2012年北约自主招生数学试题参考解答

1. 求 x 的范围使得 $|x+2|+|x|+|x-1|$ 是增函数．

解答. 分别讨论 x 在 $(-\infty,-2),[-2,0),[0,1),[1,\infty)$ 中时，去掉绝对值．易知 $x\geqslant 0$ 即可． ■

2. 求 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$ 的实根的个数．

解答. 注意到

$$\begin{aligned}\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}=&\sqrt{(x+2)-2\cdot 3\cdot\sqrt{x+2}+3^2}\\=&\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}\\=&|3-\sqrt{x+2}|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=&\sqrt{(x+2)-2\cdot 5\cdot\sqrt{x+2}+5^2}\\=&\sqrt{(\sqrt{x+2}+5)^2}\\=&|5-\sqrt{x+2}|\end{aligned}$$

而 $|5-\sqrt{x+2}|+|3-\sqrt{x+2}|\geqslant 2>1$，所以原方程无实数解． ■

3. 已知 $(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$ 的 4 个根组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列，求 $|m-n|$．

解答. 注意到两个方程的一次项系数相同，所以由韦达定理有首项与末项之和为 2．因此末项为 $2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$，这样可算得公差为 $d=\frac{1}{2}$．于是 4 个根为 $\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4},\frac{7}{4}$，这样

$$|m-n|=\left|\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right|=\frac{1}{2}.$$

■

4. 如果锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O，求 O 到三角形三边的距离比．

解答. 很容易计算比例为 $\cos A:\cos B:\cos C$，如果是钝角三角形应该加上绝对值． ■

5. 已知点 $A(-2,0), B(0,2)$，若点 C 是圆 $x^2-2x+y^2=0$ 上的动点，求 $\triangle ABC$ 面积的最小值 .

解答. 由数形结合知当 OC 垂直 AB 时(否则利用斜边大于直角边,两点之间线段最短推矛盾) . 因为直线 AB 的方程为 $x-y+2=0$，所以 O 到 AB 的距离为 $\dfrac{|1-0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，于是 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+2^2}\cdot\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}-1\right)=3-\sqrt{2}$. ■

6. 在 $1,2,\cdots,2012$ 中取一组数，使得任意两数之和不能被其差整除，最多能取多少个数？

解答. 将 $1,2,\cdots,2012$ 分成 $(1,2,3),(4,5,6),\cdots,(2008,2009,2010),(2011,2012)$ 这 671 组 . 如果取至少 672 个数，则有抽屉原理必然有 2 个数属于同一组，不妨设为 $a>b$，则 $a-b=1,2$.
当 $a-b=1$ 时，此时 $a-b$ 整除 $a+b$，不合要求；
当 $a-b=2$ 时，此时 a,b 同奇偶，所以 $a+b$ 为偶数，从而 $a-b$ 整除 $a+b$，不合要求 .
因此最多取 671 个数，现在取 $1,4,7,\cdots,2011$ 这 671 个数，此时任两数之和除以 3 的余数为 2，而两数之差是 3 的倍数，所以任意两数之和不能被其差整除 .
综上所述，最多能取 671 个数 . ■

7. 求使得 $\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x=a$ 在 $[0,\pi)$ 有唯一解的 a .

解答. 设 $f(x)=\sin 4x\sin 2x-\sin x\sin 3x=\dfrac{1}{2}(\cos 4x-\cos 6x)$ 显然关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，因此 $f(x)=a$ 在 $[0,\pi)$ 有唯一解的话，必然只能在 $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ 时 .
当 $x=0$ 为解时，此时 $a=0$，方程化为 $\sin x\sin 5x=0$ 在 $[0,\pi)$ 不止一解，故舍去 .
当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为解时，此时 $a=1$，方程化为$\sin x\sin 5x=1$. 因为在 $[0,\pi)$ 上 $\sin x\geqslant 0$，所以只能是 $\sin x=1,\sin 5x=1$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为唯一解 .
综上所述，$a=1$. ■

8. 求证：若圆内接五边形的每个角都相等，则它为正五边形 .

证明. 设这个五边形为 $ABCDE$，令直线 AE,CD 交于点 G，连结 AC . 因为 $\angle AED=\angle EDC$，所以 $\angle GED=\angle GDE$. 又因为 A,C,D,E 四点共圆，所以 $\angle GAC=\angle EDG=\angle GED$，所以 DE 平行于 CD，从而 $DE=CD$. 同理有

$AE = BC, BC = DE, DE = AB$，于是 $AB = BC = CD = DE = DA$，即五边形 $ABCDE$ 为正五边形． ■

注记. 插上图后最后一页出现颜色退化问题，不明原因，图比较简单，索性不插图了． ■

9. 求证：对任意的正整数 n，$(1+\sqrt{2})^n$ 必可表示成 $\sqrt{s}+\sqrt{s-1}$ 的形式，其中 $s \in \mathbb{N}^+$．

证明. 构造数列 $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$，则逆用特征根法知

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n\ ,\ a_1 = 1\ ,\ a_2 = 3\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^+\ ,$$

于是 $\{a_n\}$ 为正整数列．另外，注意到

$$\begin{aligned} a_{2n}^2 - 1 &= \left(\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} + (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \left(\frac{(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}\right)^2 , \end{aligned}$$

所以 $\sqrt{a_{2n}^2 - 1} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{2n} - (1-\sqrt{2})^{2n}}{2}$．
于是

$$(1+\sqrt{2})^{2n} = a_{2n} + \sqrt{a_{2n}^2 - 1}\ ;$$

同理可证

$$(1+\sqrt{2})^{2n+1} = a_{2n+1} + \sqrt{a_{2n+1}^2 + 1}\ .$$

综上所述，命题得证． ■

注记. 值得一提的是，数学文化主编香港浸会大学数学系汤涛教授在新浪微博的周末数学题栏目中曾出过此题(稍有不同)，而当时是 1 月 29 日，此为原文链接． ■