2009 年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 7 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中至少 4 分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、填空（共 8 小题，每小题 7 分，共 56 分）

1. 若函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 且 $f^{(n)}(x)=\underbrace{f[f[f\dots f}_{n}(x)]]$，则 $f^{(99)}(1)=\underline{\frac{1}{10}}$．

解：

$$f^{(1)}(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$
$$f^{(2)}(x)=f[f(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$f^{(99)}(x)=\frac{x}{\sqrt{1+99x^2}}.$$

故 $f^{(99)}(1)=\frac{1}{10}$．　□

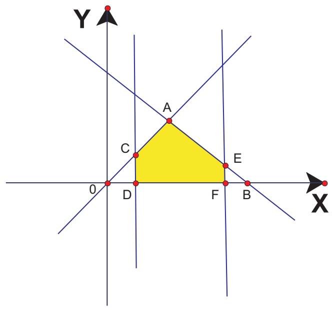
2. 已知直线 $L: x+y-9=0$ 和圆 $M: 2x^2+2y^2-8x-8y-1=0$，点 A 在直线 L 上，B,C 为圆 M 上两点，在 ΔABC 中，$\angle BAC=45^0$，AB 过圆心 M，则点 A 横坐标范围为 $\underline{[3,6]}$．

解：设 $A(a,9-a)$，则圆心 M 到直线 AC 的距离 $d=|AM|\sin 45^0$，由直线 AC 与圆 M 相交，得

$$d\le\frac{\sqrt{34}}{2}.$$

解得 $3\le a\le 6$．　□

3. 在坐标平面上有两个区域 M 和 N，M 为：$\begin{cases} y\ge 0 \\ y\le x \\ y\le 2-x \end{cases}$，$N$ 是随 t 变化的区域，它由不等式 $t\le x\le t+1$ 所确定，t 的取值范围是 $0\le t\le 1$，则 M 和 N 的公共面积是函数 $f(t)=\underline{-t^2+t+\frac{1}{2}}$．



解：由题意知

$$\begin{aligned} f(t) &= S_{\text{阴影部分面积}} \\ &= S_{\Delta AOB} - S_{\Delta OCD} - S_{\Delta BEF} \\ &= 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}(1-t)^2 \\ &= -t^2 + t + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

4. 使不等式 $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n+1} < a - 2007\dfrac{1}{3}$ 对一切正整数 n 都成立的最小正整数 a 的值为 <u>2009</u>.

解: 设 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n+1}$. 显然 $f(n)$ 单调递减。则由 $f(n)$ 的最大值 $f(1) < a - 2007\frac{1}{3}$, 可得 $a = 2009$. □

5. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 上任意两点 P, Q, 若 $OP \perp OQ$, 则乘积 $|OP| \cdot |OQ|$ 的最小值为 <u>$\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$</u>.

解：设

$$P(|OP|\cos\theta, |OP|\sin\theta),$$

$$Q(|OQ|\cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}), |OQ|\sin(\theta \pm \frac{\pi}{2})).$$

由 P, Q 在椭圆上，有

$$\frac{1}{|OP|^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} \tag{1}$$

$$\frac{1}{|OQ|^2} = \frac{\sin^2\theta}{a^2} + \frac{\cos^2\theta}{b^2} \tag{2}$$

(1) + (2) 得

$$\frac{1}{|OP|^2} + \frac{1}{|OQ|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

于是当

$$|OP| = |OQ| = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

时，$|OP||OQ|$ 达到最小值 $\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}$. □

6. 若方程 $\lg kx = 2\lg(x+1)$ 仅有一个实根，那么 k 的取值范围是 $\underline{k<0 或 k=4}$.

解：

$$\begin{cases} kx > 0 \\ x+1 > 0 \\ kx = (x+1)^2 \end{cases}$$

当且仅当

$$kx > 0 \tag{1}$$

$$x+1 > 0 \tag{2}$$

$$x^2 + (2-k)x + 1 = 0. \tag{3}$$

对 (3) 由求根公式得

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2}[k - 2 \pm \sqrt{k^2 - 4k}] \tag{4}$$

$$\Delta = k^2 - 4k \geq 0 \Rightarrow k \leq 0 \quad 或 k \geq 4.$$

(i) 当 $k < 0$ 时，由 (3) 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2 < 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$$

所以 x_1, x_2 同为负根。

又由 (4) 知

$$\begin{cases} x_1 + 1 > 0 \\ x_2 + 1 < 0 \end{cases}$$

所以原方程有一个解 x_1。

(ii) 当 $k = 4$ 时，原方程有一个解 $x = \frac{k}{2} - 1 = 1$.

(iii) 当 $k > 4$ 时，由 (3) 得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k - 2 > 0 \\ x_1 x_2 = 1 > 0 \end{cases}$$

所以 x_1, x_2 同为正根，且 $x_1 \neq x_2$, 不合题意，舍去。

综上可得 $k < 0$ 或 $k = 4$ 为所求。 □

7. 一个由若干行数字组成的数表，从第二行起每一行中的数字均等于其肩上的两个数之和，最后一行仅有一个数，第一行是前 100 个正整数按从小到大排成的行，则最后一行的数是 $\underline{101 \times 2^{98}}$ (可

以用指数表示)。

解：易知：

(i) 该数表共有 100 行；

(ii) 每一行构成一个等差数列，且公差依次为

$$d_1=1, d_2=2, d_3=2^2, \ldots, d_{99}=2^{98}$$

(iii) a_{100} 为所求。

设第 $n(n\geq 2)$ 行的第一个数为 a_n, 则

$$\begin{aligned}
a_n=a_{n-1}+(a_{n-1}+2^{n-2}) &= 2a_{n-1}+2^{n-2}\\
&= 2[2a_{n-2}+2^{n-3}]+2^{n-2}\\
&= 2^2[2a_{n-3}+2^{n-4}]+2\times 2^{n-2}+2^{n-2}\\
&= 2^3a_{n-3}+3\times 2^{n-2}\\
&\quad \cdots\cdots\\
&= 2^{n-1}a_1+(n-1)\times 2^{n-2}\\
&= (n+1)2^{n-2}.
\end{aligned}$$

故 $a_{100}=101\times 2^{98}$. □

8. 某车站每天 $8:00-9:00$, $9:00-10:00$ 都恰有一辆客车到站，但到站的时刻是随机的，且两者到站的时间是相互独立的，其规律为

到站时刻	8:10 9:10	8:30 9:30	8:50 9:50
概率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

一旅客 $8:20$ 到车站，则它候车时间的数学期望为 27 (精确到分).

解: 旅客候车的分布列为

候车时间（分）	10	30	50	70	90
概率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}$

候车时间的数学期望为

$$10\times\frac{1}{2}+30\times\frac{1}{3}+50\times\frac{1}{36}+70\times\frac{1}{12}+90\times\frac{1}{18}\doteq 27.$$

二、解答题

1. (本小题满分 14 分) 设直线 $l: y=kx+m$（其中 k,m 为整数）与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 交于不同两点 A,B, 与双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 交于不同两点 C, D, 问是否存在直线 L, 使得向量 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$, 若存在, 指出这样的直线有多少条？若不存在, 请说明理由。

解: 由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ 消去 y 化简整理得

$$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-48=0.$$

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$, 则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$.

$$\Delta_1=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-48)>0. \qquad (1)$$

....4 分

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ 消去 y 化简整理得

$$(3-k^2)x^2-2kmx-m^2-12=0.$$

设 $C(x_3,y_4)$,$D(x_4,y_4)$, 则 $x_3+x_4=\frac{2km}{3-k^2}$.

$$\Delta_2=(-2km)^2+4(3-k^2)(m^2+12)>0. \qquad (2)$$

....8 分

因为 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=0$, 所以 $(x_4-x_2)+(x_3-x_1)=0$, 此时 $(y_4-y_2)+(y_3-y_1)=0$. 由 $x_1+x_2=x_3+x_4$ 得

$$-\frac{8km}{3+4k^2}=\frac{2km}{3-k^2}.$$

所以 $2km=0$ 或 $-\frac{4}{3+4k^2}=\frac{1}{3-k^2}$. 由上式解得 $k=0$ 或 $m=0$. 当 $k=0$ 时, 由 (1) 和 (2) 得 $-2\sqrt{3}<m<2\sqrt{3}$. 因 m 是整数, 所以 m 的值为 $-3,-2,-1,0,1,2,3$. 当 $m=0$, 由 (1) 和 (2) 得 $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$. 因 k 是整数, 所以 $k=-1,0,1$. 于是满足条件的直线共有 9 条。.... 14 分 □

2. (本小题 15 分) 已知 $p,q(q\neq 0)$ 是实数, 方程 $x^2-px+q=0$ 有两个实根 α,β, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=p$, $a_2=p^2-q$, $a_n=pa_{n-1}-qa_{n-2}$ $(n=3,4,\ldots)$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 (用 α,β 表示);

(II) 若 $p=1,q=\frac{1}{4}$, 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和。

解法一: (I) 由韦达定理知 $\alpha\cdot\beta=q\neq 0$, 又 $\alpha+\beta=p$, 所以

$$a_n=px_{n-1}-qx_{n-2}=(\alpha+\beta)a_{n-1}-\alpha\beta a_{n-2},(n=3,4,5,\ldots).$$

整理得

$$a_n - \beta a_{n-1} = \alpha(a_{n-1} - \beta a_{n-2}).$$

令 $b_n = a_{n+1} - \beta a_n$, 则 $b_{n+1} = \alpha b_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. 所以 $\{b_n\}$ 是公比为 α 的等比数列.

数列 $\{b_n\}$ 的首项为：

$$b_1 = a_2 - \beta a_1 = p^2 - q - \beta p = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta - \beta(\alpha+\beta) = \alpha^2.$$

所以 $b_n = \alpha^2 \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^{n+1}$, 即 $a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n+1}(n = 1, 2, \dots)$. 所以 $a_{n+1} = \beta a_n + \alpha^{n+1}(n = 1, 2, \dots)$.

①当 $\Delta = p^2 - 4q = 0$ 时, $\alpha = \beta \neq 0$, $a_1 = p = \alpha + \alpha = 2\alpha$, $a_{n+1} = \beta a_n + \alpha^{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ 变为 $a_{n+1} = \alpha a_n + \alpha^{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$. 整理得, $\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = 1, (n = 1, 2, \dots)$. 所以, 数列 $\{\frac{a_n}{\alpha^n}\}$ 成公差为 1 的等差数列, 其首项为 $\frac{a_1}{\alpha} = \frac{2\alpha}{\alpha} = 2$. 所以

$$\frac{a_n}{\alpha^n} = 2 + 1(n-1) = n + 1.$$

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = (n+1)\alpha^n;$$

……………………………………………………………………………5 分

②当 $\Delta = p^2 - 4q > 0$ 时, $\alpha \neq \beta$,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \beta a_n + \alpha^{n+1} \\ &= \beta a_n + \frac{\beta - \alpha}{\beta - \alpha}\alpha^{n+1} \\ &= \beta a_n + \frac{\beta}{\beta - \alpha}\alpha^{n+1} - \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\alpha^{n+1} \ (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

整理得,

$$a_{n+1} + \frac{\alpha^{n+2}}{\beta - \alpha} = \beta(a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}), (n = 1, 2, \dots).$$

所以, 数列 $\{a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}\}$ 成公比为 β 的等比数列, 其首项为 $a_1 + \frac{\alpha^2}{\beta-\alpha} = \alpha + \beta + \frac{\alpha^2}{\beta-\alpha} = \frac{\beta^2}{\beta-\alpha}$. 所以

$$a_n + \frac{\alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} = \frac{\beta^2}{\beta - \alpha}\beta^{n-1}.$$

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}.$$

....10 分

(II) 若 $p=1, q=\frac{1}{4}$, 则 $\Delta=p^2-4q=0$, 此时 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$. 由第 (I) 步的结果得, 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=(n+1)(\frac{1}{2})^n=\frac{n+1}{2^n}$, 所以, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$s_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$$

以上两式相减, 整理得

$$\frac{1}{2}s_n=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$$

所以 $s_n=3-\frac{n+3}{2^n}$. ....15 分

解法二：(I) 由韦达定理知 $\alpha\cdot\beta=q\neq 0$, 又 $\alpha+\beta=p$, 所以

$$a_1=\alpha+\beta, a_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta.$$

特征方程 $\lambda^2-p\lambda+q=0$ 的两个根为 α,β.

①当 $\alpha=\beta\neq 0$ 时, 通项 $a_n=(A_1+A_2n)\alpha^n\ (n=1,2,\ldots)$ 由 $a_1=2\alpha, a_2=3\alpha^2$ 得

$$\begin{cases}(A_1+A_2)\alpha=2\alpha\\(A_1+2A_2)\alpha^2=3\alpha^2\end{cases}$$

解得 $A_1=A_2=1$. 故

$$a_n=(1+n)\alpha^n.$$

....5 分

②当 $\alpha\neq\beta$ 时, 通项 $a_n=A_1\alpha^n+A_2\beta^n\ (n=1,2,\ldots)$. 由 $a_1=\alpha+\beta, a_2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta$ 得

$$\begin{cases}A_1\alpha+A_2\beta=\alpha+\beta\\A_1\alpha^2+A_2\beta^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\end{cases}$$

解得 $A_1=\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}, A_2=\frac{\beta}{\beta-\alpha}$. 故

$$a_n=\frac{-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}+\frac{\beta^{n+1}}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}.$$

....10 分

(II) 同解法一。 □

3. (本小题满分 15 分) 求函数

$$y=\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x}+\sqrt{x}$$

的最大和最小值。

解: 函数的定义域为 $[0,13]$。因为

$$\begin{aligned} y=\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x} &= \sqrt{x+27}+\sqrt{13+2\sqrt{x(13-x)}} \\ &\geq \sqrt{27}+\sqrt{13} \\ &= 3\sqrt{3}+\sqrt{13}, \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时等号成立。故 y 的最小值为 $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$。......................................5 分

又由柯西不等式得

$$\begin{aligned} y^2 &= (\sqrt{x}+\sqrt{x+27}+\sqrt{13-x})^2 \\ &\leq (\frac{1}{2}+1+\frac{1}{3})(2x+(x+27)+3(13-x))=121, \end{aligned}$$

所以

$$y\leq 11.$$

....10 分

由柯西不等式等号成立的条件, 得 $4x=9(13-x)=x+27$, 解得 $x=9$. 故当 $x=9$ 时等号成立。因此 y 的最大值为 11。...15 分 □