2009 年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案 (A 卷)

说明：

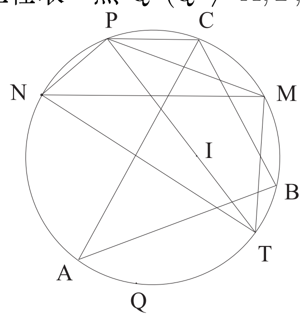
1. **评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分；**

2. **如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10 分为一个档次，不要增加其他中间档次.**

一、如图，M，N 分别为锐角三角形 $\Delta ABC(\angle A < \angle B)$ 的外接圆 Γ 上弧 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{AC}$ 的中点. 过点 C 作 $PC//MN$ 交圆 Γ 于 P 点，I 为 ΔABC 的内心，连接 PI 并延长交圆 Γ 于 T.

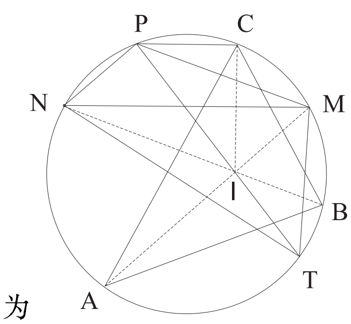
(I) 求证：$MP\cdot MT = NP\cdot NT$；

(II) 在弧 $\overset{\frown}{AB}$ (不含点 C) 上任取一点 Q ($Q \neq A, T, B$)，记 ΔAQC, ΔQCB 的内心分别为 I_1, I_2,



求证：Q, I_1, I_2, T 四点共圆。

证明：(I) 连 NI, MI. 由于 $PC//MN$，P, C, M, N 共圆，故 $PCMN$ 是等腰梯形。因此 $NP = MC, PM = NC$.



连 AM, CI, 则 AM 与 CI 交于 I. 因为

$$\angle MIC = \angle MAC + \angle ACI = \angle MCB + \angle BCI = \angle MCI,$$

所以 $MC = MI$. 同理

$$NC = NI.$$

于是

$$NP = MI,\ PM = NI.$$

故四边形 $MPNI$ 为平行四边形。因此 $S_{\Delta PMT} = S_{\Delta PNT}$ (同底，等高).

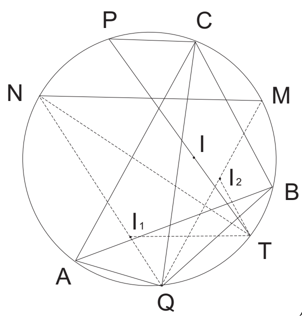
又 P,N,T,M 四点共圆，故 $\angle TNP+\angle PMT=180^0$. 由三角形面积公式

$$\begin{aligned} S_{\Delta PMT} &= \frac{1}{2}PM\cdot MT\sin\angle PMT \\ &= S_{\Delta PNT}=\frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PNT \\ &= \frac{1}{2}PN\cdot NT\sin\angle PMT \end{aligned}$$

于是 $PM\cdot MT=PN\cdot NT$.

(II) 因为

$$\angle NCI_1=\angle NCA+\angle ACI_1=\angle NQC+\angle QCI_1=\angle CI_1N,$$



所以 $NC=NI_1$. 同理 $MC=MI_2$. 由 $MP\cdot MT=NP\cdot NT$ 得

$$\frac{NT}{MP}=\frac{MT}{NP}.$$

由 (I) 所证 $MP=NC$, $NP=MC$. 故

$$\frac{NT}{NI_1}=\frac{MT}{MI_2}.$$

又因

$$\angle I_1NT=\angle QNT=\angle QMT=\angle I_2MT,$$

有

$$\Delta I_1NT\sim\Delta I_2MT.$$

故 $\angle NTI_1=\angle MTI_2$. 从而

$$\angle I_1QI_2=\angle NQM=\angle NTM=\angle I_1TI_2.$$

因此 Q,I_1,I_2,T 四点共圆。 $\square$

二、求证不等式：

$$-1<(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1})-\ln n\le\frac{1}{2},\ \ n=1,2,\ldots.$$

证明: 首先证明一个不等式：

(1) $$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\ \ x>0.$$

事实上，令

$$h(x)=x-\ln(1+x),\ \ g(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}.$$

则对 $x>0$,

$$h^{'}(x)=1-\frac{1}{1+x}>0,\ \ g^{'}(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{x}{(1+x)^2}>0.$$

于是

$$h(x)>h(0)=0,\ g(x)>g(0)=0.$$

在 (1) 中取 $x=\frac{1}{n}$ 得

(2)
$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}.$$

令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\ln n$, 则 $x_1=\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} x_n-x_{n-1} &= \frac{n}{n^2+1}-\ln(1+\frac{1}{n-1}) \\ &< \frac{n}{n^2+1}-\frac{1}{n} \\ &= -\frac{1}{(n^2+1)n}<0. \end{aligned}$$

因此 $x_n<x_{n-1}<\ldots<x_1=\frac{1}{2}$.

又因为

$$\ln n=(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n-1)-\ln(n-2))+\ldots+(\ln 2-\ln 1)+\ln 1=\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{k}).$$

从而

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\ln(1+\frac{1}{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{k}{k^2+1}-\ln(1+\frac{1}{k}))+\frac{n}{n^2+1} \\ &> \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{k}{k^2+1}-\frac{1}{k}) \\ &= -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k^2+1)k} \\ &\geq -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)k} \\ &= -1+\frac{1}{n}>-1. \end{aligned}$$

□

三、设 k,l 是给定的两个正整数。证明：有无穷多个正整数 $m \geq k$, 使得 C_m^k 与 l 互素。

证法一：对任意正整数 t, 令 $m = k + t \cdot l \cdot (k!)$. 我们证明 $(C_m^k, l) = 1$.

设 p 是 l 的任一素因子, 只要证明：$p \nmid C_m^k$.

若 $p \nmid k!$, 则由

$$\begin{aligned} k!C_m^k &= \prod_{i=1}^{k}(m-k+i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)] \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k} i \\ &\equiv k! (\mathrm{mod} p). \end{aligned}$$

即 p 不整除上式, 故 $p \nmid C_m^k$.

若 $p \mid k!$, 设 $\alpha \geq 1$ 使 $p^\alpha \mid k!$, 但 $p^{\alpha+1} \nmid k!$. 则 $p^{\alpha+1} \mid l(k!)$. 故由

$$\begin{aligned} k!C_m^k &= \prod_{i=1}^{k}(m-k+i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)] \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k} i \\ &\equiv k! (\mathrm{mod} p^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

及 $p^\alpha \mid k!$, 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!$, 知 $p^\alpha \mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!C_m^k$. 从而 $p \nmid C_m^k$.

证法二：对任意正整数 t, 令 $m = k + t \cdot l \cdot (k!)^2$. 我们证明 $(C_m^k, l) = 1$.

设 p 是 l 的任一素因子, 只要证明：$p \nmid C_m^k$.

若 $p \nmid k!$, 则由

$$\begin{aligned} k!C_m^k &= \prod_{i=1}^{k}(m-k+i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)^2] \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k} i \\ &\equiv k! (\mathrm{mod} p). \end{aligned}$$

即 p 不整除上式, 故 $p \nmid C_m^k$.

若 $p \mid k!$, 设 $\alpha \geq 1$ 使 $p^{\alpha} \mid k!$, 但 $p^{\alpha+1} \nmid k!$. $p^{\alpha+1} \mid (k!)^2$. 故由

$$\begin{aligned} k!C_m^k &= \prod_{i=1}^{k}(m-k+i) \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k}[(i+tl(k!)^2] \\ &\equiv \prod_{i=1}^{k} i \\ &\equiv k!(\mathrm{mod} p^{\alpha+1}). \end{aligned}$$

及 $p^{\alpha} \mid k!$, 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!$, 知 $p^{\alpha} \mid k!C_m^k$ 且 $p^{\alpha+1} \nmid k!C_m^k$. 从而 $p \nmid C_m^k$.

四、在非负数构成 3×9 数表

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & x_{19} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} & x_{37} & x_{38} & x_{39} \end{pmatrix}$$

中每行的数互不相同, 前 6 列中每列的三数之和为 1, $x_{17} = x_{28} = x_{39} = 0$, $x_{27}, x_{37}, x_{18}, x_{38}, x_{19}, x_{29}$ 均大于 1. 如果 P 的前三列构成的数表

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

满足下面的性质 (O): 对于数表 P 中的任意一列 $\begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ x_{3k} \end{pmatrix}$ $(k = 1, 2, \ldots, 9)$ 均存在某个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 使得

(3) $$x_{ik} \leq u_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}.$$

求证:

(i) 最小值 $u_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\},\ i = 1, 2, 3$ 一定取自数表 S 的不同列。

(ii) 存在数表 P 中唯一的一列 $\begin{pmatrix} x_{1k^*} \\ x_{2k^*} \\ x_{3k^*} \end{pmatrix}$, $k^* \neq 1, 2, 3$ 使得 3×3 数表

$$\mathrm{S}' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

仍然具有性质 (O)。

证明: (i) 假设最小值 $u_i = \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}\}$, $i = 1, 2, 3$ 不是取自数表 S 的不同列。则存在一列不含任何 u_i. 不妨设 $u_i \neq x_{i2}, i = 1, 2, 3$. 由于数表 P 中同一行中的任何两个元素都不等，于是 $u_i < x_{i2}, i = 1, 2, 3$. 另一方面，由于数表 S 具有性质 (O), 在 (3) 中取 $k = 2$, 则存在某个 $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ 使得 $x_{i_0 2} \leq u_{i_0}$. 矛盾。

(ii) 由抽屉原理知

$$\min\{x_{11}, x_{12}\},\ \min\{x_{21}, x_{22}\},\ \min\{x_{31}, x_{32}\}$$

中至少有两个值取在同一列。不妨设

$$\min\{x_{21}, x_{22}\} = x_{22},\ \min\{x_{31}, x_{32}\} = x_{32}.$$

由前面的结论知数表 S 的第一列一定含有某个 u_i, 所以只能是 $x_{11} = u_1$. 同样，第二列中也必含某个 $u_i, i = 1, 2$. 不妨设 $x_{22} = u_2$. 于是 $u_3 = x_{33}$, 即 u_i 是数表 S 中的对角线上数字：

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_{11}} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & \mathbf{x_{22}} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{x_{33}} \end{pmatrix}$$

记 $M = \{1, 2, \ldots, 9\}$, 令集合

$$I = \{k \in M \mid x_{ik} > \min\{x_{i1}, x_{i2}\}, i = 1, 3\}.$$

显然 $I = \{k \in M \mid x_{1k} > x_{11}, x_{3k} > x_{32}\}$ 且 $1, 2, 3 \notin I$. 因为 $x_{18}, x_{38} > 1 \geq x_{11}, x_{32}$, 所以 $8 \in I$. 故 $I \neq \emptyset$. 于是存在 $k^* \in I$ 使得 $x_{2k^*} = \max\{x_{2k} \mid k \in I\}$. 显然, $k^* \neq 1, 2, 3$.

下面证明 3×3 数表

$$S' = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k^*} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k^*} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k^*} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O).

从上面的选法可知 $u_i' := \min\{x_{i1}, x_{i2}, x_{ik^*}\} = \min\{x_{i1}, x_{i2}\}$, $(i = 1, 3)$. 这说明

$$x_{1k^*} > \min\{x_{11}, x_{12}\} \geq u_1,\ x_{3k^*} > \min\{x_{31}, x_{32}\} \geq u_3.$$

又由 S 满足性质 (O), 在 (3) 中取 $k = k^*$, 推得 $x_{2k^*} \leq u_2$, 于是 $u_2' = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k^*}\} = x_{2k^*}$. 下证对任意的 $k \in M$, 存在某个 $i = 1, 2, 3$ 使得 $u_i' \geq x_{ik}$. 假若不然, 则 $x_{ik} > \min\{x_{i1}, x_{i2}\}$, $i = 1, 3$ 且 $x_{2k} > x_{2k^*}$. 这与 x_{2k^*} 的最大性矛盾。因此，数表 S' 满足性质 (O)。

下证唯一性。设有 $k \in M$ 使得数表

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & x_{2k} \\ x_{31} & x_{32} & x_{3k} \end{pmatrix}$$

具有性质 (O). 不失一般性，我们假定

$$\begin{aligned} u_1 &= \min\{x_{11}, x_{12}, x_{13}\} = x_{11} \\ u_2 &= \min\{x_{21}, x_{22}, x_{23}\} = x_{22} \\ u_3 &= \min\{x_{31}, x_{32}, x_{33}\} = x_{33} \\ & x_{32} < x_{31}. \end{aligned} \tag{4}$$

由于 $x_{32} < x_{31}$，$x_{22} < x_{21}$ 及 (i)，有 $\hat{u}_1 = \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11}$。又由 (i) 知：或者 (a) $\hat{u}_3 = \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{3k}$, 或者 (b) $\hat{u}_2 = \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{2k}$.

如果 (a) 成立，由数表 $\hat{S}$ 具有性质 (O), 则

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11}, \\ \hat{u}_2 &= \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{22}, \\ \hat{u}_3 &= \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{3k}. \end{aligned} \tag{5}$$

由数表 $\hat{S}$ 满足性质 (O)，则对于 $3 \in M$ 至少存在一个 $i \in \{1,2,3\}$ 使得 $\hat{u}_i \geq x_{i3}$，又由 (4),(5) 式知, $\hat{u}_1 = x_{11} < x_{13}$, $\hat{u}_2 = x_{22} < x_{23}$. 所以只能有 $\hat{u}_3 = x_{3k} \geq x_{33}$。同样由数表 S 满足性质 (O)，可推得 $x_{33} \geq x_{3k}$。于是 $k = 3$, 即数表 $S = \hat{S}$。

如果 (b) 成立, 则

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \min\{x_{11}, x_{12}, x_{1k}\} = x_{11}, \\ \hat{u}_2 &= \min\{x_{21}, x_{22}, x_{2k}\} = x_{2k}, \\ \hat{u}_3 &= \min\{x_{31}, x_{32}, x_{3k}\} = x_{32}. \end{aligned} \tag{6}$$

由数表 $\hat{S}$ 满足性质 (O)，对于 $k^* \in M$, 存在某个 $i = 1,2,3$ 使得 $\hat{u}_i \geq x_{ik^*}$. 由 $k^* \in I$ 及 (4) 和 (6) 式知，$x_{1k^*} > x_{11} = \hat{u}_1$, $x_{3k^*} > x_{32} = \hat{u}_3$. 于是只能有 $x_{2k^*} \leq \hat{u}_2 = x_{2k}$。类似地，由 S' 满足性质 (O) 及 $k \in M$ 可推得 $x_{2k} \leq u_2' = x_{2k^*}$. 从而 $k^* = k$。 $\square$