigma_2\sigma_1 - 3\sigma_3$$

这个例子是比较简洁的。

② $\sum x_1^3 x_2^2$

同样，因为 $\sum x_1^3 x_2^2 = \left[x_i^3 x_j^2\right] = \left[x_i x_j x_i x_j x_i\right]$，考虑第一项为 $\left[x_i x_j\right]\left[x_i x_j\right]\left[x_i\right]$，并且有

$$\begin{aligned}
&\left[x_i x_j\right]\left[x_i x_j\right]\left[x_i\right] \\
&= \left[x_i x_j\right]\left(\left[x_i x_j x_k\right] + 2\left[x_i^2 x_j\right]\right) \\
&= \left[x_i x_j\right]\left[x_i x_j x_k\right] + 2\left[x_i^2 x_j\right]\left[x_i x_j\right] \\
&= \left[x_i x_j\right]\left[x_i x_j x_k\right] + 4\left[x_i^3 x_j^2\right] + 4\left[x_i^3 x_j x_k\right] + 4\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right] + 2\left[x_i^2 x_j x_k x_l\right]
\end{aligned}$$

其中 $\left[x_i^2 x_j\right]\left[x_i x_j\right] = 2\left[x_i^3 x_j^2\right] + 2\left[x_i^3 x_j x_k\right] + 2\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right] + \left[x_i^2 x_j x_k x_l\right]$，其意思就是统计两个下标相同时、一个下标相同时、没有下标相同时的所有情况（要注意只有两个方括号相遇才会有下标相同，一个方括号内下标是不同的，这是定义）！这过程比较繁琐。但是还是有可操作性的，多计算一下，熟悉即可。

比如 $\left[x_i^2 x_j\right]\left[x_i x_j\right]$ 中有多少个 $\left[x_i^3 x_j^2\right]$ 呢？可以这样考虑，让左边的 i 与右边的 i 相同，让左边的 j 与右边的 j 相同，就得到了 $\left[x_i^3 x_j^2\right]$，这是一种；让左边的 i 与右边的 j 相同，让左边的 j 与右边的 i 相同，也得到了 $\left[x_i^3 x_j^2\right]$，共有两种情况；因此 $\left[x_i^2 x_j\right]\left[x_i x_j\right]$ 展开式中必然包含 $2\left[x_i^3 x_j^2\right]$。其他类似。

但是接着还要把$\left[x_i^3 x_j x_k\right]$,$\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right]$,$\left[x_i^2 x_j x_k x_l\right]$展开。这过程计算量很大，有点得不偿失。

③ $\sum x_1^2 x_2^2 x_3$

$$\left[x_i x_j x_k\right]\left[x_i x_j\right]=\left[x_i x_j x_k x_l x_m\right]+6\left[x_i^2 x_j x_k x_l\right]+6\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right]$$

$$\left[x_i x_j x_k x_l\right]\left[x_i\right]=4\left[x_i^2 x_j x_k x_l\right]+\left[x_i x_j x_k x_l x_m\right]$$

为了再次展示方法的操作，笔者再解释一下$\left[x_i x_j x_k\right]\left[x_i x_j\right]$中有多少个$\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right]$。让右边的 i 与左边的 i 相同，那么右边的 j 可以分别于 j 或 k 相同，有两种情况；右边的 i 还可以与左边的 j 或 k 相同；因此总的情况是 3×2=6，即$\left[x_i x_j x_k\right]\left[x_i x_j\right]$的展开式中包含了$6\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right]$。其余的是类似的。

所以

$$\begin{aligned}
&\left[x_i^2 x_j^2 x_k\right]\\
&=\frac{1}{6}\left[x_i x_j x_k\right]\left[x_i x_j\right]-\frac{1}{6}\left[x_i x_j x_k x_l x_m\right]-\frac{\left[x_i x_j x_k x_l\right]\left[x_i\right]-\left[x_i x_j x_k x_l x_m\right]}{4}\\
&=\frac{1}{6}\left(3\sigma_3\times 2\sigma_2\right)-\frac{1}{6}\left(120\sigma_5\right)-\frac{24\sigma_4\sigma_1-120\sigma_5}{4}\\
&=2\sigma_3\sigma_2-6\sigma_4\sigma_1+10\sigma_5
\end{aligned}$$

所以$\sum x_1^2 x_2^2 x_3=\sigma_2\sigma_3-3\sigma_1\sigma_4+5\sigma_5$。只有简单几步就给出了“圆括弧法”中比较困难的例子的结果。

结论

可以看出，在一些比较简单的情况下，圆括弧法和方括弧法有着异曲同工的简洁之妙。然而，某些圆括弧法比较困难的题目，方括弧法则显得简单巧妙；反之也有类似的例子。因此有把握说，这两种方法在某种意义上是可以相互补充的，有可能的是，两种方法的结合应用，可以不完全地代替待定系数法。

进一步可以这样总结，待定系数法和方括弧的优越性在于低次数的对称多项式变换方面（即$\sum x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$ 的$(a_1+\ldots+a_n)$比较小时）；而圆括弧法优越性在体现在低循环变量数方面（即$\sum x_1^{a_1}\ldots x_n^{a_n}$ 的 n 比较小时），当然，需要$\left(x_i^m\right)$的表达式为基础也可以说是一个不足。

当然，需要说明的是，本文的出发点在于：如果一道问题有简单的答案，那么它就应该有简单（巧妙）的解法。如果对称多项式本身相当复杂，其解也是相当复杂的，那么不存在哪种特别有效快捷的方法来得出答案。在这种情况下，计算机就发挥作用了。

遗留问题

① $\left(x_i^m\right)$的初等多项式展开式的一般规律还没有找到

② 在得到“基础结果”时使用到了生成函数法这个强大的工具，但让人感到该工具还有很大的使用空间，有待进一步发掘（比如多元函数的生成函数等等）。

权当抛砖引玉，如有不当之处，还请斧正。