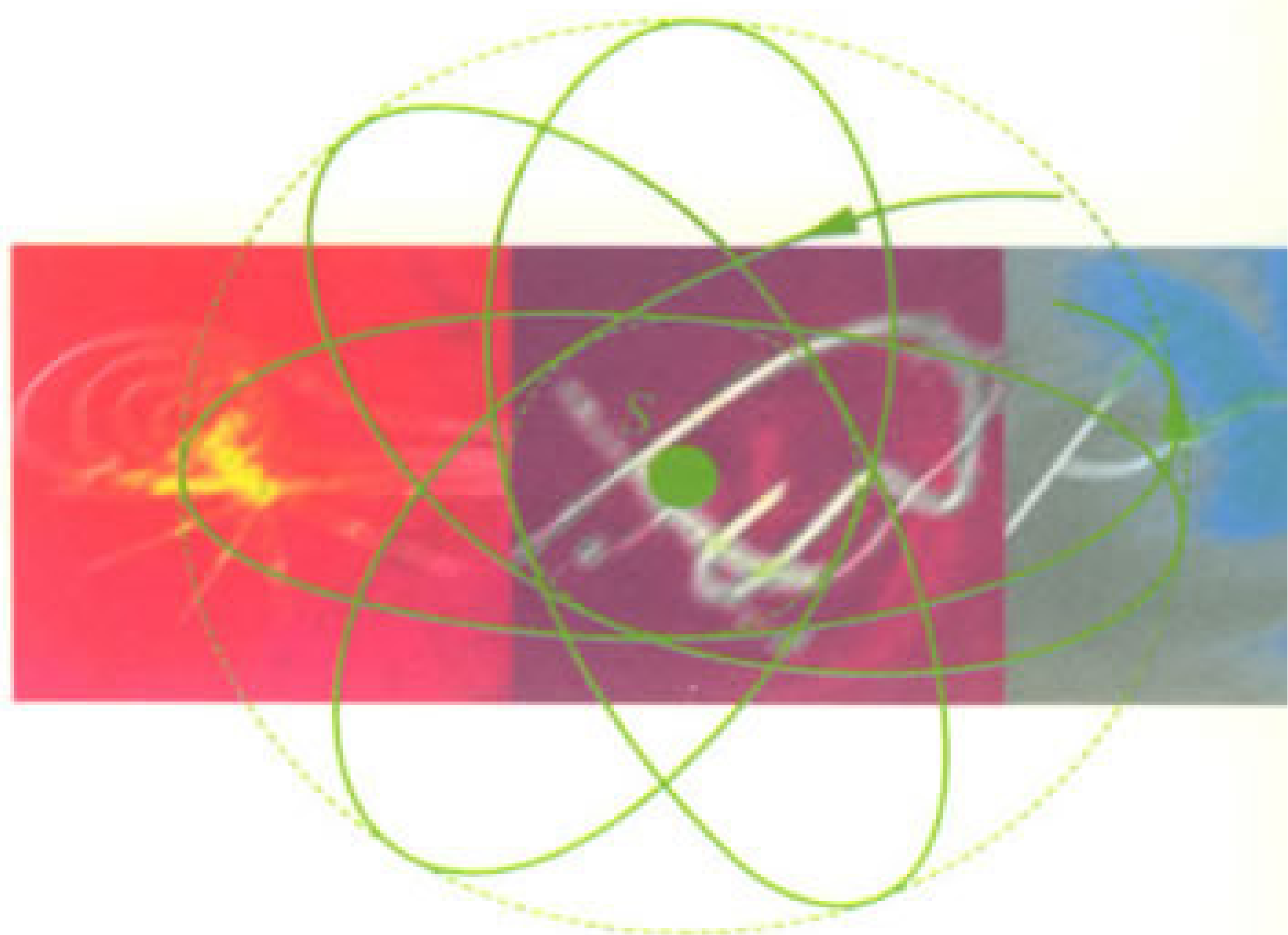


开放人文



天 遇

混沌与稳定性的起源

[罗] 弗洛林·迪亚库 [美] 菲利普·霍尔姆斯 著 王兰宇 译 Florin Diacu & Philip Holmes

CELESTIAL ENCOUNTERS

THE ORIGINS OF CHAOS AND STABILITY

上海世纪出版集团

天 遇

混沌与稳定性的起源

[罗] 弗洛林·迪亚库 [美] 菲利普·霍尔姆斯 著 王兰宇 译
陈启元 井竹君 校



<http://rbook.net/bbs/>

世纪出版集团 上海科技教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

天遇：混沌与稳定性的起源/(罗)迪亚库(Diacu, F.),

(美)霍尔姆斯(Holmes, P.)著;王兰宇译.

—上海:上海科技教育出版社,2005.4

(世纪人文系列丛书)

ISBN 7-5428-3793-1

I. 天... II. ①迪...②霍...③王... III. 多体问题—
普及读物 IV. 0413.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 010053 号

责任编辑 潘 涛 章 静

装帧设计 陆智昌

天遇——混沌与稳定性的起源

[罗]弗洛林·迪亚库 [美]菲利普·霍尔姆斯 著

王兰宇 译

陈启元 井竹君 校

出 版 世纪出版集团 上海科技教育出版社
(200235 上海冠生园路 393 号 www.ewen.cc)

发 行 上海世纪出版集团发行中心

印 刷 商务印书馆上海印刷股份有限公司

开 本 635×965 mm 1/16

印 张 18

插 页 4

字 数 216 000

版 次 2005 年 4 月第 1 版

印 次 2005 年 4 月第 1 次印刷

ISBN 7-5428-3793-1/N·661

图 字 09-1998-072 号

定 价 25.00 元

世纪人文系列丛书编委会

主任

陈 昕

委员

丁荣生	王一方	王为松	王兴康	包南麟	叶 路
张晓敏	张跃进	李伟国	李远涛	李梦生	陈 和
陈 昕	郁椿德	金良年	施宏俊	胡大卫	赵月瑟
赵昌平	翁经义	郭志坤	曹维劲	渠敬东	潘 涛

出版说明

自中西文明发生碰撞以来，百余年的中国现代文化建设即无可避免地担负起双重使命。梳理和探究西方文明的根源及脉络，已成为我们理解并提升自身要义的借镜，整理和传承中国文明的传统，更是我们实现并弘扬自身价值的根本。此二者的交汇，乃是塑造现代中国之精神品格的必由进路。世纪出版集团倾力编辑世纪人文系列丛书之宗旨亦在于此。

世纪人文系列丛书包涵“世纪文库”、“世纪前沿”、“袖珍经典”、“大学经典”及“开放人文”五个界面，各成系列，相得益彰。

“厘清西方思想脉络，更新中国学术传统”，为“世纪文库”之编辑指针。文库分为中西两大书系。中学书系由清末民初开始，全面整理中国近现代以来的学术著作，以期为今人反思现代中国的社会和精神处境铺建思考的进阶；西学书系旨在从西方文明的整体进程出发，系统译介自古希腊罗马以降的经典文献，借此展现西方思想传统的生发流变过程，从而为我们返回现代中国之核心问题奠定坚实的文本基础。与之呼应，“世纪前沿”着重关注二战以来全球范围内学术思想的重要论题与最新进展，展示各学科领域的新近成果和当代文化思潮演化的各种向度。“袖珍经典”则以相对简约的形式，收录名家大师们在体裁和风格上独具特色的经典作品，阐幽发微，意趣兼得。

遵循现代人文教育和公民教育的理念，秉承“通达民情，化育人心”的中国传统教育精神，“大学经典”依据中西文明传统的知识谱系及其价值内涵，将人类历史上具有人文内涵的经典作品编辑成为大学教育的基础读本，应时代所需，顺时势所趋，为塑造现代中国人的人文素养、公民意识和国家精神倾力尽心。“开放人文”旨在提供全景式的人文阅读平台，从文学、历史、艺术、科学等多个面向调动读者的阅读愉悦，寓学于乐，寓教于心，为广大读者陶冶心性，培植情操。

“大学之道，在明明德，在新民，在止于至善”（《大学》）。温古知今，止于至善，是人类得以理解生命价值的人文情怀，亦是文明得以传承和发展的精神契机。欲实现中华民族的伟大复兴，必先培育中华民族的文化精神；由此，我们深知现代中国出版人的职责所在，以我之不懈努力，做一代又一代中国人的文化脊梁。

上海世纪出版集团
世纪人文系列丛书编辑委员会
2005年1月

献给玛丽娜(Marina)和拉兹万·迪亚库(Răzvan Diacu),
感谢他们给予的爱与关怀

纪念罗伯特·蒙太古·霍尔姆斯(Robert Montague Holmes,
1903~1995), 他在不知不觉中将他的儿子引向这条奇异的道路

中文版序

我们非常高兴地看到《天遇》一书中文版的问世。自庞加莱(Poincaré)时代以来,数学研究的世界已大大扩大。在庞加莱时代,聚会到一起组成很小的学术团体的巴黎、柏林、斯德哥尔摩的学术领袖们,大多数都是朋友或熟人。当时,除了美国和俄国以外,数学研究基本上都集中在西欧。如今,数学研究真正国际化了:特别是众多中国学生和学者到西方去求学、访问,他们无论在自己的国家还是其他国家都做出了重要的贡献。

中国现在已经深深融入到数学科学(mathematical sciences)的国际合作之中。1999年于北京和2001年于温哥华举行的加拿大—中国数学会议,以及将于2002年在北京召开的国际数学家大会,都说明了这一点。届时,来自世界各地的数以千计的数学家,将参加这一每4年举行一次并颁发菲尔兹奖的数学界最最重要的盛大集会。

我们希望本书能够引起华人数学家、科学家和学者们的兴趣,也希望书中阐述的历史和思想能够激励更多的大学生、中学生投身于这

个生机勃勃的动力系统研究领域。

作 者

2001 年 10 月

于不列颠哥伦比亚省维多利亚和新泽西州普林斯顿

序言和致谢

本书的创生过程或许是非同寻常的。第一作者弗洛林·迪亚库 (Florin Diacu) 是一名来自罗马尼亚的移民, 现居住在加拿大西部, 并在维多利亚大学讲授数学。迪亚库于 1989 年剧变前夕迁往德国, 此前他是一名中学教师。他利用业余时间研究天体力学问题, 后来向海德堡大学提交了有关该问题的博士学位论文。在维多利亚大学安顿 1 年后, 即在 1992~1993 年, 迪亚库讲授有关动力系统的研究生课程, 他在办公室的门上粘贴了许多关于奇怪吸引子及其他混沌对象的图片。这些图片吸引了来自不同领域想探讨混沌问题的学生们的拜访。学生们经常请他推荐一本普及读物。因为好像没有合适的选择, 迪亚库决定自己写一本书——同时可以提高他的英语水平。在撰写数学论文时, 人们只是使用很有限的词汇。

他想为非专业人士写这本书, 目的是描述他选择的研究领域中给他印象最深的思想与人。迪亚库曾经教过只具初级数学知识的年轻人, 于是他有能力向普通的听众表述他的想法以及他在此学科中所感

受到的兴奋。格莱克(James Gleick)的《混沌——开创新科学》和斯图尔特(Ian Stewart)的《上帝掷骰子吗?——混沌之数学》等书已经向大众展现了当前的研究动态与成果,然而迪亚库认为从某种意义上讲这些书都是没有根基的建筑物。尽管已有了很多精彩的描写,但似乎还需要一本从较深层次描述混沌与动力系统理论领域的中心问题—— n 体问题——的历史渊源与数学基础的书籍。 n 体问题的大部分历史发展并不广为人知。即使在距离昂利·庞加莱(Henri Poincaré)授课地点索邦大学(巴黎第五大学)很近的巴黎举办的关于混沌的展示“坍塌的殿堂”上,人们仍然可以发现诸如“该现象于20世纪60年代被发现”这样的词句。

迪亚库到蒙特利尔作博士后研究不久,他访问康奈尔大学时遇到了菲利普·霍尔姆斯(Philip Holmes)。后者不是天体力学领域的专家,但他在动力系统领域做过20年的研究工作。(尽管现在有人会认为天体力学只是动力系统理论中的一小部分,但本书将说明动力系统起源于天体力学。)迪亚库于1994年初完成了本书的初稿,他征询霍尔姆斯是否能阅读和审阅一下初稿。后者同意了,不久迪亚库收到一份用红笔做了大量批注的手稿。因此,他邀请霍尔姆斯作为本书的第二作者。霍尔姆斯起初不肯接受,他认为自己除了在本书的写作方式上提供了一些建议,没有其他的贡献。但他对于已经出版的有关动力系统最新发现的通俗读物并不完全满意,随着时间的推移,他意识到可以对有关他所研究的核心问题的数学思想的阐述做出一些贡献,于是本书就这样诞生了。

有关昂利·庞加莱发现混沌和他获得瑞典与挪威国王奥斯卡二世(King Oscar II)的嘉奖以及随后出版他的著作的故事,已在彼得森

(Ivars Peterson) 的好书《牛顿的时钟——太阳系中的混沌》中讲述过。第1章我们重述这个故事时将引用一些新的史料,力求对微分方程理论和庞加莱发明的几何理论给出更深刻的说明和体会。彼得森主要感兴趣的是天文学中与太阳系动力学相关的发展史,而我们将着重描述天体力学和一般的动力系统理论的数学基础,这与彼得森的书有相当大的不同。第1章还介绍动力系统栖居的数学宇宙——相空间,并解释相空间分析的某些基本工具。第2章继续介绍分析相空间的基本工具,同时阐述美国数学家伯克霍夫(George Birkhoff)和斯梅尔(Stephen Smale)给出的分析的、几何的与符号的方法。

第3章回到天体力学中那些引起庞加莱兴趣的问题,阐述奇点和碰撞理论。尽管在我们的一生中似乎太阳系都不可能发生这样的事,但是它们对于研究宇宙的长期发展史与理解 n 体问题相空间的结构皆很重要。(事实上,在1994年夏季写作本书时,苏梅克-列维彗星的碎片撞击木星,这次碰撞受到新闻界的广泛关注。)本章从潘勒韦(Painlevé)在斯德哥尔摩的演讲讲起——他也与瑞典王国有关——直到冯·塞佩尔(von Zeipel)的工作,最后讲述该领域的最新进展。

第4章是有关稳定性问题的。我们再次回到达朗贝尔(d'Alembert)、拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)和泊松(Poisson)的时代,然后离开法国向东前往罗马尼亚和俄罗斯去会晤哈雷特(Spiru Haretu)和李雅普诺夫(Aleksandr Mikhailovich Liapunov)。在此过程中,我们描述发展了两个多世纪的比较精细的近似级数解及由它们导出的关于稳定性的矛盾结果。稳定性争论直至20世纪50~60年代才被解决,第5章着重讲述这方面的工作。通过描述经典力学中最有影响的(最频繁引用的)结果之一柯尔莫哥洛夫-阿诺德-莫泽理论,或称KAM理论,我们会看到混沌与稳定性如何在

我们关于宇宙的数学模型中密切联系在一起。

本书有两个目的。首先，希望通过叙述天体力学和动力系统理论的历史发展，试图去重建人们所处的社会和智力环境。其次，我们力图从较深层次说明那些先驱们留给我们的数学思想与方法，以及我们在此基础上做出的贡献（相比而言是很少的）。本书适用于听说过混沌并想比较深入了解它的起源、理论和创立者的读者。尽管混沌具有越来越通俗的表现形式，如机场礼品店中的游戏和玩具，但它本质上是一门数学理论。我们希望更多的读者能够像我们一样发现那些隐藏在数学思想背后的有趣的激动人心的故事，这将鼓励他们继续探索数学世界的奥秘。因此，本书既不是通常的历史研究文献，也不是仅为研究者和学者所写的关于数学新思想的综述。事实上，我们的处理可能使某些研究者感到困惑，于是作一简短的解释是适宜的。

没有梦想的生活会是什么样呢？缺乏想像力的梦想又会是什么样呢？在许多方面，科学家和艺术家、作曲家、小说家、诗人一样都是梦想家。像后者中的许多人一样，科学家在现实世界里展开他们富于想像力的翅膀。数学家也不例外，但不同于其他科学家的是，他们的梦想至少在原则上是百分之百可证实的。而其他科学家必须依赖不确定的假说、不明确的假设或者不完善的观察和实验。数学家在承认最基本的公理以后利用精确的概念和定义以及他们的想像力和技巧所建造的理论体系是具有牢固基础的。每个数学家都幻想建造一些与他们的研究领域的内在精神和需要和谐一致的完美的大厦。这就是数学的强大动力与局限性：字面上这是一个自成体系的世界。

然而数学家终究是人，他们从事研究的动机与思想都来自于外部世界——日常生活中的问题和现象。不管一个定理看起来多么枯燥和专门，获得该定理的原动力和证明中隐含的思想却来自于发现者的日常经验、与朋友和熟人的讨论以及对于某些特别“实在”现象的研究。我们希望揭示数学家一生中的机遇、数学家人生中的交往、他们的洞见以及所做出的贡献之间的某种相互作用与影响。数学本身是一种国际性的语言，它的实践既是个人事物也是集体事物。本书将把读者带到许多不同的国度与文化中，我们将会发现许多政治和社会因素也影响着数学的发展。

学生们在遇到困难的证明或分析时常常会对大师们如何获得其中奥妙的思想感到惊奇。但是那些细节很少能够写入发表的论文及历史文献中。有时可以在数学家的信件、日记和私人论文中查到，但常常是随着数学家的故去不得而知了。本书不仅要在更大的数学世界中阐明不同的发现在“事成之后”是如何表示的，而且要在人文世界中识别它们是如何起源的。这对于本书中出现的当代人而言，是相当容易的。当一个思想的起源或一个证明的细节不清楚时，通过电子函件或电话常常就可以解决问题（或引出一些矛盾的解答）。而我们很难考察已经故去的人许久以前的故事。时间的流逝使当时发生的事件的许多细节已经变得模糊不清，有时除了事件发生的时间与地点以外，几乎很少能够揭示什么。

在尝试重现一些历史场景时，我们偶尔超出历史研究的范围对一些事件作解释。然而本书中的大量故事完全是以记载的历史事实为基础的，我们仅新增少数没有直接资料的场景与对话。我们通常把它们与人们关心的类似的记录在案的事件作类比处理。与数学家们的梦想不同，我们新增的故事是不可证实的。（但也是不可否证

的。)希望它们能够帮助读者更好地体会数学发明,乃至数学实质本身。我们为有记载的历史事件提供了相关的文献,在书末的注释中也明确指出了这些猜测性的段落。

本书从天体力学与 n 体问题的观点阐述动力系统理论的起源,同时我们将注意力集中在这一主题的数学基础上。在此提前向那些在本书中未能找到他们本专业的理论与应用的读者表示歉意。动力系统是一个如此迅速发展的领域,我们不可能在书中给出一个完整的描述,况且我们的时间与精力也是有限的!

在本书的写作过程中许多人提供了帮助:有的人提供了有价值的资料,有的人阅读了我们的手稿(或其中的主要部分),就材料的取舍、纠错、字句的斟酌提出了很多宝贵的意见,促使我们作出更好的解说。我们要特别感谢安德森(Karl Andersson),阿奇博尔德(Tom Archibald),阿诺德(Vladimir Igorevich Arnold),班纳-马丁(Mark Bannar-Martin),巴尔扎(Ilie Barza),沙普龙(Marc Chaperon),尚西内(Alain Chenciner),康利(Catharine Anastasia Conley),克雷格(Scott Craig),玛丽娜·迪亚库(Marina Diacu),多莫科什(Gabor Domokos),加伯(Robert Garber),杰弗(Joseph Gerver),加里斯特(Robert Ghrist),格林伯格(Arlene Greenberg),霍德(Holly Hodder),鲁思·霍尔姆斯(Ruth Holmes),杰克逊(Martha Mary Jackson),琼斯(Chris Jones),马瑟(John Mather),麦吉(Richard McGehee),米奥克(Vasile Mioc),莫泽(Jürgen Moser),皮特(Jaak Peetre),克里斯·菲利普斯(Chris Phillips),穆瑞恩·菲利普斯(Moireen Phillips),约翰·菲利普斯(John Phillips),里德(Bill Reed),萨瑞(Donald Gene Saari),索特(Jean-Claude Saut),西奈(Yasha Sinai),斯梅尔,达娜·施勒米乌科

(Dana Schlomiuk), 诺伯特·施勒米乌科(Norbert Schlomiuk), 西蒙(Carl Simon), 蒂(Garry Tee), 通保伊迪什(Stathis Tompaids), 费尔胡尔斯特(Ferdinand Verhulst), 弗金斯奇(Bogdan Verjinschi), 夏志宏(Zhihong Xia), 和兹德拉夫科夫斯卡(Smilka Zdravkovska)。同时对由于疏忽没有提到的人表示歉意。

还要感谢本书的编辑利普斯科姆(Trevor Lipscombe)及其普林斯顿大学出版社的同事们,特别是卡拉普赖斯(Alice Calaprice)为手稿的编辑付出了辛勤的努力,以及布雷斯特(Chris Brest)将我们的草图绘成精美的插图。

在本书写作期间,霍尔姆斯部分得到约翰·西蒙·古根海姆(John Simon Guggenheim)纪念基金的资助。最后,如果没有电子函件和 TeX 软件,本书或许还停留于一个梦想。

1996 年 4 月

于不列颠哥伦比亚省维多利亚和新泽西州普林斯顿

致 读 者

本书需要利用一些基本的数学工具给出关于混沌的清晰而严格的描述,因此部分章节是相当专业的。我们用星号*标记这些章节。只想了解混沌的历史概况的读者,可以在第一次阅读时跳过这些章节,以后再了解整个故事的内容。事实上,阅读带星号的章节并不需要过多的背景知识,但对不熟悉这些内容的读者,确实需要更多的时间与更大的毅力。

目录

1	中文版序
3	序言和致谢
10	致读者

1	1. 一个伟大的发现与一个错误
2	巴黎踱步
6	牛顿的洞见
8	自然法则的语言
13	实在之模型
19	流形世界
22	n 体问题
25	奥斯卡国王奖
29	庞加莱的贡献
33	《……新方法》
34	不动点 *

* 表示专业性内容

38	首次返回 *
41	瞥见混沌 *
48	潘多拉盒子
49	庞加莱的错误
55	一个惊人的发现
61	2. 符号动力学
62	从不动点开启的学术生涯
66	里约的海滨
72	斯梅尔马蹄 *
79	符号上的移位 *
83	混沌的符号 *
89	振荡与革命
95	一门新科学?
98	3. 碰撞及其他奇点
101	一个奇人
107	碰撞还是破裂
111	计算机游戏
117	如何逮兔子
123	成功的测度
127	将碰撞正规化
129	天体台球
136	会议巧遇
138	从四体到五体
141	一个世纪探求的终结
148	闲话对称性
150	晚宴时的主意

157	4. 稳定性
158	渴望有序
162	侯爵与皇帝
166	天体的旋律
172	永恒回归
176	扰动世界
181	如何稳定才算稳定?
182	定性的时代
188	线性化及其局限性
193	模型的稳定性
196	平衡的行星
203	5. KAM 理论
205	简化与求解
210	拟周期运动 *
216	扰动环面 *
220	信件、失去的解答和政治
226	关于证明的忧虑
232	扭转映射 *
236	一个有天赋的学生
240	混沌扩散
248	尾声

252	参考文献
-----	------

1. 一个伟大的发现 与一个错误

此书在未来的半个世纪中可能成为探索者攫取思想财富的宝藏。

——乔治·达尔文 (George Darwin, 1845~1912),

评庞加莱的名著《天体力学新方法》

在一个迷人的春日的午后，透过书房打开的窗户飘进来的声音和气味令庞加莱感到烦躁不安。朱尔·昂利·庞加莱 (Jules Henri Poincaré, 1854~1912) 向后推开椅子站起来，他想到室外走一走。由于他的工作看起来完全停滞不前，再没有什么理由能够使他振作起来。他应该怎样相信由他的计算得到的结论呢？尽管论证的每一步都可以由前一步合乎逻辑地导出，毕竟，他自己反复推导并检验了每一个步骤，然而他不能从整体上掌握这些推导过程。早在10年前庞加莱就开始思考这个问题，并且多年来反复回到这一问题上，但是他始终未有关键性的洞见。除非找到答案，否则他就无法完成那部著作的最后一章。

短暂的休息有时可以帮助一个人克服这样的困难。庞加莱想要出去走一走。走到哪里是无关紧要的，重要的是通过散步可以松弛大脑并使他注意到周围的世界。正如今天展现在人们面前的一样，19 世纪末的巴黎是一座充满了公园、历史、文化名胜和浪漫色彩的迷人的大都会。散步时有许多新鲜事物令庞加莱去看、去想。一两个小时以后，庞加莱就会精神振作地回到他的书桌旁。

尽管拥有非凡的天资与才华，庞加莱多年来还是像其他巴黎的中产阶级一样生活着。在熟人和同事的眼里，他始终是一位受人尊敬的教授与科学共同体的一员、可爱的丈夫和慈祥的父亲。只有他自己，在研究间隙才会发觉将他的精力与时间同时分配给教学、行政管理工作以及他的家庭有多么困难。

巴黎踱步

朱尔·昂利·庞加莱 1854 年 4 月 29 日生于法国南锡。他的父亲是一位受人尊敬的医生。南锡是洛林的大公们过去的住地，现在是默尔特—摩泽尔大区的首府。它坐落在法国东北部默尔特河与马恩河—莱茵河附近，在巴黎以东 175 英里。庞加莱的父母都出生在洛林，祖辈也在那里生活很长一段时间。其中一位祖先让·约瑟夫·庞加莱(Jean Joseph Poincaré)是诺福查托的法官，卒于 1750 年。他的一个儿子约瑟夫·加斯帕·庞加莱(Joseph Gaspard Poincaré)曾在附近的布尔蒙学院讲授数学。

与数学的这点联系并没有使他的家庭预感到庞加莱这样一位伟大的数学家的降生。童年时期的庞加莱是个早熟的孩子，各门功课都超过了其他同学。普法战争一度中断了他的教育，但在 1870~1873 年被占领期间，他在没有受过正规教育的情况下很快精通了德语。

15 岁时，庞加莱深深地爱上了数学。一旦他被某个问题所吸引，房间里的其他噪声和活动都不能分散他的注意力。



照片 1.1 昂利·庞加莱。（米塔-列夫勒研究所提供）

1873 年，庞加莱以班级第一名的成绩毕业并进入有名的巴黎综合工科学学校，在那里他不需要做课堂笔记就能够掌握数学课程。他最初感兴趣的是采矿和地球物理学。事实上他曾于 1876 年进入国立高等矿业学校深造，但他马上放弃了工程学，于 1878 年开始在巴黎大学攻读数学博士学位，令人难以置信地用 1 年时间就获得博士学位。他的学位论文“具有多个独立变量的偏微分方程的积分”解决了一个困难的专门问题。接着他的一系列论文与专著开辟了数学的

一些新领域，同时改进了其他数学分支的研究。有趣的是庞加莱在进入综合工科学校的人学考试中绘画的成绩是零，在得到特许后他才进入那所学校。能够将几何方法引入动力系统研究中的这位伟人，竟然不能画一幅合格的图画。

本书开始时的情景发生于 1897 年春季，当时 40 余岁的庞加莱作为巴黎大学的教授、科学院的院士，在知识界广为人知并且深受爱戴。他已在数学、物理学、哲学等领域发表了 300 余篇科学论文、专著和文章。作为最后的科学“通才”，他在许多不同的学科都做出了开创性的贡献。他对数学与其他学科的影响是巨大的。

庞加莱喜欢踱步，并尽力让自己的头脑不去思考数学。不知不觉走到塞纳河畔，当埃菲尔铁塔映入眼帘时，庞加莱想起了 1889 年巴黎博览会上埃菲尔铁塔的揭幕仪式。那一年对他的职业生涯来讲与埃菲尔(Gustave Eiffel, 1832 ~ 1923)的一样重要，由于在本章主题涉及到的三体问题(three-body problem)的动力学方面的杰出工作，他获得了瑞典与挪威国王奥斯卡二世的嘉奖。

谈到巴黎博览会，埃菲尔当时建造了世界上最高的建筑物，一个多世纪以来埃菲尔铁塔已成为巴黎在世界上的象征。起初巴黎人并不喜欢它，即使今天仍有许多人不喜欢。这座神秘的怪物似乎远远盖过了巴黎原有的美丽和其他建筑的价值。旅游者来到巴黎最先要去看的就是埃菲尔铁塔。斯德岛(巴黎旧城)和巴黎圣母院，凯旋门与协和广场守卫着的香榭丽舍大街，歌剧院、蒂伊勒里公园和罗浮宫，蒙马特尔和拉丁区：那座大铁塔使所有这一切都黯然失色。它兀然耸立，傲视着四巨腿下的人群。

埃菲尔的想像力与胆识是令人钦佩的。但是庞加莱并不欣赏埃

菲尔铁塔。由于作为一名数学家、教授和普通的市民所赢得的良好声誉，庞加莱不可能冒险去支持一种容易引起争论的观点，否则极可能成为他人的笑柄。而作为一名数学家，在他的职业生涯中几乎没有这种危险。无论得到的最终结论是多么离奇，只要每一步的推理和计算都是符合逻辑的，你就不会有被别人耻笑的危险。对于优秀的艺术、建筑和文学作品，判断的原则是主观的、不受控制的，公众的意见完全可以毁灭一个人的前途。成功常常只是机遇的问题。有时甚至是能否抓住社会、历史的某个重大的转折时刻。尽管时代变迁、历史变革或者公众情绪有时会产生微妙的影响，但上述不幸的事件很少在数学界发生。

庞加莱是他同时代的少数几位能够掌握数学各个领域的最新成就的数学家之一。像他那样对于数学有着广泛的理解和深入的研究的人，在今天研究和信息爆炸的年代是不存在的：数学家与其他领域的科学家一样，被限制在很狭窄的领域中，大多数人对于外界的信息与成就一无所知。如今，即使在每隔4年举行一次的国际数学家大会上，参加者甚至不能总是轻易地理解其他领域专家报告的题目。

踱步中的庞加莱回想起早期的思想家以及命运对他们的捉弄。高斯(Karl Friedrich Gauss, 1777~1855)，作为19世纪上半叶最伟大的数学家，由于害怕同时代人的无聊的指责而不敢发表自己关于非欧几何(non-Euclidean geometry)的发现。高斯清楚许多人将不会理解他抛弃欧几里得(Euclid, 公元前320? ~ 前270?)的“常识”公理的做法。几年后，一名年轻的特兰西瓦尼亚官员鲍耶(Janos Bolyai, 1802~1860)继承父业研究同一问题时，他提出了类似的思想并发表了。鲍耶在给高斯的信中谈及这件事。在回信中这位德国数学家解释了他早期的思想。但今天在文献中被广泛引用的名字竟然是高

斯。具有讽刺意味的是，一直到鲍耶死后几十年都没有人注意到他的工作。庞加莱想到的另一个人是伽罗瓦(Evariste Galois, 1811 ~ 1832)，他年仅 21 岁就在决斗中死去，遗留下的一篇短文直到半个世纪后才被法国科学院接受。现在伽罗瓦理论(Galois theory)已成为数学的一个分支。

在巴黎的街道庞加莱踱步于回家的路上，他的思维回到了起初考虑的问题。他思考这一问题的方法是否过于保守呢？不，他必须符合逻辑地思考这个问题。不久他的思绪又回到周围的景物中。正当这次踱步看起来又是一无所获的时候，突然在他的脑海中闪现了一个念头，此时他明白了。他获得了一条意想不到的几何线索，通过它可以得到 8 年前他曾考虑的限制性三体问题(restricted three-body problem)的某些运动不稳定的结论。庞加莱的推导与计算都是完全正确的。但它们所隐含的结论是庞加莱无法接受的。现在他认识到，在那部概述了他前半生研究工作的书中所要描述的问题，实际上呈现了某种不可预知的奇怪现象(strange behavior)。庞加莱不知道该如何为他发现的现象命名，也不可能花更多的时间深入思考，但他还是瞥见了一个新的研究领域。尽管所有这些都与他明确的信念相违背，他还是要把它们描述出来。

本章的其余部分将描写与庞加莱这一敏锐的洞见有关的背景知识。这需要数学与其他许多科学领域的知识，100 年后关于庞加莱那天在巴黎领悟的奇异现象(bizarre behavior)，我们知道的远不仅仅只是它的名字。它已经成为人们思考问题的一种新方式。我们称它为混沌(chaos)。

牛顿的洞见

那时庞加莱的头脑中在思考什么问题呢？为了阐述它，首先让我们

回到两个多世纪以前。1687年的盛夏，牛顿(Isaac Newton, 1642~1727)爵士出版了他的巨著《自然哲学的数学原理》(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)。我们追溯如此久远的历史的主要目的，就是探索数学与物理学发展中的一个重要的概念——微分方程(differential equation)。微分方程的雏形早在16世纪末就为对数的发明人、苏格兰数学家纳皮尔(John Napier, 1550~1617)所知。(纳皮尔的名字源自“napier”，no peer，即自由的人。)但正是牛顿将微分方程提升到今天它所在的科学的中心位置上。牛顿不仅说明了如何利用微分方程表述物理问题，而且为微分方程的求解建立了许多基本的数学工具。

《原理》一书十分艰涩难读，没有一定的基础是不可能理解牛顿的思想的。牛顿甚至宣称他如此写这本书的一个目的就是“避免成为少数数学的一知半解者吹嘘的本钱”。牛顿在物理学上的主要贡献是将引力与太阳系的动力学行为(其时间演化)联系起来。在牛顿以前，人们普遍认为引力只是作用在靠近地球表面的物体上。通过将引力作用扩展到宇宙万物上，牛顿认识到月球的运动、潮汐和岁差等现象都可以通过引力作用来解释。《原理》中的结论随即给牛顿带来了科学上的声望。

尽管《原理》对于物理学的影响十分巨大，但在它出版300年后，其长期影响却是数学上的贡献。《原理》的核心是微分学和积分学，这已成为今天大学新生的必修课(一些人讨厌的课程)，同时也是现代科学与工程学的基础。然而，人们很难看出《原理》与现代微积分教程的相似之处。对于今天的读者来说，牛顿的记号早已过时了。他的几何化的语言更难以被当今的科学家所理解。今天我们常用的记号，更接近于微积分的另一发明人莱布尼茨(Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646~1716)提出的方案(他与牛顿因为微积分

的科学优先权发生过激烈的争论)。具有讽刺意味的是,下面将要描述的庞加莱关于微分方程的新的探索从某种意义上讲更接近于牛顿的思想,因为本质上它是几何的方法。许多数学家都利用“空间图形”思考问题,虽然他们在发表的论文中避开几何图形。这种通过直观的图形进行思考的方法会吸引许多刚入门的学生,但需要想办法将它们编入教科书中。

牛顿进一步指出了如何推导出描述许多物理过程的数学模型。除了天体力学——关于天体运动的研究——他还建立了理性力学(rational mechanics)的基础,创立了足以解释和统一开普勒(Johannes Kepler, 1571 ~ 1630)、伽利略(Galileo Galilei, 1564 ~ 1642)和其他人的发现的理论。像欧几里得的几何公理方法一样,理性力学试图利用几条基本定律解释许多毫不相关的现象。微积分作为这套理论的核心,牛顿利用它引入并分析今天我们称之为微分方程的数学对象。什么是微分方程,它为什么如此重要?下面几页我们将离开庞加莱和牛顿去揭示这个概念。

自然法则的语言

数学为表述诸如牛顿的万有引力定律等物理规律提供了非常有用的语言。然而必须谨慎小心,经过几个世纪的发展,许多英语中的普通词汇都被数学家用来命名数学上的专有词汇和构造。这给我们的工作带来了困难:有时我们采用一个单词的一般含义以及它的引申含义,有时我们只需要采用它在专业上或“数学”上的含义。本书将采用楷体表示一些词汇与短语的专业用法。

最重要的一个数学“语句”就是微分方程。它把描述一个(物理)系统状态的变量(variables)的变化率同这些变量的当前状态联系

起来。我们用一个简单例子来说明——一个下落的球体——来说明。假设从高处的窗口释放一个球，球会直线下落。球体在下落过程中每一时刻的运动状态(state)都可以用两个变量来描述：它的位置或高度 h 与速度 v 。 h 与 v 被称作变量是由于它们随着时间与球体的下落而发生变化。将它们作为时间的函数表示为 $h(t)$ 和 $v(t)$ ，其中括号中的 t 表明 h 与 v 依赖于时间 t ， t 也是最常用的表示时间的字母。描述失业率或利率按月变化的图表就是关于时间的函数的例子。下面将说明在本例中最基本的前提就是函数 h 和 v 是存在的，并且可以通过求解相应的微分方程得到它们。

这两个变量对于确定小球的运动状态是必要的。利用牛顿力学的结论我们知道小球动量的变化率等于它所受到的重力、空气阻力、风和下落过程中与它相撞的物体等产生的外力的总和。动量是质量与速度的乘积，但在本例中质量没有发生变化，因此可以说速度的变化率——加速度(acceleration)——乘以质量就等于作用在球体上的外力。(这就是普通物理学中有名的方程 $F = ma$ 的理论基础。)同理，速度恰好是位置的变化率。假设小球的质量足够大以至于空气的影响可以忽略不计，同时假设它是一个自由落体，只受重力的作用。牛顿万有引力定律告诉我们在地球表面附近，引力等于小球的质量 m 与万有引力常量 g 的乘积。于是得到以下关系式：

位置的变化率 = 速度

动量的变化率 = 重力，

或者可以利用沿用至今的莱布尼茨的记号：

$$\frac{d}{dt}h = v$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = -mg。$$

第一个方程就是速度的定义，第二个方程恰好是牛顿的一个运动定律的数学表达式。记号 d/dt 代表“变化率”。严格地讲，第一个方程中的 $(d/dt)h$ 表示变量 h 关于时间 t 的增量 (dh) 的变化率。(牛顿在变量的上方加上小圆点—— $\dot{h}$, $\dot{v}$ ——用来表示变化率的记法仍然在物理学与工程学中被广泛使用。)第二个方程中的负号意味着重力的作用是向下的，这与我们通常测量高度与速度时假定的方向向上是相反的。由于小球的质量是一个常数，它不随时间改变，实际上可以在第二个方程中消去它。下面我们会发现只要给定球体被释放瞬间 $t = t_0$ 时两个变量的值 $h(t_0)$, $v(t_0)$ ，上述两个关系式就唯一地确定了函数 h 与 v 。

这就是本书所要写的第一个也是最后一个微分方程，利用庞加莱的开创性工作，我们可以不写出方程而给出它的优美的几何刻画。观察下落的球体，通过判断它在某一时刻的高度与速度就可以预测它什么时候碰到地面。位置、速度和时间都混合在这个问题中。为了将它们区分开来，我们抛开小球下落的物理空间，考察数学上的相空间(phase space)或状态空间(state space)，它就是用来表示描述小球运动的微分方程的空间。现在相空间不再是我们已经习惯的三维世界了：它只是用图形的方式从物理空间抽象出来用以表示变量(描述球之状态)的东西。如上所述，状态空间由位置 h 和速度 v 来刻画，它们都依赖于时间 t 。在相空间中可以用描述球体在每一时刻的位置与速度的曲线将相空间中的点区分开来。

在图 1.1a 中，水平轴表示高度，垂直轴表示速度。此时相空间就是平面。正速度代表球体在上升(被抛上去)，负速度表示球体在向地心方向下落。箭头表示时间增加的方向。假设小球从静止时被

释放的高度为 20 米(在 a_0 处)。它沿着曲线 $a_0 a_1$ 碰到地面(高度是 0 米), 速度为 -19.81 米/秒。若球从 25 米处 b_0 落下, 则到达地面 b_1 时的速度为 -22.15 米/秒。如果从地面以同样的速度 ($+22.15$ 米/秒) 向上抛出小球, 它由 b_2 出发按顺序到达 b_2, b_0, b_1 , 首先上升 25 米然后下降, 在相空间中与在同一高度释放小球的路径完全一致。图 1.1a 在同一张图中绘出所有可能的小球运动的曲线族 (family)。这里“曲线族”表示由同一个微分方程导出的曲线。

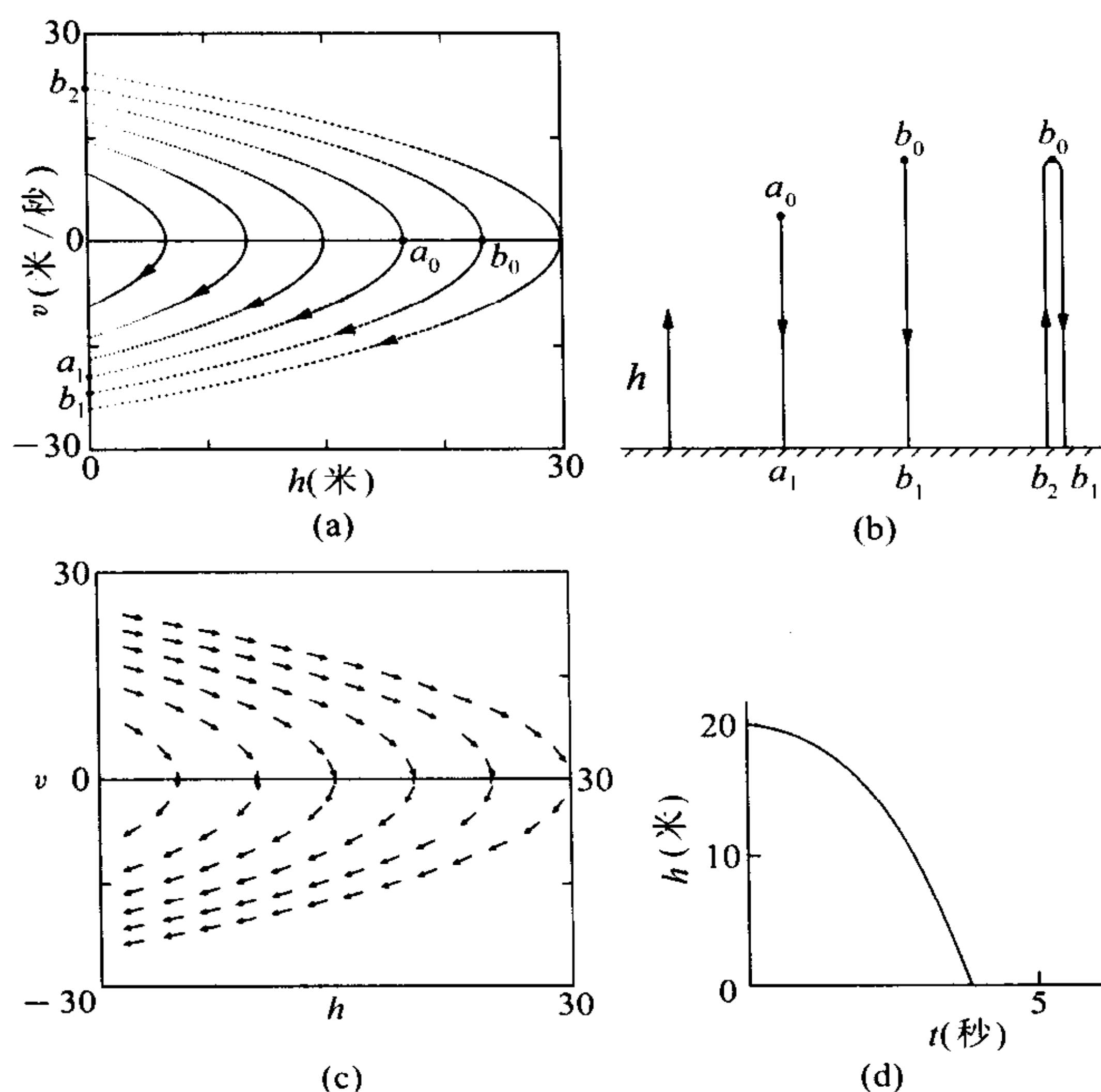


图 1.1 (a)直下落的球体的二维相空间, (b)在物理空间中的相应运动, (c)向量场, (d)作为时间函数的位置 $h(t)$ 。

相空间中的这些曲线都是抛物线, 如图 1.5c 所示, 抛物线是古希腊数学家研究过的圆锥曲线之一。然而不能把这些曲线与在空中以一定角度抛出的小球运行的抛物线混同起来: 我们在相空间描绘的

曲线代表的运动，都对应于小球被垂直释放或者被从地面垂直抛到空中再沿同样的路径返回到地面，见图 1.1b。由于在上述系统中只有一个球，并且球体运动的方向只有一个，我们称此系统具有一个自由度。每一个自由度在相空间中代表的维数是二：其中一维表示位置，另一维表示速度。为了描述以一定角度斜抛球体的运动，我们需要的相空间的维数是四：其中二维代表水平与垂直方向的位置，另二维代表相应方向的速度，此时小球沿着垂直方向运动的同时还沿着水平方向运动。我们称上述系统具有二个自由度。若是两个球就需要将相空间的维数加倍，这是因为对于每一个球体都需要两个位置和两个速度分量。一般地，位置与速度都是具有 n 个分量的向量(vectors)，每一个分量都是沿着指定方向的相应量关于时间的函数。尽管我们不能画出四维以上的图形，但我们可以导出系统本身的许多性质。

需要指出的是，上述微分方程是垂直上抛或自由落体运动的最简单可行的模型。因此牛顿定律可以有效地解释伽利略在比萨斜塔上所做的著名实验(或许是杜撰的传说)，伽利略从比萨斜塔上释放质量不同的小球，他发现这些小球同时碰到地面。注意到在上面第二个方程中左右两端可以消去小球的质量：下落物体的加速度与其质量无关。但在该模型中没有包含诸如空气阻力等“二阶”效应。像所有的理论与模型一样，它只是一种理想化与简化的实在观(view of reality)。物理学的成功从很大程度来讲是因为科学家们懂得如何忽略无关的信息而抓住问题的本质。上面的模型如果需要也可以加入其他因素的影响。为了精确地预测一片羽毛或者一片树叶的运动过程，我们就需要考虑羽毛或树叶在飘动中所受到的空气的作用力。

实在之模型

模型在科学中起着核心作用。在研究遗传学的复杂性时，生物学家借助繁殖果蝇的世代研究它们的突变。果蝇为其他高等的物种提供了模型，人们希望这样能够抓住问题的实质，果蝇相对的简单性能够让人们对于一般的遗传学有更好的理解。同样，牛顿力学中的微分方程为下落的球体或者行星的大范围运动等许多自然现象提供了模型(models)。这些模型是对真实现象的一种近似。弹性理论能够预测桥梁所受的应力精确到几个百分点，但并不是所有的模型都如此精确：微分方程模拟的神经网络为真实系统只提供了一种隐喻。这种隐喻使人联想到文学，它们之间有着相似之处。就像诗人奥登(W. H. Auden)谈到的艺术、音乐和文学的“第二世界”一样，微分方程处于二级数学世界(secondary mathematical world)，我们希望通过它们更好地理解我们自己的“实在”世界(“real” world)。正因为如此，微分方程遵从纯粹数学世界的一切规律，纯粹数学中的所有工具和技巧都可以用于求解微分方程。下面我们将继续阐述这些观点。

图 1.1 中的曲线是如何获得的？它们是通过求解或积分我们在先前用语言和符号写出的微分方程得到的。我们曾经指出，牛顿和莱布尼茨为此发明了微积分。积分法将与变化率有关的方程表示成包含小球每一时刻的位置和速度的关系式：它揭示了我们提到的函数 h 与 v 之间的关系。粗略地讲，我们通过累加(积分)时间进程中所有无穷小的变化，就可以得到 $h(t)$ 和 $v(t)$ 在这段时间的变化。下面将从几何的观点描述以上过程。

变化率可以通过在相空间的每一点上附加的一个小箭头来表示，箭头的长度表示变化率的大小，角度则表示方向的变化，利用箭头能够表示出在这点速度所发生的变化。这样的箭头被称作向量，所有

的箭头组成一个向量场(vector field); 见图 1.1c。为了求解这个微分方程, 首先从一点 a_0 出发, 沿着上述箭头, 产生一条曲线, 它在每一点都与微分方程所定义的向量场相切。站在相空间的平面上, 人们可以想像他迈出的每一步都沿着向量的方向, 步伐的长度恰好与向量的长度成正比。在他的落脚点重复以上过程, 如此反复地走下去。让每一步的距离逐渐变短并且增加步数, 这样产生的多边形路线就会逐渐接近一条光滑曲线。

向量场的作用像风那样, 在田地里留下层层麦浪; 或者像河面上飘着浮沫和浮木的河流那样, 所过之处留下片片波纹, 它在相空间将由一点出发的微分方程的解描绘成全局的相图(phase portrait)。这样得到的完整图形就是微分方程的通解(general solution)或流(flow)。我们称流走过的路线为解曲线(solution curves)、轨道(orbis)或轨线(trjectories)。图 1.1a 中的抛物线族就是微分方程通解的一个例子, 后面将会遇到更多。最后, 相空间中的每一条路线都可以表示成时间的函数: 图 1.1d 中的曲线表示小球在每一瞬间的高度。

牛顿认为他的发现非常重要, 于是将它用字谜的形式发表出来, 如果翻译成普通的文字就是: 给定与流量有关的微分方程, 那么它的流能够完全被确定, 反之亦然。这表示了微分方程与流的几何之间的关系。流一词源于牛顿用来表示动态变化的量的词语 *fluent*; 现在我们称变化率为导数(derivatives), 而牛顿称它为 *fluxions*(流数)。

求解微分方程意味着寻找它的通解: 微分方程的流。有时我们只需要从某一特定点出发的一条解曲线, 比如图 1.1 中的 a_0 。我们称这种问题为微分方程的初值问题(initial value problem)。上述问题正是微积分教材所要处理的问题: 作者希望得到的答案是学生能够给出描述状态变量的值的明确表达式, 比如在给定初始位置和速度的

情况下写出每一时刻的位置和速度。遗憾的是，能够显式地解出方程并写出所得表达式的微分方程的种类是很少的。（关于这一点大多数微积分教材都避而不谈：当人们获知他们努力学会的方法并不十分有用的时候，他们是不会感到高兴的！）相反，在庞加莱的几何方法中，我们试图寻找解的定性性质，而不是它的简单表达式。这种定性方法适用于更多类型的微分方程。

但是首先我们必须确信方程的解是存在的：即问题中的变量确实可以表示为时间的函数，即使我们不能给出它们的显式表达式。在有些情况下可能不存在这样的光滑曲线，它在每一点的切向量都属于给定的向量场。这些向量相互“矛盾”，因此人们不可能沿着箭头得到一条连续的曲线。这种情形违反了解的存在性，从而就没有意义去研究不存在的对象。有时通过一个给定的点可以画出两条或者更多条光滑曲线，它们在每一点的切向量都取自微分方程给定的向量场（如图 1.2 中的曲线 $r_{-1}r_0r_1$ 和 $s_{-1}s_0s_1$ ）。此时我们称微分方程不满足唯一性。

存在性(existence)与唯一性(uniqueness)问题是微分方程理论最基本的问题。一大类向量场都满足存在性和唯一性，其中包括几乎所有描述物理过程的模型。这一幸运的事实使物理学有着惊人的预测能力。让我们试着想像一下在核反应堆模型的初值问题中，如果唯一性不满足会发生什么事？此时，对于给定的输入，人们无法确定会发生哪种反应：安全的反应，例如在理想的操作条件下达到平衡；或导致核灾难的危险的反应。在简单的落体模型中，如果不能通过小球的初始位置和速度来预测它飞行的路线和时间，那么这个模型就毫无用处。

当然，事情往往并不像乍一看那样简单。微分方程为物理学、

化学、生物学、社会学、经济学和心理学等诸多不同领域提供模型，这些模型的动力行为有很大的差别。即使存在性和唯一性这些基本的问题对于某类微分方程来讲可能很容易，但是对于其他方程就可能尚未解决。例如，纳维-斯托克斯方程 (Navier-Stokes equations) 是三维物理空间中不可压缩流体(比如水)运动的模型，它的解的全局存在性还没有被证明。尽管已经发现该方程可能存在的解的许多性态，但是我们不清楚这些解是否真正地存在。

数学家和物理学家关于存在性和唯一性存在着争论。后者一般并不过多地考虑存在性问题。对他们来讲微分方程主要是一种手段，目的是利用方程解的性质去理解和预测物理现象。这是完全合理而自然的。但是数学家首先关注的是存在性与唯一性，在解决了这些问题以后才去研究解的性质。他们的理由也是明显的，他们主要感兴趣的是数学对象，从而理所当然地对不存在的对象格外小心。(从数学的逻辑来讲，关于不存在的对象所下的任何结论都是正确的，这是因为我们所要预测的事物根本就不存在。)忽视了这些基本的问题，人们就会得出许多错误的物理结论。然而对于像纳维-斯托克斯方程这样公认模型来说，专家中几乎没有人怀疑解的存在性，大多数人都相信总有一天人们会解决存在性问题。于是，解的精密性质和尚不了解的物理意义在研究中出现了。只有在这种情形，假定解是存在的并且花时间研究与应用有关的解的性质看起来才是合理的。

上述这些问题需要数学家和物理学家的共同努力。它们是应用数学的中心课题，应用数学领域有着模糊不清的边界，它处在纯粹数学——由公理和定理组成的超自然的领域——和我们生活的真实、纷乱的自然世界之间。应用数学家主要关心数学模型的建立和分析。应用数学领域最出色的工作是能够轻而易举地将实际应用转化为纯粹

数学中的问题，并且再回到应用中：在实在世界与它的二级世界之间进行真正的“技术转移”。

我们曾经提到全局存在性(global existence)的概念。为了理解它，回想图 1.1a 中的解曲线是由表示系统运动状态的点随着时间的变化而得到的。全局存在性意味着这条曲线对于过去、现在以及将来的每一时刻都有定义。这并不是说轨线在相空间一定要从无穷远处出发并且回到无穷远。这种轨线可以是一条闭环，如图 1.2 中的闭环 $q_0 q_1 q_2$ ，系统反复围绕它旋转无限多次。这就是周期轨道(periodic orbit)的一个例子，或许我们最熟悉的例子是地球每年围绕太阳运行一周的轨道与月球每月围绕地球运行一周的轨道。

与全局存在性相对的概念是局部存在性(local existence)。它只意味着解曲线在初始时刻周围很短的一段时间区间中存在(例如，图 1.2 中 p_0 附近曲线段 $p_{-1} p_1$ 就是被截断的一小段时间区间中的解)。我们将研究的天体力学中的微分方程一般都满足局部存在性假定，但不一定满足全局存在性，这在第 3 章中将会看到。全局存在性蕴含局部存在性，反之，则不然。

我们关心的另一个重要性质是解关于初值条件的连续性。粗略地讲，它意味着接近初值条件(数据)的轨线至少会在一段时间内保持很近的距离；参见图 1.2 中的曲线 $c_0 c_1$ 和 $d_0 d_1$ ，它们具有相近的初值条件 c_0 和 d_0 。通常的微分方程都满足上述性质。然而，如果我们考虑全局定义的解，它们具有相近的初值条件，试问它们能否任何时刻都保持很近的距离，这就需要我们定义一个并不常见的性质——稳定性(stability)，见图 1.2 中的曲线 $e_0 e_1$ 和 $f_0 f_1$ 。稳定性也是微分方程研究中的一个基本概念，它产生于天体力学中的

一个传统问题——太阳系的稳定性——并在 19 世纪末李雅普诺夫 (Aleksandr Mikhailovich Liapunov, 1857 ~ 1918) 的工作中得到系统的发展。我们将在第 4 章详细讨论它。

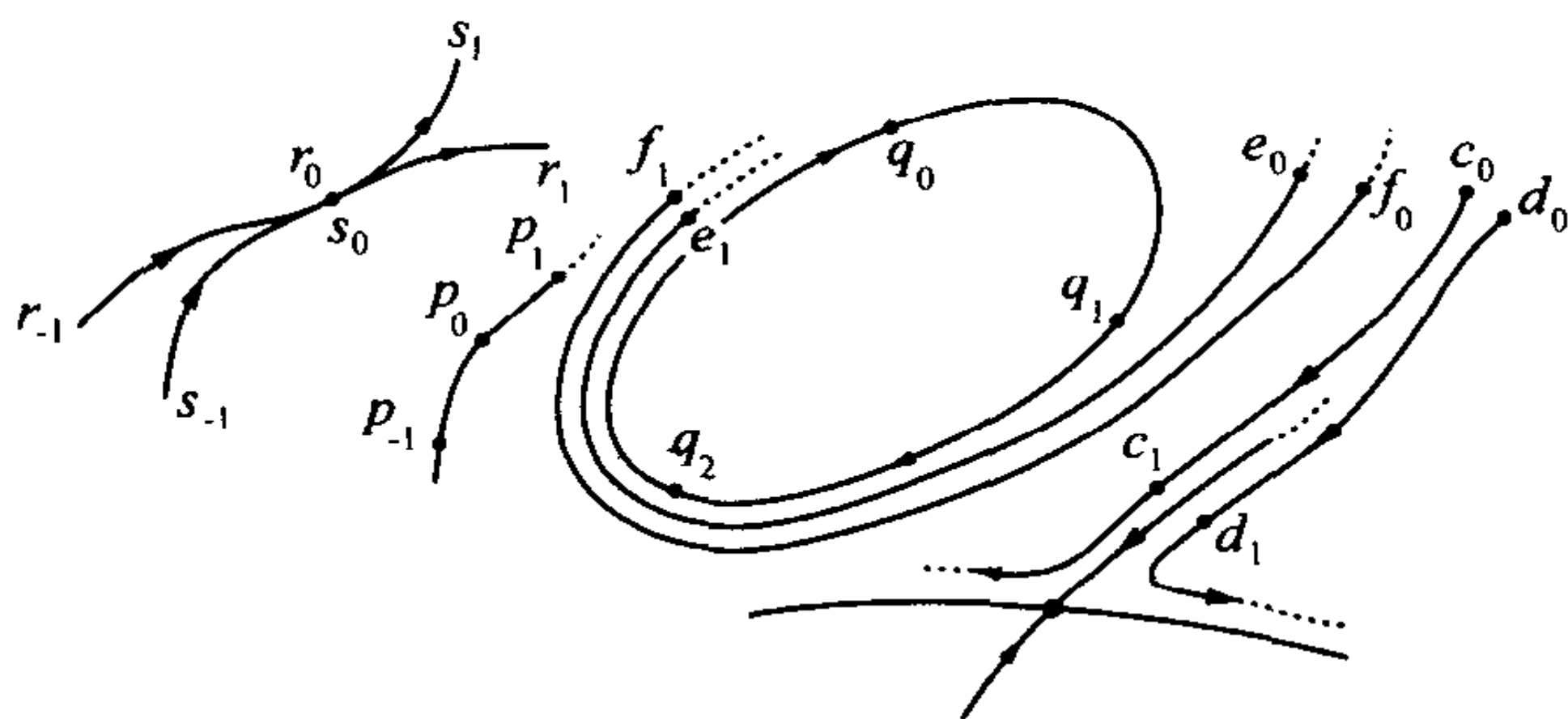


图 1.2 另一个二维相空间，分别表示不满足唯一性的解、具有局部存在性和全局存在性、对初值条件的连续依赖性以及稳定性的解。参见正文中的说明。

我们给出的几乎所有的例子和说明都是用二维相空间——平面——表达的。如果将每个问题都限制为两个状态变量，那么我们不可能走得很远。幸运的是，微分方程可以定义在更一般的“抽象”空间中。不仅可以推广到高于二维的空间，还可以进一步推广到更抽象的几何对象——微分流形 (differentiable manifolds)。最自然的推广是三维空间，平面上微分方程的定义和关于解的存在性、唯一性和连续依赖性的结论都可以推广到三维空间。我们还可以推广到更高维的空间，比如 4 维、5 维甚至 7058 维。不管维数有多大，只要它是有限的即可。这些空间超出了我们的物理想像力，我们甚至无法想像四维和五维的对象，但通过与一维、二维和三维空间的类比，我们能够得到许多有用的结论。

高维相空间的研究不仅仅是数学家发明的游戏。表面看起来似乎矛盾，但是从物理学和工程学中产生的大多数动力学问题在高于三维的空间或微分流形中更容易处理。我们已经指出需要四维空

间——两个位置分量和两个速度分量——描述以任意角度抛出的小球的运动过程。为了描述抛出后在空间中旋转的木棒的运动状态，我们还需要引进描述方向的角变量和与之相关联的角速度。在汽车的最简单可行的模型中，可能需要大约 15 个位置分量和 15 个速度分量才能描述车体、轮胎和悬挂部件的相对运动：一个 30 维的相空间。当小球、木棒和汽车在三维世界中运动时，它们的数学模型的状态空间却成为具有不可思议的维数的空间。

流形世界

什么是微分流形？首先让我们从二维流形谈起。所谓二维微分流形，是指局部可以用平面的一部分去近似的几何对象，像纸制的面罩一样，一小块平坦的纸面被折叠成为光滑的曲面。球面是二维流形的一个例子：在球面的每一点都有一个小邻域，它能够被一块平面区域很好地近似。〔对于数学家来讲，球面(sphere)指的是不包含球体内部实体的二维表面。〕尽管我们生活在地球上，但通常可以认为我们生活在一块平面上，而且区域地图也正是依靠球与平面的近似绘制的。事实上，人们曾用了数千年的时间才认识到地球不是平的。另一类经典的并且重要的二维流形是环面(torus)，即炸面圈的表面在数学上的名称。环面上任何点的邻域都能够用一小块平面去近似。从局部来看，环面、球面与平面是不可分辨的：我们只能“旁观者清”，从曲率和全局结构区分它们。（读者可以想像生活在环面状星球上的外星人会怎样发现他们生存的空间呢？）图 1.3 描绘了这三类常见的二维流形的例子；你可以想到其他的二维流形吗？微分流形中“微分”意味着流形是光滑的，从而允许我们在流形上实施(微分)演算。

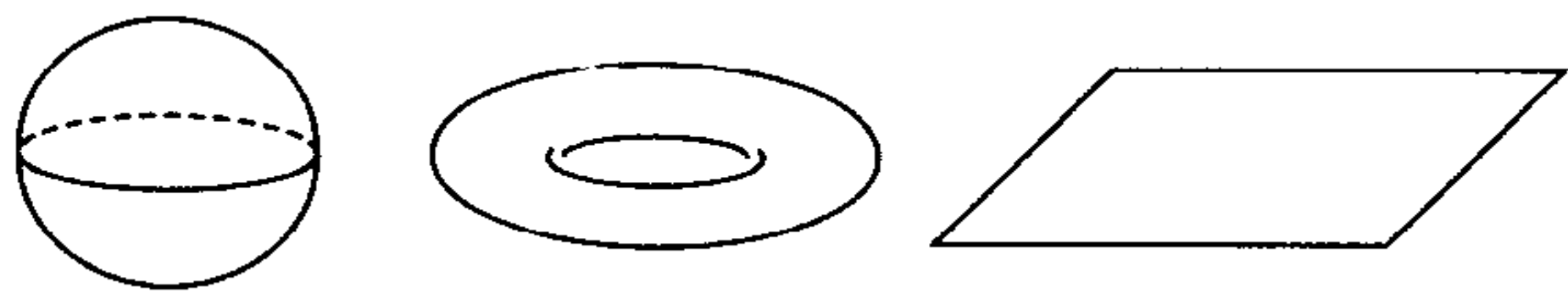


图 1.3 球面、环面和平面。

同理，对于任何大于 2 的数字 k 都可以定义 k 维流形。例如， k 等于 3，我们就要求流形上每一点的小邻域都可以用通常的三维空间中的一部分去近似。值得注意的是，流形一般不能全部地或整体地与(同它局部近似的)平坦空间近似。我们不可能把球展成平面，实际上它们是有差别的：比如，球没有边界或边缘，但它是有限界的。中学几何课本中的直线和平面以及我们日常体验的周围空间都是平坦的，换句话说，它们都是一维、二维和三维的欧几里得空间。

我们可以在球面这样的微分流形上定义微分方程。于是可考虑限制在它上面的向量场，这意味着球面的每一点都联系着某个向量，该向量包含在与球面在该点相切的平面上。求解球上的初值问题，是指在球上找到一条光滑曲线，使得曲线在每一点的切向量恰好就是向量场在该点的取值(见图1.4)。在第 5 章中我们将讨论环面上的向量场。

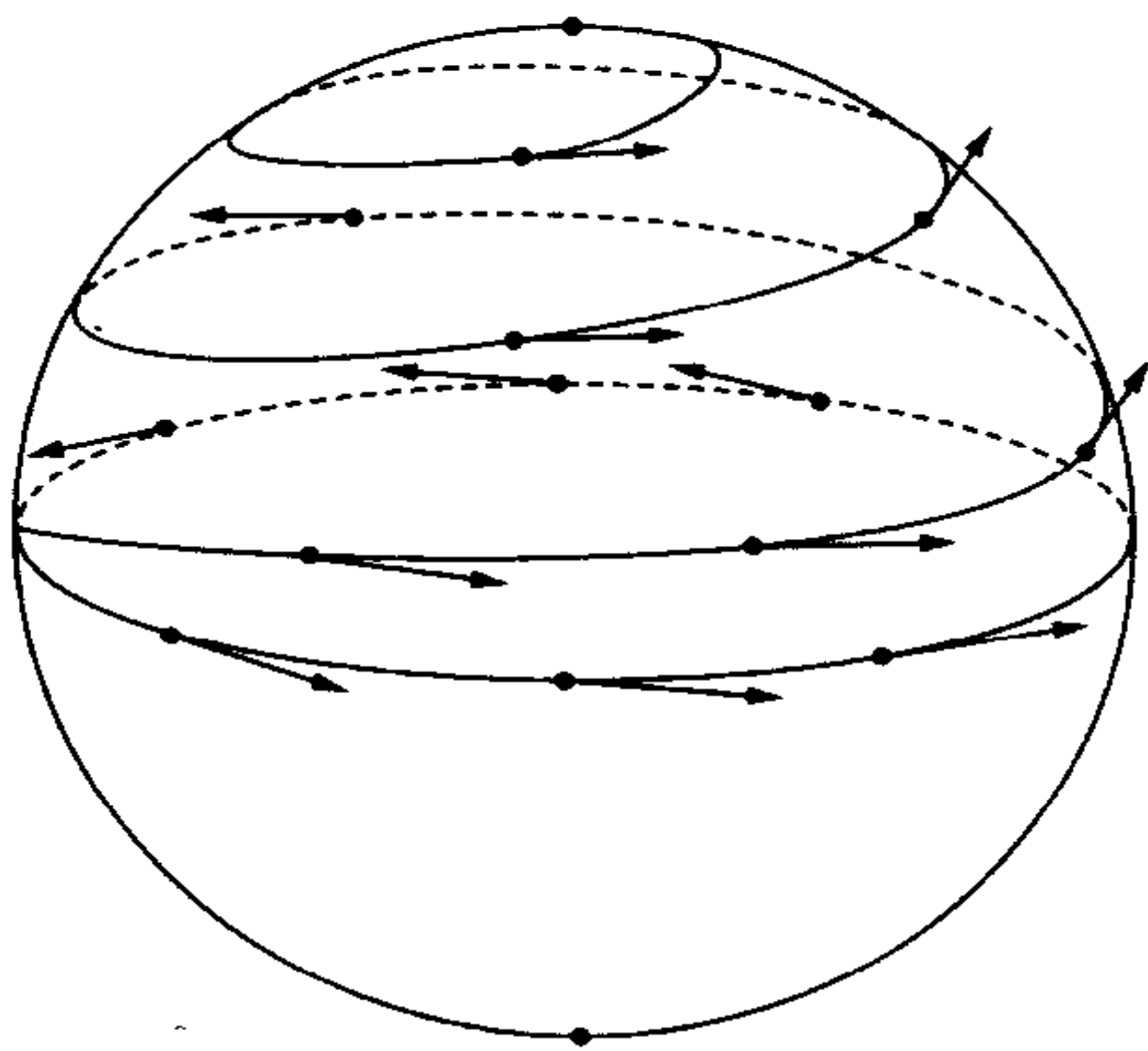


图 1.4 球面上的向量场与它的部分解曲线。

我们已经看到在描述物理过程时需要高维相空间，但为什么还需要进一步引进更加复杂的微分流形呢？一个主要的原因就是利用它们减小相空间的维数从而使微分方程易于求解。牛顿力学揭示了大量的守恒量或运动常数：某个系统的动力学性质可能发生改变，可是一些常数在系统演化时仍然恒等于它们的初始值。于是从它们能够导出关于状态变量的一些固定的(代数)关系式，从而状态变量被限制在这些代数方程在相空间描绘的一部分区域中，这些区域通常都是微分流形。

刚体的角动量问题就是一个很好的例子。考虑在空中下落的木棒，利用牛顿运动定律，如果没有旋转的外力(转矩)作用在木棒上，那么它的角动量会保持不变。利用上述结果，在橄榄球赛中四分卫为了使球稳定地沿着抛出的路线前进，他在投球时给球加上了旋转。刻画三维(物理)空间中物体的角动量需要三个分量 a_1 , a_2 和 a_3 ，而利用守恒定律，我们得到 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \text{常数}$ ，此方程恰好三维空间中定义了一个二维球。因此关于刚体运动问题的方程能够用约化后的二维球代替过去的三维状态空间进行求解。第5章中我们将详细阐述这种约化法。即使不能就方程的所有解进行上述的约化，原方程的一些特殊轨线的集合仍然可以存在于较低维数的光滑流形上，这为我们描绘完整的相图提供了基本的框架。

流形的研究是拓扑学(topology)的重要组成部分，所谓拓扑学，是数学的一个分支，主要研究数学对象在大小与形状发生变化时能够保持不变的内在性质。毫无疑问，庞加莱是拓扑学[又称作位置分析(analysis situs)，顾名思义，是以位置为研究对象的。]的创始人之一。至此我们已经介绍了一些拓扑学与微分方程理论的知识，下面将继续阐述庞加莱的深刻思想。

n 体问题

究竟是什么问题使庞加莱倾注如此多的精力呢？他正在探寻一个人类最古老的梦想：揭开太阳系中的天体——太阳、行星、月球等——的运动之谜。关于这个问题的第一个完整的数学描述出现在牛顿的《原理》一书中。牛顿利用微分方程表述万有引力相互作用——行星和恒星运动的源动力。

牛顿起初理所当然地假定大多数天体都可以看作是质点。我们首先考虑二体问题，牛顿的万有引力定律揭示了作用在每个物体上的引力与两个物体质量的乘积成正比，而与它们中心之间的距离的平方成反比，并且引力作用在它们中心连线的方向上。因此万有引力作用在球体上与作用在两个球体的中心分别放置与球体等质量的质点的效果是一样的。牛顿正是利用以上假设发展了他的整套理论。在即将出版《原理》一书时，他认识到这一假设需要进行验证，于是抽出时间给出了严格的数学证明，这推迟了《原理》的出版。然而，利用上述基本假设，我们能够阐述在物理学与数学的历史发展中最重要的问题之一——著名的 n 体问题 (n -body problem)。

这个物理问题可以通俗地表述如下：仅给出一组天体的当前位置与速度，试预测它们在未来以及倒推它们在过去的任意时刻的运动状况。精确地讲，考虑三维(物理)空间中的 n 个质点 $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，假设任何两质点之间的引力都满足牛顿万有引力定律。如果给定每个质点在某一“目前”时刻 t_0 时在空间的初始位置和初始速度，试确定每个质点在未来(或者过去)任何时刻的位置。用数学语言阐述 n 体问题，就是要寻找描述 n 体问题的微分方程初值问题的全局解。当 n 等于 2 时这被称为二体问题，或开普勒问题 (Kepler problem)，用以纪念德国天文学家开普勒，他发现的定律解释了第

谷·布拉赫(Tycho Brahe, 1546~1601)的天文观测结果,同时激发了牛顿创立万有引力模型。(参见图 1.5。)

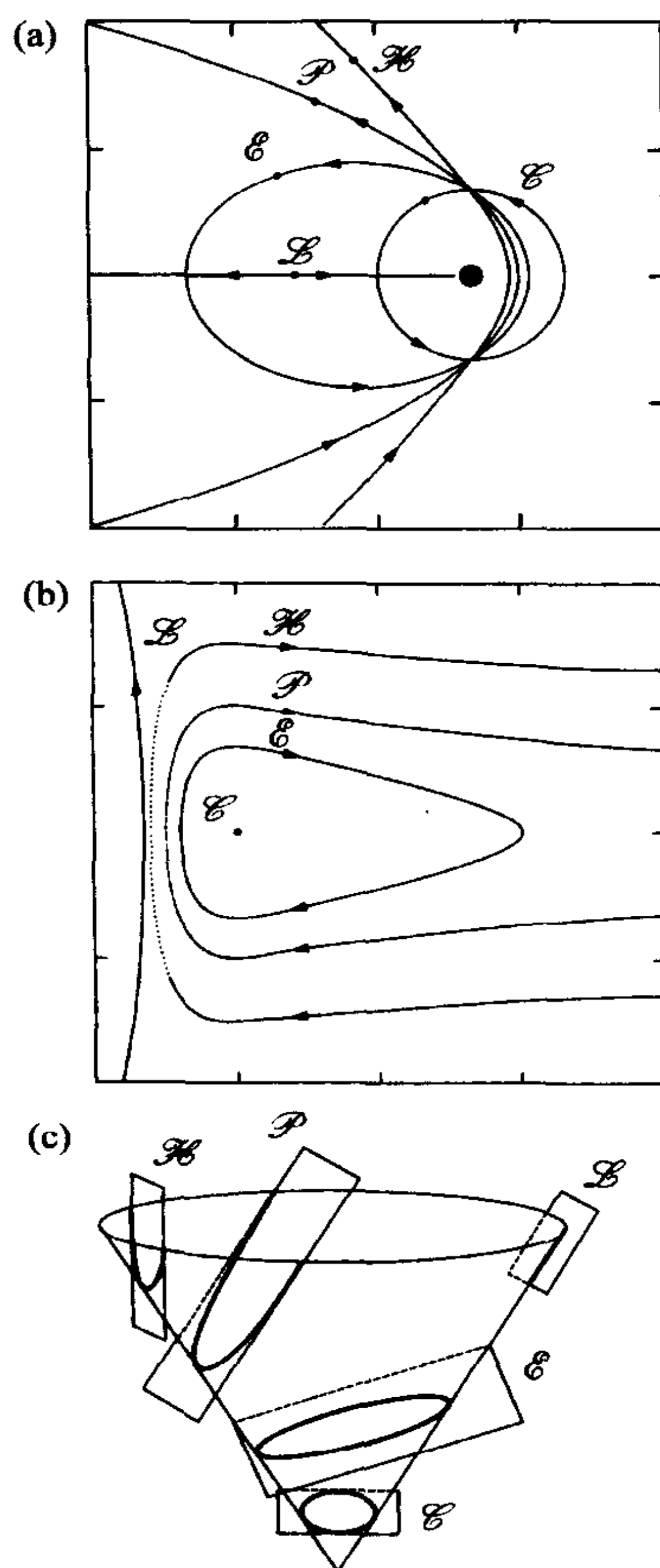


图 1.5 二体问题: (a)在引力作用下物理空间中一个质点围绕另一个质点运动的几种可能的运动轨迹, (b)同样运动在相空间中的表示, (c)通过从不同角度切割圆锥得到的圆锥曲线。这里 $\mathcal{C}$ 代表圆周, $\mathcal{E}$ 代表椭圆, $\mathcal{P}$ 代表抛物线, $\mathcal{H}$ 代表双曲线, $\mathcal{L}$ 代表线段。

二体问题的微分方程容易求解。可以证明其中一个质点围绕另一个质点运动的轨迹是圆锥曲线。(如图 1.5c 所示,圆锥曲线即是以不同的角度切割圆锥时得到的图形。)这说明质点在物理空间中运动

的轨迹只能是圆周、椭圆、抛物线、双曲线的一支或者直线。

粗看起来，二体问题导出的方程似乎是无法求解的：由于两个质点在三维物理空间中运动，所以完整地描述一个质点的运动需要 3 个位置变量和 3 个速度分量，于是相空间的维数为两个 6 维即 12 维。这时我们称系统具有 6 个自由度(degrees of freedom)，需要分别描述两个质点不同的位置变量。我们怎样才能能在 12 维空间中分析解的性态呢？

这需要应用牛顿力学中的各种守恒定律。首先，因为引力作用在连接两个质点的直线上，一旦它们的运动被设定在某个平面上，两个质点将永远在此平面内运动。因此对每个质点来讲，只需要两个位置变量和两个速度分量，共有 8 个变量。进一步，线性动量——质量与速度乘积的总和——是守恒的，因此质心不随质点发生改变（它位于质点的连线上，靠近较重的质点）。于是我们只需刻画质点间的相对位置，从而将系统简化为两个位置变量和两个速度分量，即两个自由度。最后，由于没有转矩的作用，系统的角动量也是守恒的。与芭蕾舞演员或者滑冰者收紧双臂快速地旋转一样：旋转运动与径向运动是相互关联的，其中一个可以决定另一个。此时，方程可以简化为仅有两个变量：描述两个质点间距离的变化率的量与它们在沿着中心连线上的相对速度的量。这样系统就只有一个自由度了。

瑞士数学家约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667 ~ 1748)于 1710 年最早给出开普勒问题完整的数学解答。伯努利家族来自安特卫普，其家族成员的名字频繁地出现在数学与物理学界。家族中的三代人，至少 8 名成员在科学上做出过重要贡献。约翰在 1667 年出生于巴塞尔，1705 年成为家乡一所大学的教授，接替了他哥哥雅各布(Jakob Bernoulli, 1654 ~ 1705)的职位。约翰的一个儿子丹尼尔(Daniel Bernoulli, 1700 ~ 1782)后来在流体力学和气体动理学理论

(kinetic theory of gases)领域做出了贡献。

令人遗憾的是，二体问题是 n 体问题中唯一容易求解的问题。当 n 大于 2 时，尽管许多数学家投入了大量的时间与精力，但至今还没有一种情形被完全解决。这个问题甚至成为巴黎时髦的沙龙中谈论的话题，曾引起伏尔泰 (Voltaire, 1694 ~ 1778) 和曼坦侬夫人 (Madame de Maintenon) 等人的兴趣。18、19 世纪大多数大数学家都研究过微分方程，虽然他们在数学与微分方程理论的许多领域做出突出的贡献，但关于 n 体问题 (n 大于 2) 的研究没有多大进展。后面我们将有机会考察他们所做的贡献。

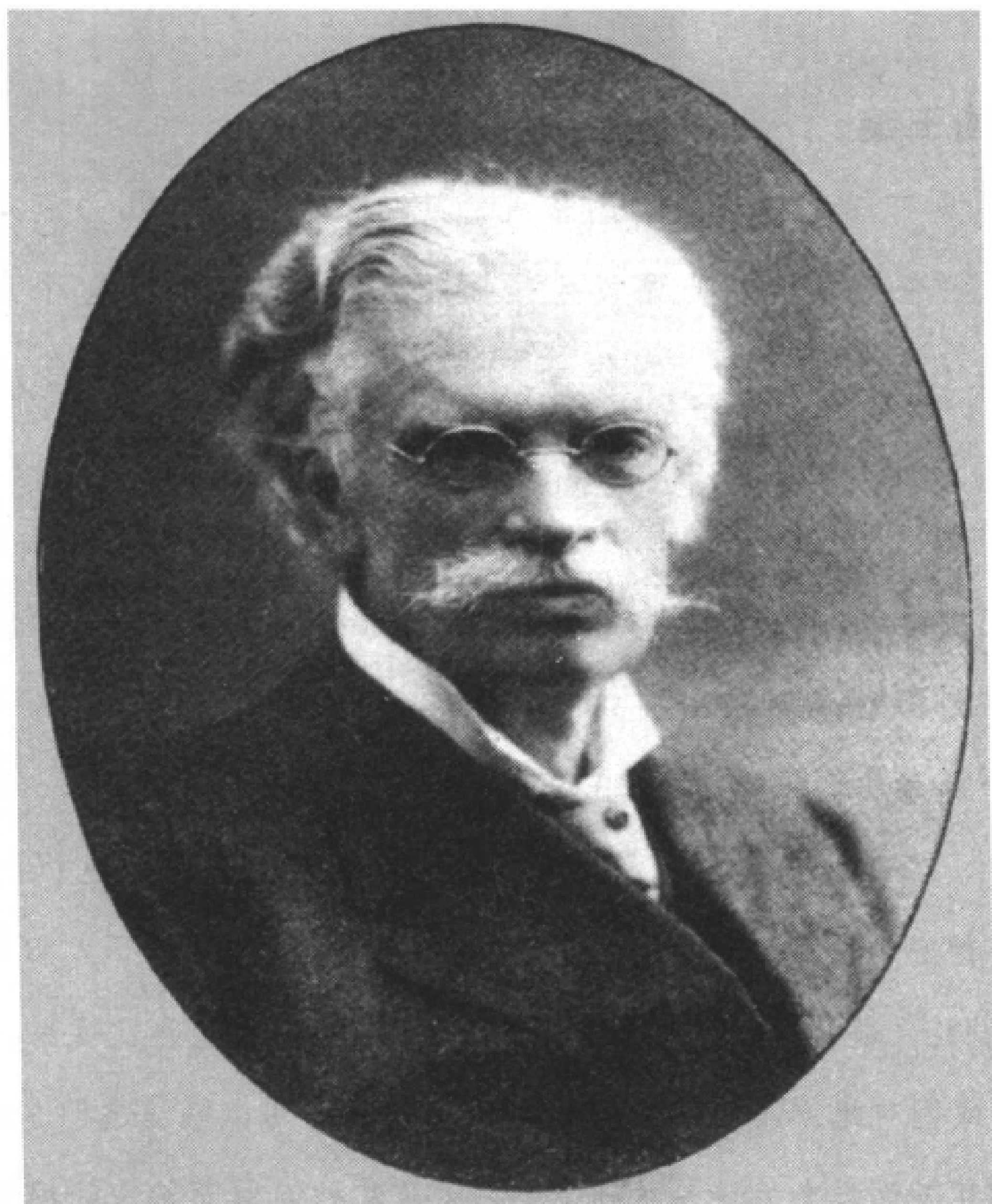
奥斯卡国王奖

具有任意多个质点的系统，其中两点间的作用力满足牛顿定律，在任意两个质点不发生碰撞的条件下，试给出每个点的坐标以时间的某个已知函数作为变量的级数表示，并且对于所有的取值，该级数是一致收敛的。

这一问题的解答无疑将扩充我们对太阳系的理解，它看起来可以利用目前由我们支配的解析方法来解决，至少可以这样假设，由于狄利克雷 (Lejeune Dirichlet, 1805 ~ 1859) 在去世前不久写给他的一个熟人几何学家 [克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823 ~ 1891)] 的信中，称自己发现了一种可以对力学中的微分方程进行积分的方法，他应用这种方法从绝对严格的意义上成功地给出了太阳系稳定性的证明。遗憾的是，除了小振动理论可能作为这项发现的出发点以外，我们对此方法一无所知。但是我们几乎可以确信这种方法不是建立在冗长而复杂的计算基础上，它是从某种简单而基本的思想发展而来的，通过持续不懈的深入研究人们有希望重新发现它。

即使在这次竞赛结束时这个问题还没有被解决，奖金仍然将颁发给完整地阐述和解决了力学中其他问题的研究者。

以上摘自《数学学报》1885~1886年第7卷的一个布告。米塔-列夫勒(Gösta Mittag-Leffler, 1846~1927)作为斯德哥尔摩杰出的数学家以及新近发行的这本杂志的主编向前迈出了大胆的一步。他说服瑞典与挪威国王奥斯卡二世设立一个重要的奖项用以奖励获得 n 体问题的全局通解的第一个人，同时该奖项也是为了庆祝1889年1月21日国王的六十寿辰。



照片 1.2 米塔-列夫勒。(米塔-列夫勒研究所提供)



照片 1.3 瑞典与挪威国王奥斯卡二世。(乌普萨拉大学图书馆提供)

在讨论了将众多世界上杰出的数学家号召起来参与这场竞赛的有关事项以后，一个国际性的评审委员会由柏林的魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass, 1815~1897)(米塔-列夫勒过去的导师)、法国数学家埃尔米特(Charles Hermite, 1822~1901)以及米塔-列夫勒本人组成。委员会提出四个问题，其中只有上面引述的第一个问题与我们有关，然而有趣的是庞加莱曾经研究过与第四个问题相关的“富克斯”函数。

我们必须花一点时间解释一些专业术语，它们将在本书中多次出现。人们寻找(微分方程)解的级数展开或逼近(approximation)，即

将解表示为无穷项(terms)的和,其中每一项都相当于求解一个简单的辅助方程。第一项给出粗略的逼近,第一项与第二项之和则给出较精确的逼近,以此类推。如果修正值减小到零,从而所有项的和是有限的,那么我们称这个级数收敛。本文中出现的级数的每一项都是时间的函数,如果对于所有过去或者未来的时间它都收敛,则称此级数一致收敛。小振动理论(theory of small oscillations)研究由一阶逼近产生的所谓线性化方程(linearized equations)。拉普拉斯(Laplace, 1749~1827)和拉格朗日(Lagrange, 1736~1813)最先在天体力学中应用级数方法,在第4章中我们会遇到他们并讨论线性化的问题。



照片 1.4 魏尔斯特拉斯。(米塔-列夫勒研究所提供)

提交论文的最后期限是 1888 年 6 月 1 日。奖金是并不丰厚的 2500 克朗(大约相当于米塔-列夫勒年薪的三分之一)，但是这一奖项在当时的名声却相当于今天的诺贝尔奖。在布告发出不久，数学界关注的中心就转向了 n 体问题。许多人都希望能够解决 n 体问题，但在最后参与竞争的 12 个人中只有 5 人试图解决它。

庞加莱的贡献

昂利·庞加莱听说奥斯卡国王奖时年仅 31 岁。尽管已经确立了自己的地位和国际声誉，他还是觉得如果能够赢得这一奖项，那么他的事业会有非常大的推进。毫无疑问，所提出的问题是非常困难的，但还是值得一试。这样的机会是相当罕有的，可能需要很长一段时间才会有另一次机会。

那是一个雨夜，庞加莱感觉有些疲倦。到了该去就寝的时间了，对于刚刚听到的消息他在心理上还没有准备，他无法确定是否尝试解决这个问题。5 年前，他在一个类似的竞赛中失败了，他向那次大奖赛(Grand Prix)提交的论文并不十分理想。这次事情却完全不同，他觉得自己更有能力而且准备充分；当然，还是有一些忧虑。

解决困难的问题总是要冒风险。一个人必须具备新的知识、技巧和思想，并且进行大量的准备工作。聪明并且能够产生新的思想、具有良好的直觉、具有良好的分析和综合问题的能力，仍然是不够的，还有一个重要的因素就是运气。除此之外还必须坚强而有毅力。在经历一个极度失望的夜晚之后，看起来仅仅由于最初忽视了一个简单的技术细节而使几个月的工作成为徒劳，但是他必须在第二天起床后仍然精力充沛并且以更大的热情重新开始。一个人在熟知的领域开展工作并取得成果比较容易，可是很少有人具有勇气和毅力

去探索未知的世界。

躺在床上却不能入睡，庞加莱想起他的经历、幸福以及成功。他相信自己的理解力，但对自己平素的乐观精神感到麻木。后来他写道：“生命只是两个永恒的死亡之间的一小段插曲，即使在这段插曲中，有意识的思维也只能持续很短一段时间。思想只是漫漫长夜中的一线曙光，但是这线曙光就是一切。”在入睡的时候他还是不能决定是否迎接这个挑战。

第二天早上一醒来，庞加莱就做出了决定，他将开始工作。这是他唯一的选择，他清楚自己必须这样做。

天体力学一直是庞加莱感兴趣的一个主题。孩提时代的庞加莱喜欢在自家的后院观赏夜晚的星空。他了解许多星座的名字并且在看到行星运动时兴奋不已。大自然是如此的宁静，夏天花草清爽的香气是那样的宜人。他觉得自己是整个世界的一部分，自己是如此的渺小而又无忧无虑。日常问题看起来无足轻重：在他出生以前很久星星就存在了，不管他做什么，星星还会永久地存在下去。

庞加莱于1883年在天体力学领域发表了他的第一篇数学论文，他研究的是三体问题的某些特殊解。1年后他发表了第二篇论文。尽管它们都很重要并且有深度，但是这些贡献并不能被认为是突破。奥斯卡国王奖所悬赏的问题需要更深入的工作才能解决，但是庞加莱过去的工作使他对这一领域已有了一定的洞察力。他过去经常想进一步做研究，但是总有其他的课题占据他的研究日程，因此从未找到充足的时间研究天体力学。此时庞加莱已经在微分方程中发展了新的思想，它们或许对解决这个问题有所帮助。庞加莱觉得自己对正确的进攻路线有着良好的直觉。

然而，万事开头难。庞加莱很快就到达了我们所知的问题的边缘。他还想到一些继续研究的思路，但是最初的计算显示沿着这条路将一无所获。几个星期过去了却没有任何新的进展。处理这一问题的数学工具还没有被发现，为了继续下去，庞加莱必须自己去创造。他认识到这会花费大量的时间，他能否在提交论文的最后期限之前完成呢？很难估计，但是看起来这是唯一的途径——至少是他所能想像到的唯一途径。

经过月复一月的辛勤工作，庞加莱多次放弃自己的努力，但又总是捡起它们。2年后他不再将这个问题放手了：他持续不断地工作着。这是一个优美的问题，庞加莱计划为此建造一座科学的大厦。他独立地发展了许多新的数学工具并将它们应用到三体 and n 体问题中。他还发明积分不变量的概念并应用它证明回复定理(recurrence theorem)，后面我们会再次谈及它。庞加莱发展了一些新方法处理周期解和稳定性，包括特征指数的想法，它现在已成为动力学中的标准工具。他得到的一些结果是出人意料的，与他的直觉背道而驰。他不能证明所有的结论，但是他确信它们的正确性。庞加莱获得了大量有建设性的部分结果，遗憾的是，它们与最初问题的解答还相差甚远。每前进一步，他就更清晰地认识到距最终目标有多远。

后来发表在《数学学报》上的通信表明，在此期间米塔-列夫勒曾多次鼓励他的朋友昂利·庞加莱，甚至建议他向评审委员会提交其他问题的解答。但是庞加莱把他的一切才智都用于第一个问题。

第三年事情变得更加明朗化。三体问题的一块神秘的面纱终于被揭开了。庞加莱证明了除已知的那些以外，一致首次积分的不存在性，这意味着三体问题不能通过某种定量方法去解决。按照我们过去的讨论，它不能约化为低维的问题：甚至将要讨论的限制性三体问

题，也需要两个自由度才能完全描述它。庞加莱定理改进了 1887 年德国数学家布伦斯(Ernst Heinrich Bruns, 1848 ~ 1919)发表的类似结果。庞加莱发现并解释了其他许多性质，他认为自己已经找到了限制性三体问题某种稳定性结果的证明。直到后来他才发现这一证明是错误的，他为改正错误所作的努力将他引向了一个更加惊人的发现。

庞加莱觉得这些结果是充分的，因为现在他明白这个问题比任何人所想像的都更加困难。数学家必须改变他们的思考方式来处理这种类型的动力学问题，试图写出显式表达式和积分的定量方法太不中用了。他已经站在了一个大门口，这扇门将把他引入一个神秘的世界。他打开门站在入口处，向里面张望着。几个月中他第一次这样放松。“这一问题将为未来几代的数学家提供取之不竭的成果来源，”他想，“如此多的工作需要去完成，即使是向前迈几步，也会占用我的余生。现在至少我懂得没有人能够独立地解决这个问题。我们这代人不可能完全理解它。”

庞加莱决定将他的研究工作写下来。他不再考虑奥斯卡国王奖了，他要将自己的成果公之于众。不管是否研究 n 体问题，每个人都应该了解他提出的新观点。定量的分析方法只能解决某些问题，人们还应当定性地和几何地思考！传播这些思想的最快的途径就是将他的工作提交竞赛，尽管这些工作尚未完成、还不完善。那天晚上庞加莱确定了论文的纲要，手稿最终于 1888 年 5 月 17 日提交给竞赛委员会。

根据竞赛规程，参选者必须是匿名的，只能通过一段题记来确认身份。回想起孩提时代凝望夜空的情景，庞加莱选择了 *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*——繁星是无法逾越的。

1889 年 1 月 21 日，朱尔·昂利·庞加莱由于在理解 n 体问题以及相关动力学的基本问题中的突出贡献获得奥斯卡国王奖。

《……新方法》

仅仅一年多的时间，庞加莱的突破就闻名于世。论文的一些细节部分不得不作细致的雕琢，但是论文终于有望发表了。文章的篇幅很长，在1890年《数学学报》第13卷上占据了270页，相当于一本中篇教科书的篇幅。这篇论文实质上是后来的三卷本巨著的初稿。在本章结尾我们将细致地讲述庞加莱的论文写作以及发表的经过，值得注意的是，在文章发表后庞加莱的名字由此成为数学史上的里程碑。

在“三体问题与动力学方程”的研究中敞开的这扇数学大门的价值与重要性是无法估量的。庞加莱的成功给他自己注入了新的热情和力量。于是他决定就这个主题写一本书并马上付诸于行动，他的目标是拓展和推广他的获奖论文的思想。1892年《天体力学新方法》(*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*)第一卷出版，1年后第二卷也相继出版了。第一卷主要讨论三体问题的周期解和渐近解以及一致积分的不存在性。书中还包含解对于参量的连续依赖性的首批定理。第二卷重点讨论由纽科姆(Newcomb, 1835~1909)、吉尔当(Gylden, 1841~1896)、林德斯台特(Lindstedt)和布林(Bohlin)等人提出的扰动级数法及其在三体问题研究中的应用。

《天体力学新方法》一书第三卷并且是最后一卷的成就不如前两卷那样直接。庞加莱在定性方法方面的研究工作被他在其他课题的工作耽搁了。而且在对所获得的许多新发现有所保留的情况下，他变得格外谨慎小心。《新方法》最后一卷的主题是积分不变量、泊松意义下的稳定性、第二类周期轨道以及庞加莱在获奖文章引进的双向渐近解。

后面将陆续谈及这些主题，现在我们关心的只有双向渐近解。它们出现在《新方法》的最后一章，也正是它的动力行为在本书开始的故事中困扰着庞加莱，他用了将近十年的时间去理解双向渐近解。

为了表述庞加莱遇到的困难及其最终的解决，我们必须回到微分方程理论中。以下三节是相当枯燥和专业性的，但为了给出数学家所理解的“混沌”一个清晰的描述，它们却是必要的。读者如果愿意，可以跳过下面几节，直读“潘多拉盒子”一节中的故事，以后有空可以返回来补上细节。

不动点*

回顾上面的内容我们知道微分方程的解能够表示为平面、高维空间或流形上的曲线。在某些特殊情况，这条曲线可以只是一个点。回忆有关河流表面的类比，漩涡的中心就是方程的这种点。如果水流模式不发生改变，顺水漂流的木片一旦进入漩涡，它会永远被限制在漩涡的中心。这并不是唯一可能的表现形式：不动点附近可以发生不同的动力行为，图 1.6 描绘了不动点附近系统的几种不同形态。此种轨道还被称为流的静止点，或微分方程的平衡解。在不动点处微分方程中的变量始终是常数，变化率为零。

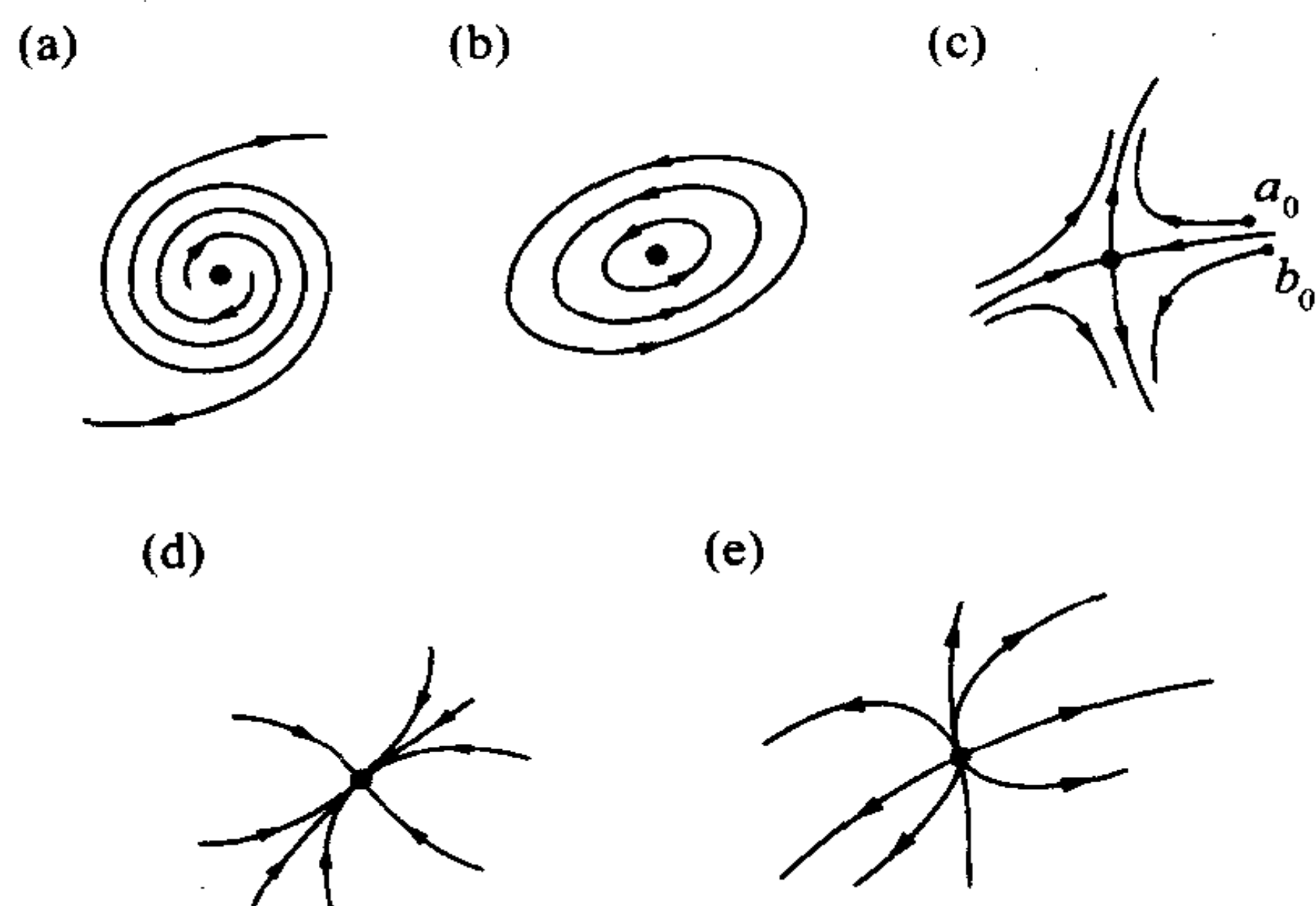


图 1.6 流在静止点附近可能的动力行为：(a)螺旋状的源，(b)稳定点，(c)鞍点，(d)汇，(e)源。

如图 1.6b 所示，在不动点周围可以存在闭轨道或周期轨道。而在有些不动点附近的解可以螺旋状地趋近或远离不动点，图 1.6a 表示附近的解螺旋状地远离不动点，而图 1.6c 则表示解直接沿某一方向远离不动点。同样地，不动点邻域的所有轨道可以趋于平衡点（如图 1.6d，此时称不动点为汇），也可以远离平衡点（如图 1.6e，称不动点为源）。在图 1.6c 中，两条轨道趋于不动点，另两条远离不动点，其余轨道沿着不动点的边缘接近然后离开，这种不动点被称作鞍点。

平衡解周围的解只能经过无限长的时间才能到达平衡解。或者平衡解本身永远保持不动，或者其余的解渐近地趋于平衡解。并且，由于在平衡解处速度减慢至零，轨道在接近鞍点的邻域时需要花费相当长的时间，同样，离开鞍点也需要很长时间：想像图 1.6c 中的点 a_0 和 b_0 的归宿，它们在图中所示趋近于鞍点的曲线的两侧，起初距离很近，最终却分开了。由于上述曲线将具有不同归宿的轨道分离开来，因此称它们为分界线 (separatrix)。（在谈到微分方程的解需要经过无限长的时间才能到达平衡解时，我们再次强调正在描述的数学模型是物理实在的简化和理想化。在现实世界中，通常摩擦力只需有限的时间就会使运动中止。）

平衡解具有什么物理含义呢？正如我们曾指出的，这种状态对应于其性质不随时间发生变化的某些运动过程。例如，静止的质点（图 1.1 中落地后的球体）或者以恒定速度沿着直线运动的质点，都可以用平衡解来表示。一个处在最低或最高位置静止的摆，则是具有两个平衡解的进一步的例子（见图 1.7）。很明显，摆是由固定在刚性杆上的重锤构成的，就像在祖父的座钟里所见到的一样，只要它最初处于最低位置并且没有外力作用，它就会永远保持在最低位置上。

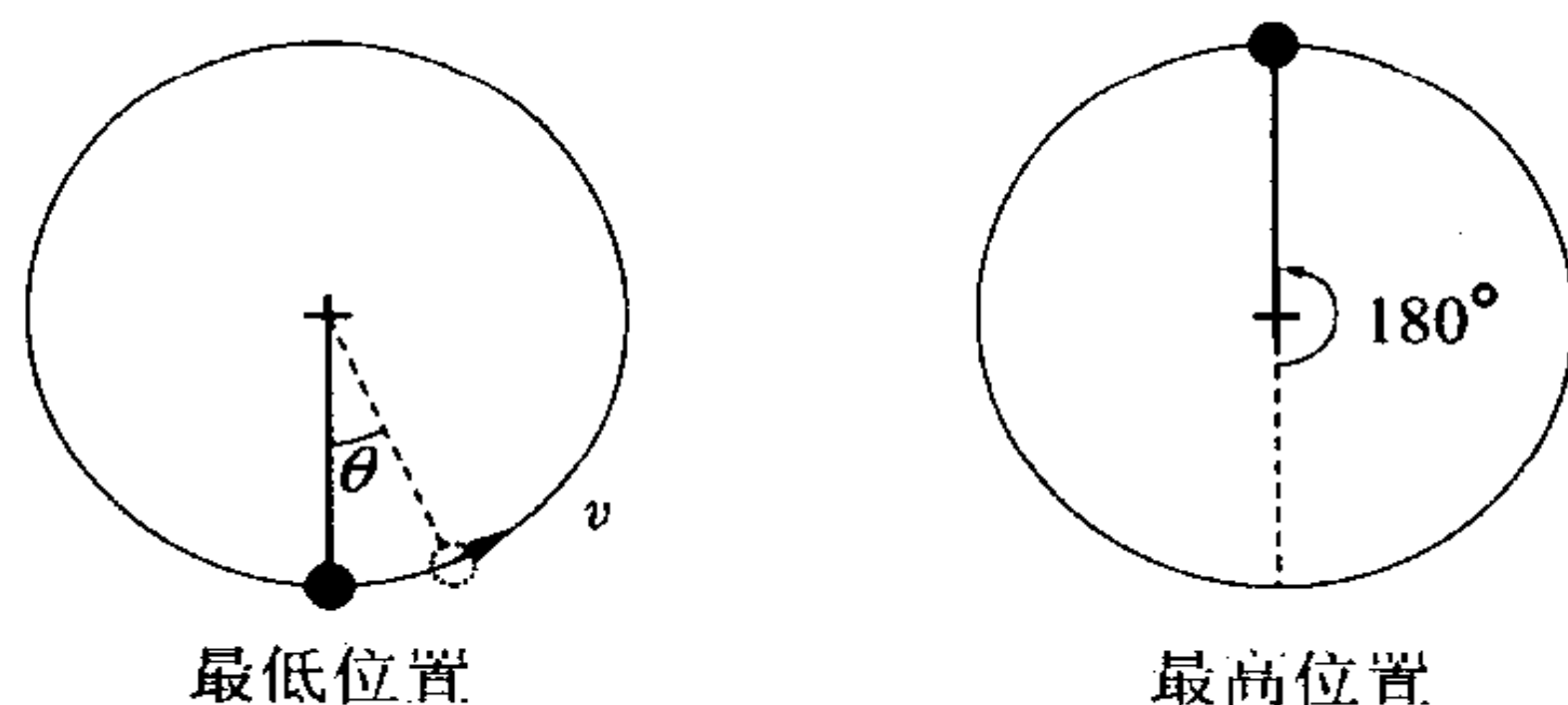


图 1.7 摆的两个平衡位置。

事实上，摆在最高位置时也有同样的机制，尽管很难想像人们如何才能将摆放在这样一个倒置的位置，并且在不扶持的情况下使它保持不动。任何小的偏移都会使摆向一侧或另一侧落下。微分方程理论中的稳定性概念就是探讨这一主题的。在第一种情形中我们称平衡解是稳定的(stable)，而在第二种情形中称它是不稳定的(unstable)。如图 1.6b 和图 1.6d，当平衡解邻域中的所有解都不离开这个邻域时，我们就得到了稳定性(stability)。稳定性，像钻石一样具有永恒的性质：它指的是解的长期行为。如果一个解是稳定的，那么它附近的所有解在任何时刻都会与它接近。不稳定性(instability)，则意味着至少存在一条轨道远离平衡解，即使它最终会返回到平衡解同样的邻域；见图 1.6a 和图 1.6c。在第 4 章中我们将用较大篇幅讨论稳定性。

庞加莱研究的问题是关于趋近或远离平衡解以及周期轨道的轨道。一颗运转的卫星停留在地球与月球的引力相互抵消的位置上，就会产生这样的渐近轨道。庞加莱研究经典三体问题中的一种特殊情形：平面限制性三体问题，即所有三个物体在同一平面上运动，并且其中之一的质量相对于另外两个物体的质量是非常小的。由于较小质量的物体可以忽略不计，两个较大质量的物体会沿着它们作为可解二体问题时的椭圆轨道运行。实际上，庞加莱将注意力集中

在圆形轨道特殊情形上，此时可以通过旋转坐标系使两个大质量物体保持不动。第三个物体的位置与速度仅由两个坐标来刻画：一个具有两个自由度的系统。图 1.8 表示两个大质量物体 m_1 和 m_2 连同坐标系围绕着它们的公共质心旋转。小质量物体 m_3 的位置由它到 m_1 和 m_2 的距离 q_1 和 q_2 来确定。

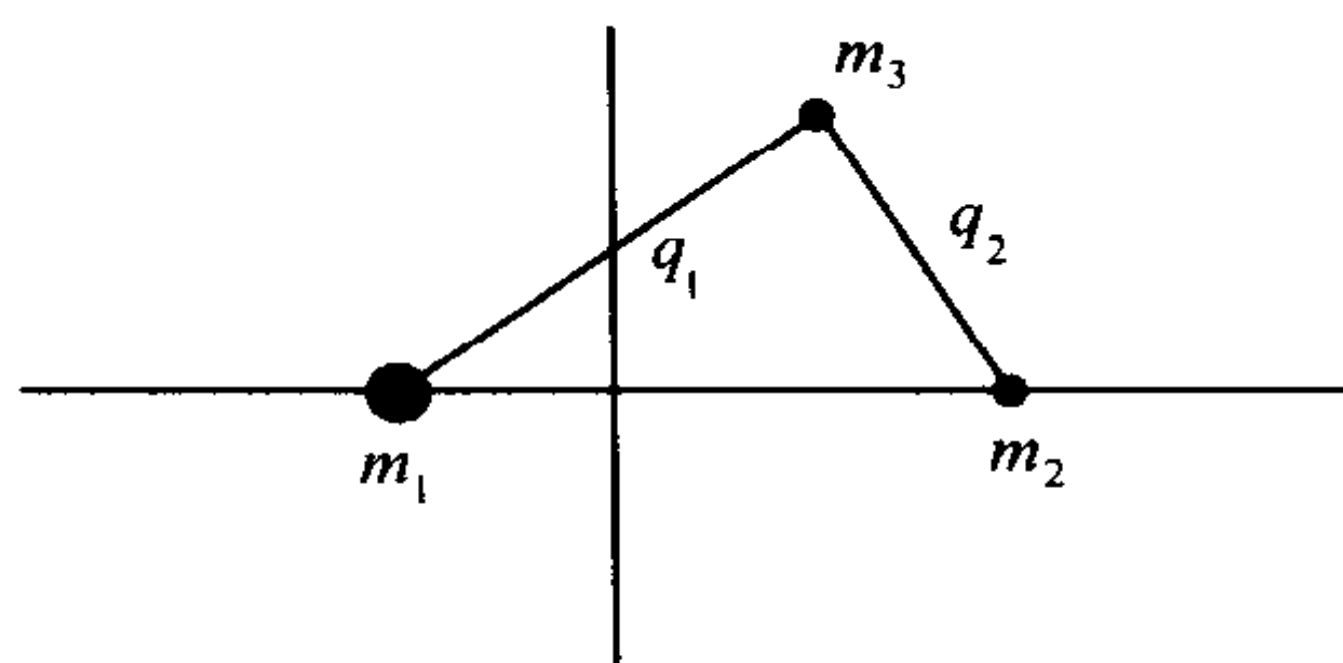


图 1.8 平面限制性三体问题。

庞加莱的计算表明上述系统在相应的平衡解附近可能存在双向渐近的轨道。如图 1.9a 所示，这些轨道指的是离开平衡解的轨线，它们随着时间的增加，又渐近地返回到平衡解。在《新方法》的最后一卷中，庞加莱称之为同宿(homoclinic)轨道，因为它们归宿于并且起源于同一极限。如果一条轨线连接着两个不同的平衡解，则他称之为异宿(heteroclinic)轨道(见图 1.9b)。在后一幅图中，实际上我们所描绘的就是图1.7中摆的相图，其中描述状态的变量是 θ ，即摆与竖直方向的夹角，以及描述杆与锤的角速度的变量 v 。图中两个平衡解指的是由对应于摆小振幅摆动的周期轨道包围的稳定不动点 $(\theta, v) = (0, 0)$ ，和对应于摆的最高或“上方”的静止位置的不稳定不动点 $(\theta, v) = (180^\circ, 0)$ 。[在图中后者出现两次， $(180^\circ, 0)$ 和 $(-180^\circ, 0)$ ，下面我们会发现它们表示物理空间中的同一个点。]

通过数学上的理想化，我们假定“理想”的摆不存在由支点的摩擦和空气阻力导致的能量损失，此时由摆导出的微分方程产生的流如

图 1.9b 所示。一旦将摆摆到一定的角度，那么它就会永远以同样的角度摆动下去。仅有重力作为它的回复力：在两个平衡解之间的任何位置释放摆，它都会落下，获得一定的速度，然后在另一侧摆动到同样的高度，在一瞬间它保持静止然后向相反的方向重复以上过程。因此所有这样的轨道都是封闭的。异宿轨道相应于如下运动：摆锤在上方不稳定平衡位置处作无穷小的扰动，它落下获得动能，然后释放动能，恰好又回到了起始点附近，但是这个过程需要无限长的时间。

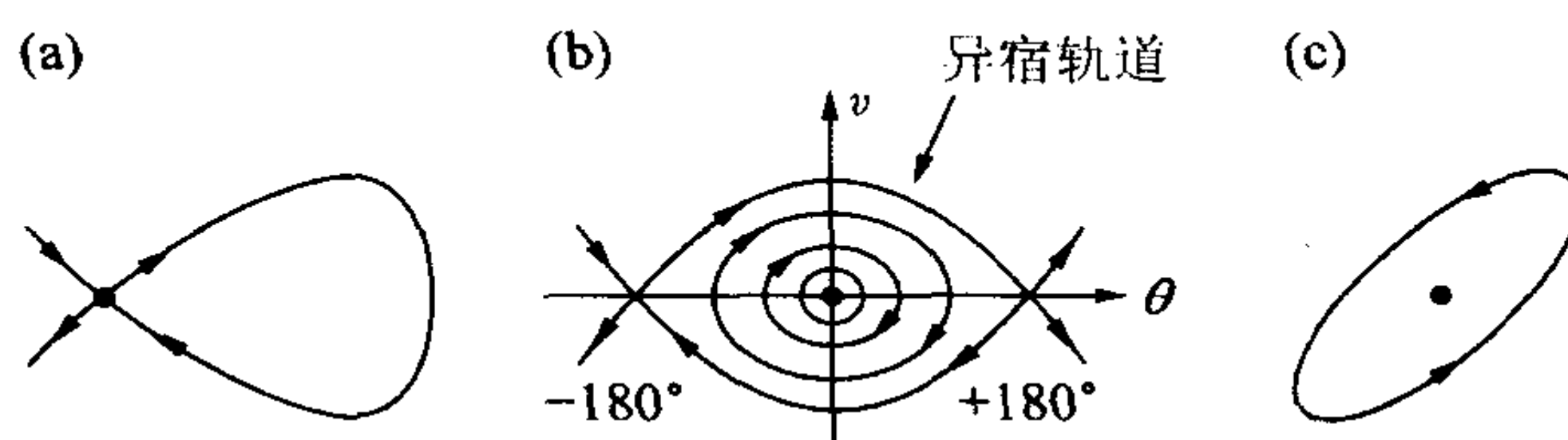


图 1.9 (a)同宿轨道, (b)异宿轨道, (c)周期轨道。

首次返回*

回顾图 1.9c 中所示的周期轨道，尽管它与同宿轨道的相图很相似，它们却有着不同的含义。首先，周期轨道上没有平衡点；其次，系统沿着周期轨道绕行一周只需要有限的时间，然后重复这一过程直到永远。在一条同宿曲线上，系统始于遥远的过去的一个静止点，而直到遥远的将来才返回到静止点，轨道只经过曲线一次。

庞加莱首先分析周期轨道附近的情况。由于解对初值条件的连续依赖性，从周期轨道附近的点出发的曲线会在一段时间内与周期轨道靠近。首先选取一点 p ，它不在周期轨道上，但与周期轨道充分靠近，因此通过 p 点的解曲线在绕周期轨道运行一周后并不远离周期轨道(见图 1.10)。这样的轨道具有什么样的动力行为呢？共有三种可能：(1)通过 p 点的轨线是一条封闭曲线，如图 1.10a，因此

这条轨线与周期轨道永远保持一定的距离；(2)这条轨线可能螺旋形地盘绕趋近于周期轨道；(3)远离给定的周期轨道，参见图 1.10b 和 1.10c。在接近周期轨道的情形中，过 p 点的轨线需要盘绕无数圈才能实际到达周期轨道，类似地，远离周期轨道的轨线“在过去”也要无数次盘绕周期轨道。

以上三种可能是仅有的可能性。如果通过 p 点的轨线与自身或与其他解曲线相交，或者过 p 点的轨线离开闭曲线的邻域太快，都可能产生其他不同的情况。但是第一种情况违反解的唯一性，而第二种情况与解关于初值条件的连续依赖性矛盾。如果一条解曲线始于充分靠近闭轨道的一点，那么它至少要在闭轨道的同一邻域内环绕几周才能离开。

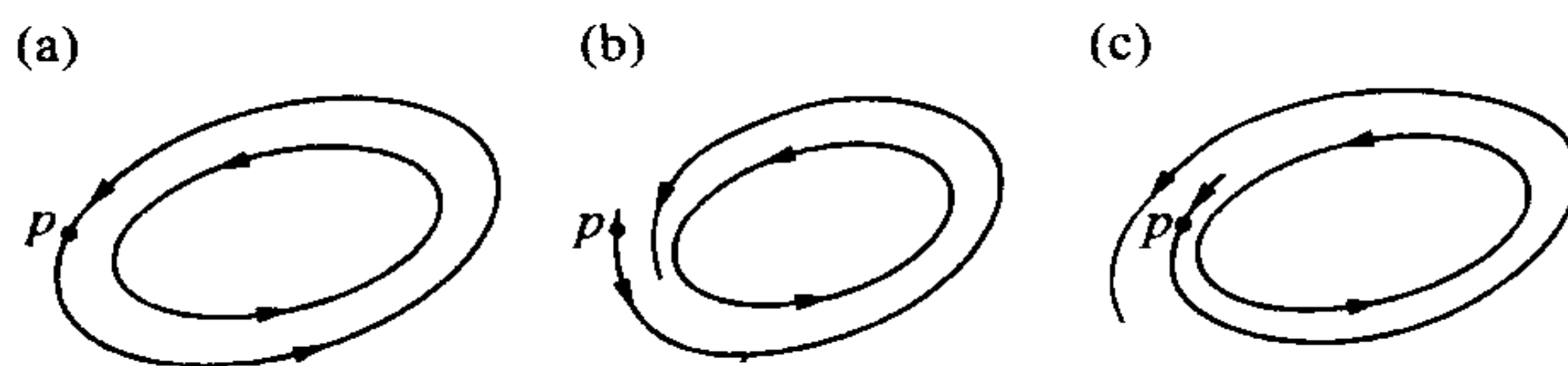


图 1.10 周期轨道外的解曲线的三种可能的行为。

庞加莱设想了一种简单的方法来观察这些轨道。他通过周期轨道上的任一点画一个截面 D ，这样的 D 不包含平衡点，如图 1.11。其中 D 是与周期轨道及其附近的轨线横截的线段。横截性意味着它恰好切断解曲线而不是与它们相切。选取截面与闭轨道相交的点记为 q ，按照时间增加的方向沿着轨线前进。自然地，我们下一次会碰到截面 D 上的同一点 q 。沿着周期轨道继续我们的旅程，就会再次碰到截面 D ，交点仍旧是 q 。重复上述过程，我们会不断地碰到截面 D 上的同一点 q 。

如果从闭轨外面的一点 o 出发结果会怎样呢？首先会碰到截面

上的 o_1 点，第二次碰到 o_2 ，第三次碰到 o_3 ，以此类推，每次接近（或远离）闭轨运行一周都会与截面相交一次。庞加莱认识到利用上述点列代替整条解曲线在研究中会相对地容易。两者的逻辑推导关系是明显的。如果截面 D 上的有序点列 $o_1, o_2, \dots, o_n, \dots$ （见图 1.11）趋近于周期轨道，那么围绕周期轨道运行的盘绕轨线的动力行为一定是图 1.10b 所示的情形，反之亦然。

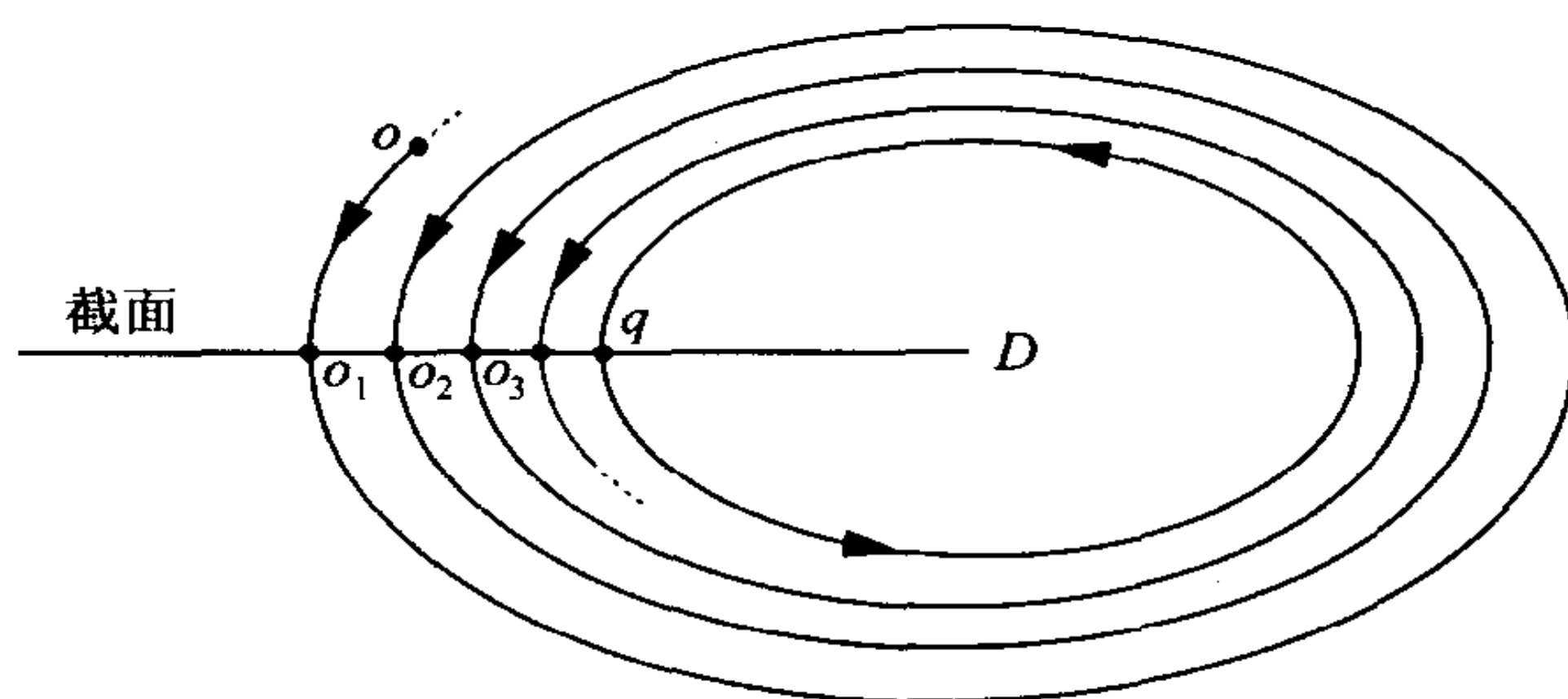


图 1.11 首回映射。

上面用来描述轨线返回到截面的行为的数学工具今天被称为庞加莱映射 (Poincaré map) 或首回映射 (first return map)。该映射给出截面 D 上每个点唯一的象或迭代：即解曲线下次返回与截面的交点。如果我们记这个映射为 F ，那么 F 在 o_1 点的第一次迭代是 $F(o_1) = o_2$ ，第二次迭代是 $F(F(o_1)) = F(o_2) = o_3$ ，以此类推。可以将映射看作是一个输入—输出关系：给定当前的位置 o_n ，它可以预测与截面下次相交的位置 $F(o_n) = o_{n+1}$ 。映射的每次迭代都蕴含了轨线环绕周期轨道一周的运动。我们称 F 在 o_1 点的所有迭代的无限集合 $(o_1, o_2, o_3, \dots)$ 为庞加莱映射在 o_1 点的轨道。

让我们深入观察一下这个重要的映射。首先应当注意的是它将描述平面上曲线结构的二维问题简化为一维问题，即研究线段上点的映射。周期轨道上的 q 点成为首回映射的不动点。事实上，表面看

来我们仅用到离散化的方法(即用一串点列代替连续曲线)。选取 o 附近的点 r , 我们得到另一串象点 $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, 它们趋向于 q 。那么连结 r 与 o 的弧段上所有点的轨线与截面 D 的交点以及这些交点在 F 的迭代作用下得到的点集, 就形成了截面 D 上一些连续的线段。因此, 关于首回映射的几何研究十分类似于微分方程解曲线的研究。任何一条在 F 的作用下映到自身的光滑曲线都被称为不变曲线。本章早些时候谈到的某些解曲线就是不变曲线的例子。如果我们在不变曲线上选取初值条件, 那么沿着解曲线在映射 F 的迭代作用下所到达的象仍然保留在不变曲线上。

然而, 微分方程定义的解曲线与首回映射的不变曲线有很大的差别。我们曾指出, 由于唯一性的缘故, 微分方程的解曲线不能相交(如果解曲线相交, 那么交点就会有两种不同的过去与未来, 见图1.2中的曲线 $r_{-1} r_0 r_1$ 和 $s_{-1} s_0 s_1$)。而首回映射的轨道是一组点列, 如图1.11中截面上的一组点列, 于是上述观察不适用于首回映射的不变曲线, 它们确实可以互相横截相交。

在高维相空间中也可以定义庞加莱映射。对于三维空间中微分方程定义的解曲线来讲, 截面是二维的并且相应的首回映射也是二维的。庞加莱映射总是将相空间的维数减少1维。

瞥见混沌*

下面几段将展开更深入的讨论, 以使我们了解庞加莱的思想以及前面介绍的流形是如何被用于相空间的结构分析的。(这样做能够更好地领会庞加莱在拓扑学与应用动力学领域贡献的重要思想对他有多么自然。)然而, 考虑到第一次接触这些观念的读者可能喜欢略过细节部分, 毕竟庞加莱本人曾经花费许多年的时间才发现它们! 对于

这些读者来讲，需要提醒的是，在庞加莱的想像中，混沌(chaos)图形类似于下文的图 1.14。图中交织在一起的曲线代表相应的微分方程从将来($\mathcal{F}$)和过去($\mathcal{U}$)趋近于特定周期解(p)的解曲线。它们之间的交点对应于在遥远的过去与未来都趋于周期解的点，这些点在双向趋近于周期解的过程中却跳起了“混沌的”(chaotic)舞蹈。

为了深入理解庞加莱领悟到的现象，我们先回到图 1.7 描述摆运动的方程中，但是附加一个新的作用：假设摆的支点是周期振动的，传导出一系列脉冲，就像小孩子摇动的双腿可以间断地影响秋千的振荡。现在支配运动的规则随着时间发生了变化了。虽然仍旧应用牛顿第二定律，但是从摆的角度来看，使它摆动的力是依赖于时间的。于是需要三个量才能完全描述系统的状态：摆的角位移 θ ，速度 v 以及时间 t 本身。上述三个坐标构成了扩充相空间。当支点的周期振动很小时，“上方”与“下方”的平衡解将作为小的周期运动保留下来，因此在三维相空间中，它们看起来很像图 1.12b 所示的情形。这张图与图 1.9b 一样，不稳定运动出现两次：在 $\theta = 180^\circ$ 和 $\theta = -180^\circ$ 附近。由于 -180° 和 180° 代表同样的角度，因此两条曲线在物理空间中表示相同的运动：无论向左转半圈或向右转半圈，最终你都会面向后方。

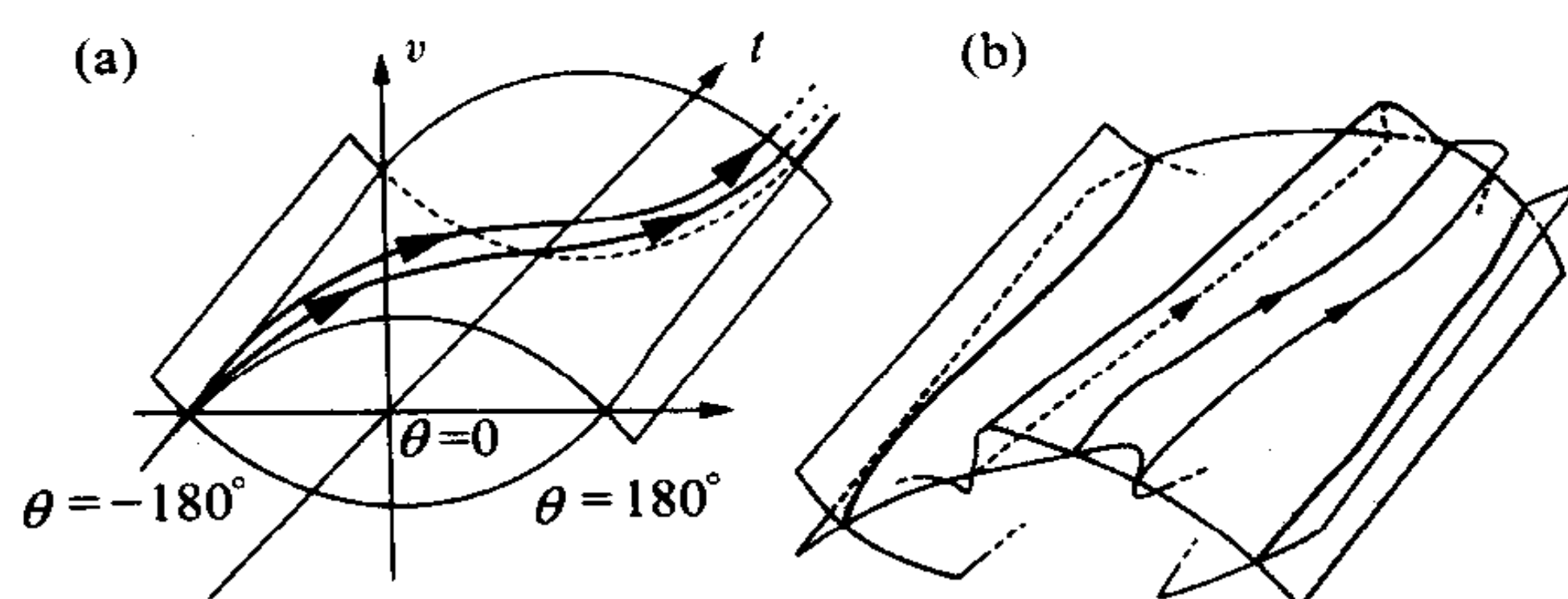


图 1.12 摆的三维相空间，(a)不具有周期外力的情形，(b)具有周期外力的情形。

实际上，现在庞加莱研究的是图 1.8 所示的限制性三体问题，它是具有一个守恒量的两个自由度的系统。如上所述，它的解都限制在一个三维流形上。这些解在流形上看起来很像简单的摆方程中的解。其实，在庞加莱最后赢得奥斯卡国王奖的论文中，他就用摆作为一个例证。

回到摆问题，首先集中考虑上方(不稳定的)运动，假设在某一时刻取消周期外力，因此它又会成为一个平衡位置。这在扩充相空间中用一条直线来表示(图 1.12a)。如果将摆锤重新放置，比如放在左侧，并给它适当的向右初始速度，摆就会摆动一次并且接近不稳定平衡点，但这需要经过无限长时间。所有上述这些运动组成的集合形成了二维稳定流形，类似地，二维不稳定流形是由无限长时间以前从不稳定平衡点出发的轨道组成的(对于数学家来讲，时间的正向与负向是一样的，因此也可以说“在时间趋于负无穷大时趋于平衡点的轨道”)。

对于未经扰动的摆，能量是守恒的。因此系统具有对称性：过去与未来的动力行为是完全相同的。这意味着稳定流形和不稳定流形可以光滑地连接起来，形成从不稳定平衡点出发又回到它本身的许多环，如图 1.12a 所示。事实上，存在两类环：一类是对应于摆做顺时针转动的轨道，另一类是对应于做逆时针转动的轨道。

当重新加上周期外力的时候，这些稳定流形和不稳定流形虽然会发生形变，但还会保留下来。在图 1.12b 中我们试着探讨这是如何发生的。由于在摆上施加的外力，能量不再是常数，因此一条轨道的未来命运与过去历史都严格地依赖于它趋近于不稳定运动时速度的控制(timing)。任意小的变化都可能引起摆锤通过摆上方或者摆动回来，这些都由稳定流形、不稳定流形缠绕在一起并且分开的事实反

映出来。这些流形只能在特定的点相交，即速度的控制恰好使平均的能量输入与能量输出相互平衡，因此解在它的出发点终止。（为了证明任何这样“平衡”的轨道都存在，就必须对沿着轨道的能量方程进行平均。）图形经过迭代很快变得复杂起来，此时截面与首回映射的想法才会真正起作用。

但是在选取截面以前，我们必须先将相空间表示成与图 1.12 不同的形式，在图 1.12 中，时间可以想像为一条直线，一直延续至永远，这对于人类的思维来讲是自然的。然而在摆限定的框架里，时间只在支点的运动中明显出现，因此可以将时间看作是周期的。如果摆重复运动的周期为 T 秒，那么由 θ , v 和 t 刻画的量与由 θ , v , $t + T$ 以及 θ , v , $t - T$ 刻画的量是不可区分的。这意味着图 1.12b 中出现的轨道、流形等都是周期为 T 的周期的(periodic)，从而只需考虑在时间的方向上用时刻 T 将相空间框住的部分，如图 1.13a 所示。在这一周期的相空间中，我们在时刻 $t = 0$ 时从初始值 (θ_0, v_0) 出发，沿着轨道运行一个循环，在 $t = T$ 时到达 (θ_1, v_1) ，于是在下一个循环期间的运动可以通过在 (θ_1, v_1) 处重新设置时刻为 $t = 0$ ，沿着轨道在另一个循环到达 (θ_2, v_2) 来完成。上述过程可以无限次地重复下去。

从拓扑学观点来看，可以将 $t = 0$ 和 $t = T$ 处的截面视为等同的，认为它们是同一个平面，于是微分方程的轨道或流就诱导了该平面上的庞加莱返回映射 P ，就像图 1.11 中在截线段 D 上诱导的返回映射一样。与那个例子一样，微分方程的轨道(曲线)变成映射的不同的点列，见图 1.13b。 P 将 (θ_0, v_0) 映为 (θ_1, v_1) ， (θ_1, v_1) 映为 (θ_2, v_2) ，...。现在图 1.12 中的稳定流形和不稳定流形成为庞加莱映射的不变曲线。（可以想像利用图 1.13 中的平面切割图 1.12。）我们将这两

类曲线分别记为 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{U}$ 。不变性意味着 $\mathcal{S}$ 或 $\mathcal{U}$ 中的任何子集 $\mathcal{C}$ 在庞加莱映射作用下的象 $P(\mathcal{C})$ 仍然分别保留在 $\mathcal{S}$ 或 $\mathcal{U}$ 中。

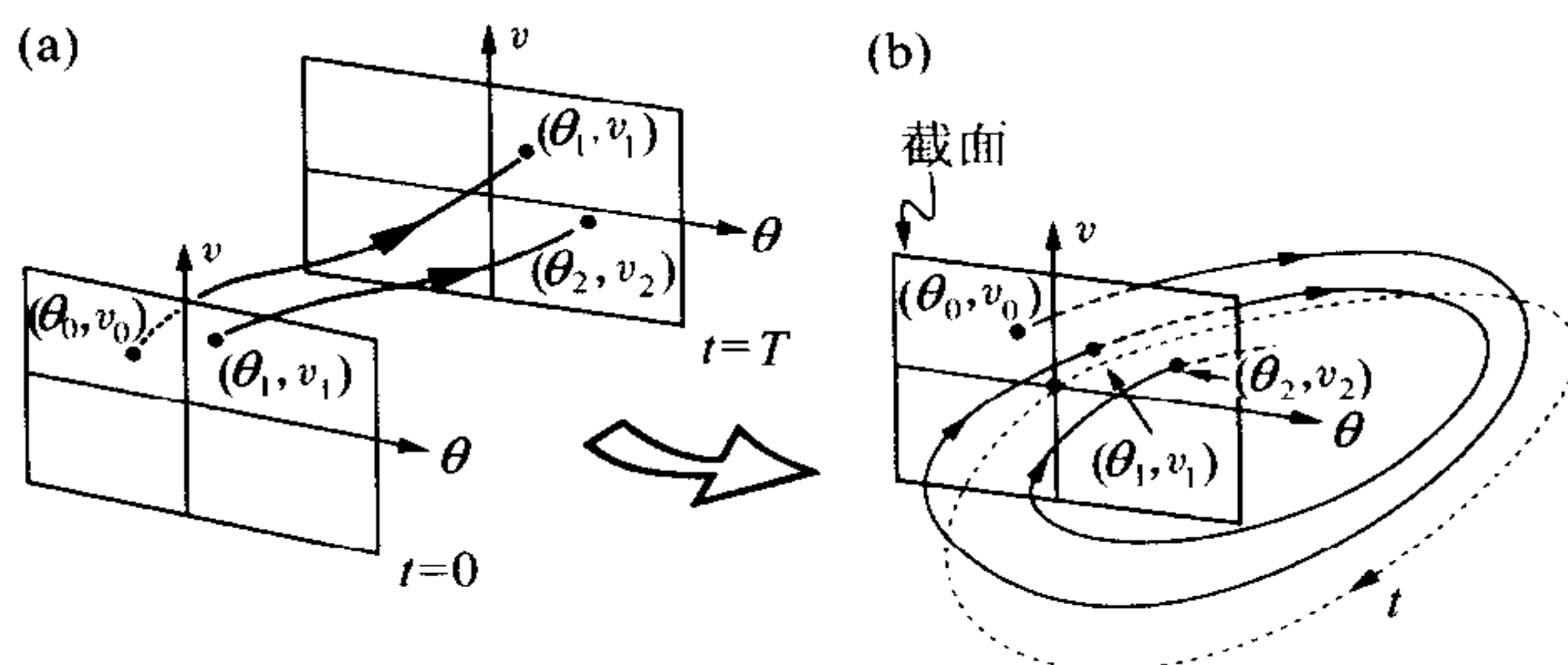


图 1.13 (a)周期的相空间, (b)截面与庞加莱映射。

由于(不稳定)周期运动的周期为 T , 因此它成为返回映射的不动点, 我们将它记为 p 。曲线 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{U}$ 是不稳定周期运动的(二维)稳定流形和不稳定流形, 因此 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{U}$ 上的点分别在 P 及其逆 P^{-1} 的作用下趋向于 p 点。如上所述, 由于外力的周期变化, 一般情况下我们认为稳定流形和不稳定流形会发生形变, 相互分开, 因此在截面上 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{U}$ 是两条分离的曲线, 与保持能量的未扰动摆中仅有一条光滑曲线不同。然而, 像我们所看到的那样, 对于一些特殊的轨道, 这些曲线还是会相交的。与未扰动摆的情形一样, 这些曲线将轨道分成两类, 一类通过不稳定倒立平衡点的“内部”, 另一类通过它的“外部”, 分别对应于摆做振幅较大的运动和翻转的运动。

现在我们可以描述庞加莱在踱步时努力想要理解的现象了。通过计算, 他得出这样的结论: 在三体问题中, 存在类似的曲线 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{U}$, 它们在 q_0 点发生横截相交的现象。此时, p 是不动点, 在映射 P 的作用下保持不变, 但 P 作用在 q_0 上会生成由不同的点组成的轨道, P 的正向迭代将产生 $P(q_0) = q_1$, $P(q_1) = q_2$, $\dots$, P 的负向迭代会产生 $P^{-1}(q_0) = q_{-1}$, $P^{-1}(q_{-1}) = q_{-2}$, $\dots$ 。[q_0

在 P 的作用下产生的每一个象，都可以由两个坐标去刻画：严格地讲，可以将 q_n 写为 $q_n = (\theta_n, v_n)$ 。] 由于 $\mathcal{S}$ 上的所有点在时间增加时趋于 p ，即 n 趋于无穷时，序列 q_n 趋于 p ，类似地，在 n 趋于无穷时序列 q_{-n} 也趋向于 p 。同宿交点 q_0 既属于 $\mathcal{S}$ 又属于 $\mathcal{U}$ ，于是我们由一个横截同宿点产生了无穷多个新的横截同宿点。所有这些点都是庞加莱的“双向渐近”点。

还会得到更多的结论。沿着 q_0 的象和原象，映射将 q_0 的象与原象附近的区域带到新的地方，特别地，映射将包含在曲线 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{U}$ 中的弧段映为新的弧段。现在这些曲线都可以定向了：在曲线上给出不同的方向——接近或远离不动点 p ——图 1.14a 中箭头所示的方向。庞加莱映射保持这种定向，因此如果曲线 $\mathcal{S}$ 在 q_0 点从左向右穿过 $\mathcal{U}$ ，那么在 q_0 的每一个象 q_n 处也会发生同样的现象。将这些点附近的小弧段连接起来就得到了一些曲线，我们发现在每一点 q_n 与它的象 q_{n+1} 之间都至少还有另一个交点 r_n 。两个无穷序列 q_n 和 r_n 称为一级同宿轨道，如图 1.14(a)。它们对应于受扰摆在回到不稳定的倒立状态前摆锤所作的单次环绕运动。

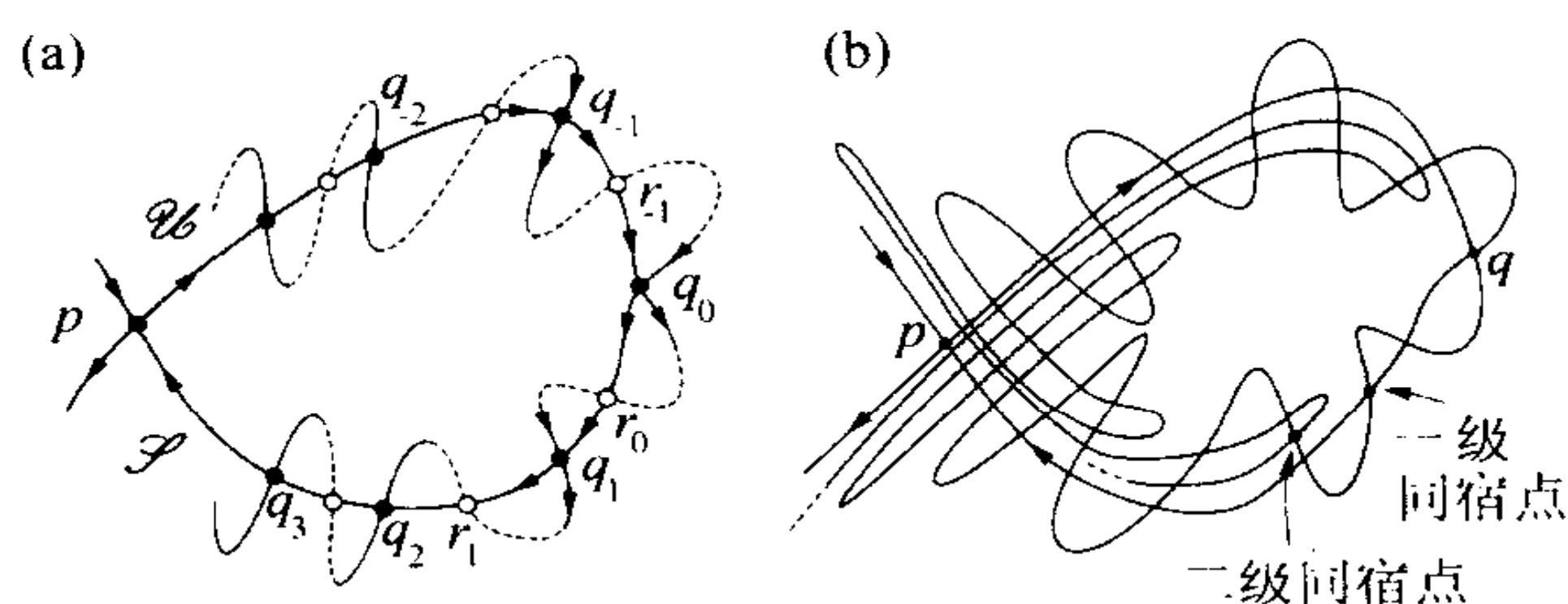


图 1.14 同宿栅栏的 (a) 一次逼近与 (b) 二次逼近。

还会发生更多的现象。在一级同宿点之间的曲线 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{S}$ 上的小弧段分别在 P 的正向与负向的迭代作用下越来越趋向于 p 点。在

接近这一鞍点时，它们受到不稳定方向的影响，发生拉伸行为 (stretching behavior)。于是这些弧段沿着曲线 $\mathcal{U}$ 的方向 (在正向迭代作用下) 和曲线 $\mathcal{S}$ 的方向 (在负向迭代作用下) 被拉伸，参见图 1.14b。从而导致了稳定流形与不稳定流形的进一步相交以及二级同宿轨道，它们则对应于摆在趋于不稳定平衡点以前摆动两周的运动。

上述数学步骤可以无限地重复下去，从而得到三级和四级同宿轨道以及任何时间 (或地形) 类型的轨道！因此我们获得了一个由同宿轨道构成的无穷集合，每一条同宿轨道都包含一个同宿点的无穷序列。从稳定流形 $\mathcal{S}$ 和不稳定流形 $\mathcal{U}$ 的一个交点出发，我们得到无穷多个同宿点的无穷集合。将全部这些曲线放到一起，就成为同宿栅栏 (homoclinic tangle)，这是一种网状或是格子架的结构，庞加莱虽然没有将它画出来，但比我们更加敏锐地预见到和关注于这种结构。网的每一条线都是 $\mathcal{S}$ 或 $\mathcal{U}$ 中的弧段，因此这些线将在将来最终到达鞍点 p 左边或右边的轨道以及在过去由鞍点两侧出发的轨道分离开来。在相空间的一块有界区域中包含了无限多条这样的分界线，实际上人们无法预测从任何给定的初始值出发的轨道的归宿。

在《新方法》一书的最后一卷第 397 节的开头，庞加莱这样描述同宿栅栏：“当我们试图去描绘它们 [稳定流形与不稳定流形] 的无穷多次相交产生的图形时，每一个交点都对应于一个双向渐近解，这些交点形成一种含有无穷多个很细网眼的格子或网状结构。这两条曲线中的任何一条都不会再次与自身相交，但是它却以一种极其复杂的方式弯曲着回到自身附近，从而无限次地穿过格子结构中的所有网眼。”

下一章我们将会发现，上述无穷多个同宿点以及栅栏的边界线只是所有现象的一小部分，更多深刻的现象还没有被揭开，但是庞加莱

的同宿栅栏是现在所谓的混沌现象的第一个数学描述。

潘多拉盒子

当时由于庞加莱还不能接受同宿栅栏可能存在的想法，因此他对自己的发现感到十分震惊。10年前，他曾是认识到 n 体问题难度的第一个人。下面我们将会发现庞加莱在获奖论文中已经指出横截同宿轨道可能的存在性，但他没有进一步去理解这些轨道蕴含的动力行为。在《新方法》第三卷中他最终描述的发现暗示，几乎不可能完全解决这个问题。对于他和同时代的人以及未来的几代数学家来讲，寻求 n 体问题的通解是毫无希望的。除此之外，他还很难接受混沌的思想。这样的概念与他所处时代的哲学是背道而驰的。

微分方程，包括描述物理现象的模型，都是描述确定性过程的。存在性和唯一性特征保证了一旦人们知道初值条件，方程的解就会被完全确定。至少就数学模型而言，我们能够由当前的情况预测未来的情况。人们唯一的问题就是寻找(或逼近)方程的解。从这点来看庞加莱的工作并没有改变什么，但是他在许多情形中说明了寻找方程的显式解的可能性实际上是零，并且，即使找到了方程的解，它们也会极度敏感地依赖于初值条件。他怎样才能向同时代的人解释定量方法经常会遇到难以逾越的障碍，而确定性(determinism)并不意味着精确的预测呢？谁会接受他的观点呢？他如何才能让科学界相信在充分长的一段时间以后，仅仅三个天体的引力运动就可能和天气一样变幻莫测呢？

19世纪末人类的精神是积极进取和乐观的。人类社会已经具备了产生科学技术革命的条件。一些大型的国际展览会，比如埃菲尔铁塔的揭幕仪式，都使公众相信人类的聪明才智可以解决任何社会和

经济问题。一个崭新的时代即将到来。庞加莱保守的思想不会影响即将产生的大量的科学发现。他的工作与时代的脉搏正好相反，大多数人似乎都不会接受他的新发现。或许庞加莱本人也不完全理解这一发现的深刻内涵以及所有的细节。他是一个经验丰富、声望极高的研究者，偶然地打开了这个潘多拉盒子。他发现了其中的秘密已经足够了，他的个人哲学不允许他继续探索下去。

事实上直到 20 世纪 80 年代，当处理图形的个人计算机和 workstation 得到广泛应用的时候，广大科研人员才接受混沌是一种普遍的现象。

我们确信事情的经过就是这样的。几年后发生的一件有据可查的事件证实了我们的推测：狭义相对论的诞生。庞加莱本人已经获得了发现相对论的必要的数据和理论基础，众所周知他曾经有过关于相对性原理的思想，但是这些想法是超乎寻常的并且与一般的科学常识相抵触，因此庞加莱最初就没有接受它们。爱因斯坦 (Albert Einstein) 只是瑞士专利局的一名职员，他很年轻并且在高级科学界不为人知，但他毫无顾虑、敢于挑战而且成功了。然而，庞加莱深知许多研究者曾经尝试并失败的例子，他们的名字与他们的思想一同被人们所遗忘。

《天体力学新方法》的最后一卷出版于 1899 年。庞加莱没有画出上面描述的同宿栅栏，他只是在书末提到这样的图形因过于复杂而很难画出来，并且认为这些事实能够使我们对于动力学中的大多数问题的难度有一个良好的认识。

庞加莱的错误

整个故事看起来相当直截了当：这也是大多数科学家所认同的。但是新的证据表明所发生的事情并非如此简单。一系列不寻常的事

件隐藏在简单的历史记录的背后。现在我们就描述一下今天人们所了解的事件的经过。

1887年7月16日，当时正在努力钻研悬赏的数学问题的庞加莱写信给米塔-列夫勒，他宣布已经证明了限制性三体问题的稳定性。

“在这种特殊的情形，”他写道，“我已经找到稳定性的严格证明以及对第三体的要素进行精确限制的一种方法……现在我希望能够攻克三体问题的一般情形，从现在到6月1日，即使我不能完全解决该问题(希望很渺茫)，至少那时我可以向竞赛委员会提交一份充分完备的结果。”

人们不清楚庞加莱指的是哪一种稳定性结果。这封信在庞加莱去世后发表于《数学学报》，其中编辑(最有可能是米塔-列夫勒)附加的脚注认为庞加莱指的是他的回复定理。这个定理曾出现在庞加莱发表过的文献中，我们在第4章会继续讨论它。然而，看起来并非如此，因为米塔-列夫勒早已对更一般情形下的回复定理耳熟能详。于是我们推测庞加莱宣布的稳定性结果描述了完全不同的情况，即狄利克雷的发现中阐述的稳定性。这样的稳定性结果才与悬赏问题中的稳定性相一致。

作为庞加莱论文的一个审稿人，魏尔斯特拉斯在写给米塔-列夫勒的报告中肯定地指出：“我可以毫无困难地肯定这篇研究论文应该获奖。您可以向国王汇报，这项工作实际上没有给出我们最初提出的问题一个完备解答，尽管如此它还是非常重要，它的出版必将在天体力学的发展史中开创一个新的纪元(楷体为本书作者所着重强调)。因此陛下举办这次竞赛的目的可以认为已达到了。”

另一方面，当魏尔斯特拉斯审查这篇论文时，他的健康状况十分恶劣。事实上，他直到国王同意颁奖以后才提交自己的报告。

在写给他的朋友和过去的学生科瓦列夫斯卡娅(Sonja Kovalevskaja, 在第5章我们会再次谈到她)的信中,这位德国数学家写道:“作为审稿人我没有能力更正庞加莱的工作中可能存在的错误,但是我仍然向国王提交了一份评注,并请《数学学报》将它与庞加莱的论文一同发表。”

《数学学报》没有发表魏尔斯特拉斯的评注。作为主编,米塔-列夫勒添加了一个注记,解释由于魏尔斯特拉斯恶劣的健康状况从而不可能发表他的评论。在《数学学报》第13卷中除了庞加莱的研究论文以外,仅包含另一位法国数学家阿佩尔(Paul Appell)的论文,阿佩尔由于出色地解决了评审委员会提出的另一个问题而赢得第二个奖励。与阿佩尔的论文一起发表的还有第三位评委埃尔米特的评语。

由此产生了一些问题,为什么没有发表魏尔斯特拉斯的报告?庞加莱在1887年宣布证明的稳定性结果究竟是什么?在发表的论文的印刷版本中没有包含上述结果。这一故事的背后隐藏着什么呢?

现在我们了解到,庞加莱在1888年5月向竞赛委员会提交了一篇论文,在论文中他宣布证明了限制性三体问题的某种稳定性结果。论文由米塔-列夫勒和魏尔斯特拉斯评审,前者恰好到德国去旅游,因此两人可以一同审阅论文。在1889年1月颁发国王奖,同时论文在《数学学报》发表的准备工作也开始了。漫长的排版与印制工作从1889年4月持续到11月。在此期间,米塔-列夫勒曾经指定作为庞加莱论文初审的《数学学报》的编辑弗拉格门(Edvard Phragmén)在做出版前的校对工作时,就论文中不明确的段落提出了一些问题(其中一些问题是有关小分母的,在第5章我们将会讨论它)。米塔-列夫勒将这些问题转给庞加莱,庞加莱于是着手写一些解释性的注记作为论文的附录来回答这些问题。其后,在秋天的某个时候,庞加

莱认识到在论文的另一部分犯了一个更加严重的错误。11月30日，他打电报给米塔-列夫勒请求立即停止印刷，并在随后的信中解释了所发现的错误。

在《牛顿的时钟》(1994)一书中，彼得森(Ivars Peterson)认为弗拉格门发现了庞加莱的错误。他主要是依据其他人的观点，其中包括下文中会谈到的莫尔顿(Moulton)。然而，事情看起来更可能是这样的：弗拉格门在谈及有关事件时，他开始时确实“承认[庞加莱]发现并且改正了一个严重的错误”，正如在庞加莱修改后的论文的引言中所述。庞加莱在1889年12月1日写给米塔-列夫勒的信中谈到“[曾经告诉弗拉格门]我所犯的一个错误”，而不是相反的情形。他对那个错误本身却一直闭口不谈：在给弗拉格门的答复中都是关于其他次要方面的。然而，随着人们对庞加莱附有注解的原始印刷版论文的发现和研究，现在我们能够描述他的错误的本质。

回顾图1.12b和1.14中所示受到周期扰动的摆系统中鞍点的稳定流形和不稳定流形分离的讨论。庞加莱认识到，在三体问题中扰动(perturbations)会改变未受扰系统中类似的不变曲线，并且发展了逼近这些不变曲线位置的含有小参量的级数表示方法。他正确地指出受扰曲线会继续相交，否则，如果一条曲线完全含在另一条曲线的“内部”，那么面积在迭代映射的作用下就不会保持不变，这与能量守恒定律相矛盾。庞加莱考虑了各种可能性，他通过细致的扰动分析排除所有的情况，最后得出受扰曲线必须相互重合的结论。如果上述情况发生，就意味着相应的流的二维不变曲面会阻止它内部的解跑出去，就像图1.12a中未受扰摆的分界线一样。但是庞加莱没有认识到这些曲线横截相交的可能性以及随之而来的混沌运动现象，因此他得出关于稳定性的不正确结论。

这不是米塔-列夫勒遇到的唯一问题。在奥斯卡国王奖宣布后不久，庞加莱的错误被发现以前，另一位同行、《数学学报》的一位编辑、天文学家吉尔当宣布，在两年前发表的一篇文章中他已经预先得到庞加莱(不成熟)的稳定性证明。收到米塔-列夫勒的通知后，庞加莱答复说他发现吉尔当的论文难以理解并且没有确定的结论，但他相信论文中没有证明相应级数的收敛性。看起来吉尔当“物理的”方法并不十分严格，不能令庞加莱、埃尔米特和其他吉尔当提请注意的人满意。(吉尔当去世几年后，庞加莱在纠正了自己的工作以后，在《数学学报》发表的另一篇论文中提出理由说明吉尔当的方法实质上是错误的。)

吉尔当的挑战引发了瑞典科学院一些令人烦恼的争论，米塔-列夫勒也不能完全平息这场风波。事实上，激烈的争论持续了一段时间。直到1904年末，在一次有关天体力学史的讨论中，吉尔当过去的学生布赫霍尔兹(Hugo Buchholz)发表一篇论文维护他导师的工作。文中他承认庞加莱证明了某些情形中渐近级数的发散性，但认为这些结果不能在其他情形里否定吉尔当的结论。他同时承认吉尔当的论文难于理解：麦吉(Richard McGehee，见下一节)也证实了这一说法，最近他试图理解吉尔当的论文，但是没有取得多大进展。不管怎样，当1889年春天来临之际，争论似乎减少了，“真正”的错误被发现了。

我们可以想像庞加莱认识到他所犯错误的性质时的懊恼。在上面引述的信中，他继续写道：“我无法隐藏由此带来的痛苦。”他发现了一种全新的方法研究动力系统，却忽视了这样明显的事实！然而研究工作经常是这样的：微妙的与显然的结论混杂在一起，没有人熟知它们，此类错误比人们想像的更为常见。这就是新的数学思想

和科学思想以及描述它们的论文在发表以前通常都要接受其他科学家的严格审查和评论的原因。一旦错误被发现，研究者必须放下架子去纠正错误。这是常见的很典型的程序。但是此时庞加莱已经获得了奥斯卡国王奖，所以利害关系就非同寻常地大了。

受到道德与世俗的巨大压力，庞加莱确实在接下去的几个个月努力改正自己的错误。这完全改变了论文的内涵，也将改变天体力学和动力系统理论的整个研究进程。庞加莱认识到相交的不变曲线不能阻止映射轨道的离开，系统可以是极不稳定的，研究我们前面讲述的相当于同宿轨道的稳定流形和不稳定流形的横截相交能够说明这一点。在回答弗拉格门提出的其他问题的同时，庞加莱修改了他的错误，并从中得出令人惊奇的结果，最初 158 页的文章增加到 270 页。1890 年 1 月，在获奖整整一年后，庞加莱提交了修改后的论文，这就是我们所知的在《数学学报》上发表的论文。在米塔-列夫勒的要求下，庞加莱在引言中向弗拉格门表示感谢，但没有解释错误的根源。同时他偿付了 3585 克朗 63 欧尔，作为第一次印刷的费用，从而他所支付的数额远远超出了所获得的奖金。

庞加莱大量修改后的论文的印刷工作在 1890 年 4~10 月进行，论文于当年晚些时候出版，首页仍然标着颁奖的日期：1889 年 1 月 21 日。这篇论文标志着人们向理解混沌的第一个例子迈出了重要的一步。在发现错误以后的短短几个月中，庞加莱得到的结果是非同寻常的：它们显示出庞加莱具有超人的创造力和理解力。数学史明显地站在修改后的论文一边，但实际上奥斯卡国王奖表彰的是包含错误的较早的论文。当然，许多有重要价值的思想和结果在修改后的论文中完整地保留下来。事实上，整个事件就像庞加莱同时代的芝加哥大学著名天体力学家莫尔顿(Forest Ray Moulton, 1872~1952)

教授在 1912 年所叙述的那样：

最近人们多次指出，庞加莱获得奥斯卡二世国王嘉奖的有关三体问题的原始论文含有错误，他发表的论文与最初提交的论文是不同的。令人遗憾和误解的是，上述说法给人们留下这样的印象：庞加莱的原始论文是错误的并且毫无价值。斯德哥尔摩的弗拉格门发现原始论文的确有错误，但是它仅仅影响有关渐近解的存在性讨论；在修改论文这一部分时，庞加莱没有试图去掩盖这些事实，而是完全坦诚地表达了对弗拉格门的谢意。

虽然错误是令人遗憾的，但是毫无疑问，即使论文存在错误，甚至在当时就广为人知，庞加莱获得这一奖项仍是无可争议的。如果将论文中受错误影响的部分统统删除，余下的部分仍旧是一个整体，它的创造性、结果的可靠性以及对重要领域的开创性在其他论文中是很难见到的。即使是极负盛名的科学家，也很少有人能够在他们的一生中比庞加莱在原始论文的正确部分中做出更多的真正有价值的新工作。

一个惊人的发现

于什霍尔姆是距斯德哥尔摩北部几英里远的一座宁静的小城，那是一处邻近海峡却远离都市喧闹的宜人的度假胜地。清晨总是雾蒙蒙的，人们可以呼吸到带着咸味的海洋气息。一些街道在过去 100 年中几乎没有发生变化，狭窄的小巷里弥漫着古老的历史气氛。

数学研究所是一座宏伟的建筑，简直可以称得上是一座宫殿。这座迷人的建筑是哥斯塔·米塔-列夫勒过去的住所，研究所今天仍然沿用他的名字。1985 年，明尼苏达大学的麦吉利用一段休假时间

来到这个令人仰慕的研究所。他主要感兴趣的是冯·塞佩尔(Hugo von Zeipel, 1873~1959)的工作和生活(我们在第3章将谈及冯·塞佩尔),他发现米塔-列夫勒保存的许多资料对他很有用。米塔-列夫勒的信件与他复信的副本都是按照字母顺序归档的。这位瑞典数学家深知如何为后人保存他的文献资料。

但是档案中的一些文件却未被分门归类。一天,麦吉打开一个尘封的匣子,从外表看来其中装着《数学学报》第13卷的一些备份——即庞加莱发表获奖论文的那期刊物。麦吉突然对这篇文章产生了兴趣,于是取了一份并仔细地阅读起来,结果令他大为吃惊。为了澄清他的疑虑,他又从图书馆正式收藏的图书中取来了同一期刊物,比较两份杂志证实了他的疑问。庞加莱论文这两个印刷文本有所不同。

麦吉偶然发现了一件公众所不了解的事实,庞加莱关于稳定性的原稿确实曾经发表于《数学学报》的第13卷。包括莫泽(Jürgen Moser)(我们在第5章将遇到)和瑞典数学家卡勒松(Lennart Carleson)在内的很少一部分人知道这件事,实际上正是卡勒松的话提醒了麦吉去揭开档案中的秘密。《数学学报》第13卷在1889年11月中旬印刷完毕,最初的几份刊物已流通到一些杰出的数学家和天文学家手中。但是在庞加莱的错误暴露出来以后,米塔-列夫勒就停止了发行工作,并收回所有印刷出来的杂志,后来取而代之的是我们今天在图书馆见到的杂志,其中包括庞加莱修改并修正后的论文。麦吉有幸看到了被收回的杂志,它可能是因秘书的疏忽而逃脱了被销毁的厄运。(其中一本杂志上用瑞典语写着:“销毁该版的所有刊物。M.L.”)根据麦吉的发现,学者们更加细致地审阅了这些档案,其中庞加莱修改过的回答弗拉格门所提出问题的手稿的一份副本,使我们能够重建上一节中所描述的许多事件。

做出更换已经出版的论文的决定，对于一位科学杂志的主编来讲是非同寻常的。我们不希望科学史像在极权政府统治下的政治史一样被改写。但是米塔-列夫勒的理由或许是可以理解的。首先，他必须维护奥斯卡国王奖、《数学学报》以及这个学科本身在非数学家心目中的声誉。这不是一件容易的任务，米塔-列夫勒清楚大多数科学家作为政治家是很不适合的。他还要维护自己作为瑞典数学界的领袖、上流社会的知名人士以及国王的顾问的地位。

对于发生在一个世纪以前缺乏足够资料的事件做出判断是困难的，可能也是不公正的。人们或许会提出科学中的道德问题，但是我们应该认识到庞加莱获得奥斯卡国王奖是理所应当的，米塔-列夫勒更换发表的论文也不是存心要隐瞒科学界内部的错误。这段奇特的历史给本书的故事增加了非常人性化的成分。今天我们仍然受惠于奥斯卡国王奖的正面影响以及庞加莱的卓越贡献，如果没有它们，20 世纪的数学将会截然不同。

米塔-列夫勒在架构 19 和 20 世纪数学世界联系的桥梁中起了极为重要的作用。法国、德国和英国的科学家在此前的 300 年间主宰了数学的发展，而瑞典的数学实际上是不存在的。经过努力，米塔-列夫勒成功地建立了一所数学学校，增加薪金以吸引各国知名人士来到瑞典，并且创办了一份最好的数学杂志。引人注目的是，自从米塔-列夫勒以来瑞典这样一个小国在短时间里产生了为数众多的杰出数学家。米塔-列夫勒确信在他已取得的卓越成就面临政治风险的时候，应当而且必须采取维护自己的梦想与雄心的行动。

我们关于昂利·庞加莱在牛顿的太阳系模型中发现混沌的故事差不多就要结束了。尽管庞加莱在完成他的天体力学巨著以后仍不断

回到天体力学和动力学问题中，但他主要的兴趣已经转移到其他领域，包括撰写关于数学创造性和科学推理的本质的通俗易懂的几部著作。他在1908年被选入法兰西学院，实际上主要是因为这些通俗论著的文学成就。

在此后的30年间，几乎没有科学家能够对动力学有如此深刻的洞察力。像阿达马(Jacques Hadamard, 1865 ~ 1963)和嘉当(Élie Cartan, 1869 ~ 1951)这样的杰出数学家发展了庞加莱的一些思想，但是基本上都忽略了混沌。混沌与流行的乐观主义背道而驰，乐观派的雄心是控制自然界。在物理学中，相对论和量子力学的革命很快取代了研究者对于经典的牛顿力学的兴趣。在数学中，尽管庞加莱种下了同产生现代物理学一样重要的种子，但是希尔伯特(David Hilbert, 1862 ~ 1943)的严格公理化的纲领及其发展与庞加莱的直觉观念相违背，开始长期支配整个数学领域。在下面的几章中，我们将讲述20世纪的一些人重新拾起并继续庞加莱的工作。我们还将适时回到过去，回顾一些早期的发展并填补整个故事的其他情节。

注 释：

下面的注释，提供了有关文献和相关的历史细节。考虑到很多读者对这些细节不感兴趣，故将它们附在正文后——而没有作为脚注——因此不会打断整个故事的叙述。这些注释主要想为数学家和数学史学家(historian of mathematics)提供参考。

本书的构思是作为一本通俗读物，我们相信所讲述的是一个有趣的故事，因此为了故事的连续性，叙述了一些没有文本支持的场景。在下面的注解中明确地指出了我们允许自己自由发挥的少数情节。我们这样做的原因，是希望让读者感受所讨论的事件发生的历史氛围和时代精神，为此书中提供了有关事件的非常重要的背景资料。

注释是按章节的顺序排列的，用两个数字表示章节(例如，2.3代表第2章第3节)。我们还给出相应章节的标题。参考文献在注释的后面(标在方括号里)；其中一些书籍和文章包含一般的背景材料，并不是所有的文献都被明确地引用。在我们参考一些讨论和未发表的资料时，本书作者的名字缩写为FD(迪亚库)和PH(霍尔姆斯)。为了力求准确，我们描述了事件的来龙去脉。由于采用的一些材料属于我们的一般知识，而且在收集过程中，这些事件在我们的记忆中可能变得模糊，在此向那些因我们的轻率而误引或者因疏忽而未提到的人表示歉意。

全书的第一段题记摘自赫西俄德的《神谱》的 114~116 行^{*}，它是由通保伊迪什(Stathis Tompaids)推荐的。第二段摘自[Dy, 1995]。

1.0 第 1 章的题记摘自[Da, 1900]。它在[Po, 1929]的引言中也被引用。1989 年拉斯卡尔(Jacques Laskar)和尚西内(Alain Chenciner)在巴黎经度局主持的《天体力学新方法》讨论班的记录中，指出阿佩尔在 1925 年曾经(用法文)给出同样的陈述。

1.1 巴黎踱步：本章的第一部分是围绕庞加莱对同宿点和混沌问题的钻研，以及他在踱步和思考其他问题时对此的顿悟展开的。这并没有什么历史证据。尽管如此，庞加莱描述过他发现有关富克斯函数的某种性质时所发生的类似事件，当时他离开书桌，想撇开这个问题放松一下，却突然想到了它的证明([Po, 1929], pp. 387~388)。对于科学家来讲这并不少见——凯库勒(Kekulé)发现苯环就是一个类似的例子。因此我们认为这样引出整个故事是恰如其分的。确定无疑的是，直到庞加莱 1889 年发现同宿点的几年后，他才认识到其深刻的内涵，它们曾经困扰他许多年。

庞加莱的婚姻的确十分美满，他有三个女儿和一个儿子[Be, 1937]。1993 年 7 月在德国的奥勃沃尔法赫，巴黎第七大学的沙普龙(Marc Chaperon)告诉 FD，昂利·庞加莱的一位后人是他的一名学生。此处和本节开头用到的有关庞加莱的文献，参见[Nm, 1960]、[Be, 1937]^{**}和[Co, 1990]。有关高斯、鲍耶和伽罗瓦的故事在数学史中是传统的，参看[Nm, 1960]。

1.2 牛顿的洞见：本节的主要来源是[N, 1934]，最早的出版物是[N, 1686]。有关牛顿的生平与成就以及他和莱布尼茨的争论，参见[We, 1980]。关于纳皮尔和第一个微分方程的资料，是 1993 年 1 月由一位数学史学家蒂(Gary Tee)在新西兰的奥克兰大学举办的微分方程和科学计算学术会议上提供给 FD 的。

1.3 自然法则的语言：本节描述的思想可以参见大多数微分方程的现代教科书。例如[Ar, 1973]或者[H & S, 1974]。

1.4 实在之模型：参考文献同 1.3。

1.5 流形世界：本节的概念可以在拓扑学或者现代微分几何教材以及处理流形上的微分方程的书籍中找到(见 1.3)。

1.6 n 体问题： n 体问题首先是由牛顿(用几何语言)提出的[N, 1686, 1934]。关于伯努利解决二体问题的论述，参见[Win, 1941]的文献注记。

1.7 奥斯卡国王奖：戈罗夫(Goroff)为[Po, 1993]写的序是有关奥斯卡国王奖历史的最好的资料来源；还可以参看[S & M, 1971]和历史方面的文章[B-G, 1994]和[And, 1994]。《数学学报》第 7 卷 1885~1886 页用法语和德语宣布了这一竞赛。达布(Gaston Darboux)在[D, 1914]中引用了评审委员会提出的问题，这里引用的是[Po, 1993]中的英译文。

1.8 庞加莱的贡献：庞加莱的一段话，“生命只是……”，载于[Po, 1929]。天体力学的早期论文见[Po, 1951~1956]。庞加莱的题记的英译文，参见[B & G, 1994]。

1.9 《……新方法》：庞加莱的获奖论文，见[Po, 1890]。三卷本的《新方法》，参见[Po, 1892~1893~1899]，[Po, 1993]是最近出版的由戈罗夫翻译的英译本。

1.10 不动点：本节和第 2 章中部分思想的更加专门的介绍，可以从[Ho, 1990]中找到。

1.11 首次返回：文献的出处同 1.9。返回映射的想法在[Po, 1881~1886]中第一次引进。

* [古希腊]赫西俄德著《工作与时日 神谱》，张竹明等译，商务印书馆，1997 年，29 页。——译者

** 尽管贝尔(Bell)的书由于过分地想像而受到一些历史学家的批评，从我们的角度出发它却是有益的。最近一篇评论[Br, 1994]认为贝尔的著作应归入科学书籍，并将其描述成“不能与已经存在的传统和预想的框架相适应的数学真理”，从而得出结论“我们需要贝尔这样的数学家……他像一位富有想像力的诗人”。——作者

1.12 瞥见混沌：同宿栅栏的描述引自于[Ho, 1990]和[Po, 1993]，即戈罗夫的译本。

1.13 潘多拉盒子：此处仅有的参考文献是[Po, 1892~1893~1899]和[Po, 1993]。关于同宿栅栏的著名论断在书中的第33章397节。

1.14 庞加莱的错误：有关进一步的资料，读者可以查阅《数学学报》第38卷中庞加莱写给米塔-列夫勒的信件和戈罗夫为[Po, 1993]作的序以及[Mou, 1912]。围绕庞加莱的错误所发生的一系列事件的早期叙述，参见[Pet, 1993]。麦吉在1989年1月亚利桑那凤凰城召开的美国数学会会议上告诉PH，他发现了庞加莱论文的最初版本。FD和麦吉在1993年7月德国奥勃沃尔法赫召开的动力系统会议上进行的几次讨论，帮助澄清了整个故事。基于米塔-列夫勒研究所珍藏的资料，最近的两篇论文[B-G, 1994]和[And, 1994]对于提供进一步的细节是极为宝贵的。本书所涉及到的，吉尔当的论文见[Gy, 1887]，布赫霍尔兹的论文见[Bch, 1904]。感谢莫泽让我们注意到后者。（[Bch, 1904]还附带指出国王奖的奖金是10 000 克朗，而不是公告中所讲的2500 克朗；但是[B-G, 1994]和[And, 1994]认为是后面的数目，参看上面的1.7。）[Po, 1993]重述了莫尔顿对庞加莱工作的看法[Mou, 1912]。*

1.15 一个惊人的发现：本节以上面提及的与麦吉的讨论为基础。有关米塔-列夫勒研究所的图书馆以及米塔-列夫勒旧宅的描述，参见[Bo, 1992]。庞加莱关于科学的一些一般性论著（其中大多数还单独出版过），参见[Po, 1929]。

* 作者要求中文版对本注释最后2句改写如下：……[And, 1994]收录了注意到此数额的一封信，庞加莱1889年3月24日致米塔-列夫勒。莫尔顿的看法[Mou, 1912]重刊于[Po, 1993]。[B-G, 1997]提供了更专门细节和更完整的历史叙述，在本书第一版后付梓。——编者

2. 符号动力学

伯克霍夫迷恋动力学的符号表示，其重要性是显而易见的，他后来发表的论文主要集中于为描述动力系统而探寻一般的符号体系。

——莫尔斯(Marston Morse)

当伯克霍夫(George David Birkhoff, 1884~1944)来到系里时，他发现了信箱中有一封信。这是他期待已久并渴望一读的那封信。他离开秘书的房间时尽量不显得匆忙。在自己的私人办公室他拆开信封，用颤抖的手打开信纸读了起来。

伯克霍夫极力压抑着暴发的喜悦。他是幸运的，哈佛大学向他提供了一个教授职位。这样今后的财政资助就有了保证，他可以有充足的时间和宁静的心境继续进行研究工作。数年来伯克霍夫一直渴望有这样的机会，他简直不敢相信，现在梦想终于成真了。

伯克霍夫在普林斯顿收到这封信时年仅 27 岁。尽管那时他在普

林斯顿仅有一个临时职位，普林斯顿大学不想失去这位有前途的青年。系主任一听说哈佛大学的聘约，立即就给伯克霍夫提供了一个助理教授的职位。2年前的1909年，伯克霍夫来到普林斯顿大学时只是一名见习教师，相当于其他大学的讲师。现在随着得到提升，伯克霍夫获得了应有的认可。此时他决定留在普林斯顿大学。他将在第二年再考虑哈佛大学的职位，最终伯克霍夫于1912年去了马萨诸塞州的坎布里奇。



照片 2.1 乔治·戴维·伯克霍夫。（美国数学会提供）

从不动点开启的学术生涯

1884年伯克霍夫出生在密歇根的奥弗里塞尔，他的父母是荷兰

人。1896~1902年伯克霍夫在刘易斯专科学校学习，然后到芝加哥大学学习了1年。1905年他获得哈佛大学的学士学位。在回到芝加哥的2年后他以最优异的学业成绩获得数学博士学位。在博士论文中，伯克霍夫研究了依赖于参量的一类线性微分方程解的渐近特征。这项研究工作不仅开辟了伯克霍夫本人非凡的职业生涯，也标志着整个美国的动力系统学派的创立。

伯克霍夫非常尊重庞加莱取得的成就，他仔细研究了这位法国数学家在动力学方面的著作。伯克霍夫的第一个重要成果，也是为他赢得世界声誉的工作，就来源于庞加莱在1912年意大利的杂志《巴勒莫数学家记载》上发表的最后一篇论文“关于一个几何定理”。

1908年，庞加莱在患病和手术之后，他看起来得到了完全的康复。然而在1911年，他预感到自己的生命行将结束。12月9日，庞加莱向《记载》提交了一份未完成的手稿。在同时写给编辑的信中，他表达了对过去2年来自己所思考的问题的忧虑，他写道：“在我有生之年，我或许不能够解决它，目前得到的结果可能将研究者带到一条新的无法预料的道路上。我感觉到这些结果前途无量，虽然有人已指责我欺骗，我还是愿意将它们贡献出来。”

庞加莱在这最后一篇论文中未加证明地猜测下述结论：圆环的保面积映射如果以相反的方向扭转两个边界圆周上的点，那么此映射至少包含两个不动点。为了解释这一结果，我们选取圆环 A ，它是位于平面上两个同心圆周 C_1 和 C_2 中间的区域：图2.1所示的平坦的圆环。下面定义从 A 到自身的映射。与在第1章讨论的庞加莱映射一样，这个映射是一种规则，它将 A 中的每个点都对应于 A 中一个唯一的点。例如，在图2.1中，可以将 a 点对应到 b 点。我们称此映射将 a 映到 b ，或者说 a 在映射下的象是 b 。 c 点也可能在映射

下对应于它本身，由于 c 在映射的作用下保持不动，因此称它为不动点。 A 中的每个点都与映射下的象点相联系。 庞加莱假设映射是连续的，这意味着邻近点的象也相互靠近。 我们可以把环面想像为一块橡皮，映射能够将它扭曲变形却不能撕裂它。

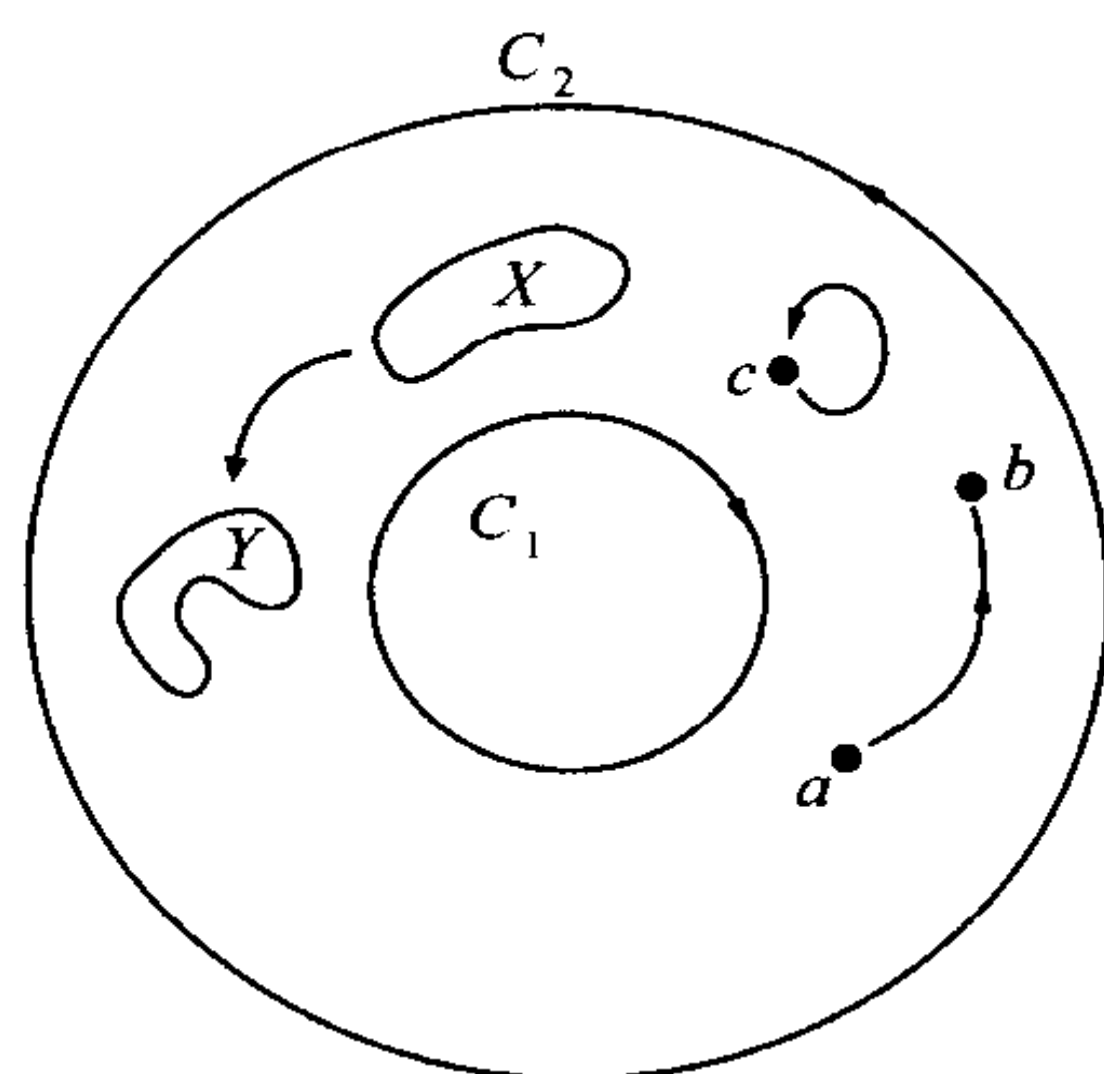


图 2.1 伯克霍夫的不动点定理。

上述映射还需要两个进一步的条件。 首先，映射应当是保面积的，即任何区域的象都是具有与原区域相同面积的另一块区域。 例如在图 2.1 中，区域 X 在映射下的象是区域 Y ，它们具有相同的面积。 这对 A 中每一个区域都成立。 保面积表面看起来是有局限性的，但是在经典力学和天体力学中，由于这种性质与能量、动量等物理量的守恒相联系，因此保面积映射的例子是大量存在的。 其实在庞加莱的获奖论文中我们已经看到守恒量的重要作用。 第二个条件要求在映射的作用下，圆周 C_1 上的点以一定的方向（例如顺时针方向）围绕 C_1 运动，而 C_2 上的点却按相反的方向（逆时针方向）围绕 C_2 运动，如图 2.1 中箭头所示：在边界 C_1 和 C_2 上的点仍旧保留在边界 C_1 和 C_2 上。 在上述假设下，实际上几乎没有涉及环面内的点在映射的作用下如何运动，但是庞加莱认为这种映射至少含有两个不动点。

事实上，庞加莱能够在映射具有一个不动点的条件下证明它必然具有第二个不动点，但是他无法证明开始时的第一个不动点的存在性。这是一个与天体力学有紧密联系的看似抽象的问题。如果不动点存在，那么应用它的一些性质，庞加莱就能够在三体问题中得出具有无穷多条周期轨道的结论。当时庞加莱正在研究描述三体问题的微分方程所诱导的我们如今所称的庞加莱映射(见第1章)。

庞加莱对周期轨道方面的研究特别感兴趣。周期轨道不仅能够帮助我们间接地处理稳定性问题，它还提供了理解其附近轨道性质的一种手段。庞加莱认为周期轨道是最重要的课题，并且在他的一生中都在思考相关的问题。在《新方法》中庞加莱这样评论它：“周期解看起来不会有什么实际的应用。确实，在相空间中严格对应于周期解的初值条件的运动的概率为零。但是有趣的行为可能会发生在与周期解差别非常小的那些解上，而这正是属于旧方法不再适用的那类情形。此时周期解可以方便地作为第一次逼近，或者用吉尔当的话来讲，作为中间轨道。”从这段有关周期解的评述中可以看出，环面映射不动点的猜想是沿着这个方向前进的十分自然的一步，这是因为第1章所指出的，庞加莱映射的不动点对应于相应的微分方程的周期轨道。

庞加莱于1912年7月去世，他的最后一篇论文在那年夏天传到了普林斯顿大学。几个月后，伯克霍夫不仅理解了论文的思想，而且给出庞加莱猜想的一个证明。在10月底，伯克霍夫向美国数学会提交一篇题为“庞加莱几何定理的证明”的论文。这一结果今天被称为庞加莱-伯克霍夫不动点定理。

伯克霍夫以后多次回到庞加莱的思想和论文中，特别是他重新考察了同宿栅栏。在伯克霍夫出版于1927年的《动力系统》一书

中，他除了证明我们在第 1 章中讨论的同宿点的无穷集合的存在性之外，还证明存在无穷多条周期轨道。他的论证是十分精巧并且难于理解的。这里我们不去细述伯克霍夫的工作，而是随着时间的推移，来到 20 世纪后半叶描述一种美妙的想法，它大大地简化了同宿栅栏的研究工作，并且使人们更深入地理解庞加莱所预见到的混沌成为可能。

里约的海滨

诺贝尔奖不设立数学奖。炸药的发明人阿尔弗雷德·诺贝尔 (Alfred Nobel, 1833~1896) 是一位热心于科学和文学的讲求实际的人；事实上，他曾经写过小说。诺贝尔明显地不重视纯粹数学领域的研究工作，而奖励在有着更为直接应用的领域中所做出的突出贡献。据传言，米塔-列夫勒与诺贝尔的妻子有染，从而导致了诺贝尔奖不设立数学奖。这一传言是毫无根据的，因为诺贝尔终生未婚。然而，有证据表明诺贝尔与米塔-列夫勒素有嫌隙。

数学上的最高荣誉是菲尔兹奖，它是由加拿大数学家菲尔兹 (John Charles Fields, 1863~1932) 发起的。菲尔兹是国际数学联合会的前荣誉主席和多伦多大学的教授，他在访问欧洲期间同米塔-列夫勒建立了亲密的友谊。通过菲尔兹，我们了解到有关数学家米塔-列夫勒与瑞典实业家诺贝尔的一些情况。菲尔兹在多伦多的朋友 J·L·辛格 [J. L. Synge, 爱尔兰剧作家 J·M·辛格 (J. M. Synge, 1871~1909) 的侄子]，在菲尔兹于 1932 年去世后为建立菲尔兹奖发挥了重要的作用。关于数学被排除在诺贝尔奖以外，辛格在 40 年后写道：“我在这里插入菲尔兹曾经告诉我，后来我在瑞典得到证实的一件事，即诺贝尔因憎恨数学家米塔-列夫勒从而决定在诺贝尔

奖中不设立数学奖。”



照片 2.2 菲尔兹奖奖章。

很少有奖金来源于所设置奖项的领域内，像诺贝尔奖一样，奖金通常都来自于比较远的其他领域。从这一点来看，菲尔兹奖同诺贝尔奖比起来奖金如此微薄也就不足为奇了，菲尔兹奖自 1936 年以来在每 4 年召开的国际数学家大会上颁给年龄不超过 40 岁的年轻数学家。许多人都认为一个数学家如果不能在 40 岁以前做出卓越的工作，那么他在以后也不会做出来。当然，例外总是有的：魏尔斯特拉斯，我们在第 1 章中提到的评奖人，一位数学分析的革新者，曾经当了 14 年的中学教师，直到他的后半生才被数学界所赏识。

加州大学伯克利分校的斯梅尔(Stephen Smale)是 1966 年莫斯科数学家大会上 4 位菲尔兹奖得主之一。他由于证明庞加莱的一个拓扑学猜想而获奖。拓扑学是数学的一个分支，庞加莱在这一领域做出了开拓性的贡献。拓扑学研究的对象是在同胚(homeomorphism)下保持不变的几何对象。这是什么意思呢？我们选取一个几何对象，比如一个圆周。在拓扑学中对于圆周、椭圆和其他简单闭曲线是不加区分的。（“简单”是指这条曲线不应自交。）它们都表示拓扑学中的同一个对象。我们可以拉伸、压缩、弯曲以及形变这个几何对象，但通常不能切断或粘贴它。对于圆周来讲，如果切断它，

那么只能形成一个扭结(knot)，并且要将两个端点重新粘起来。从拓扑学的观点来看，圆周、椭圆和端点粘在一起的扭结圆环都是“拓扑圆周”。（见图 2.2。）

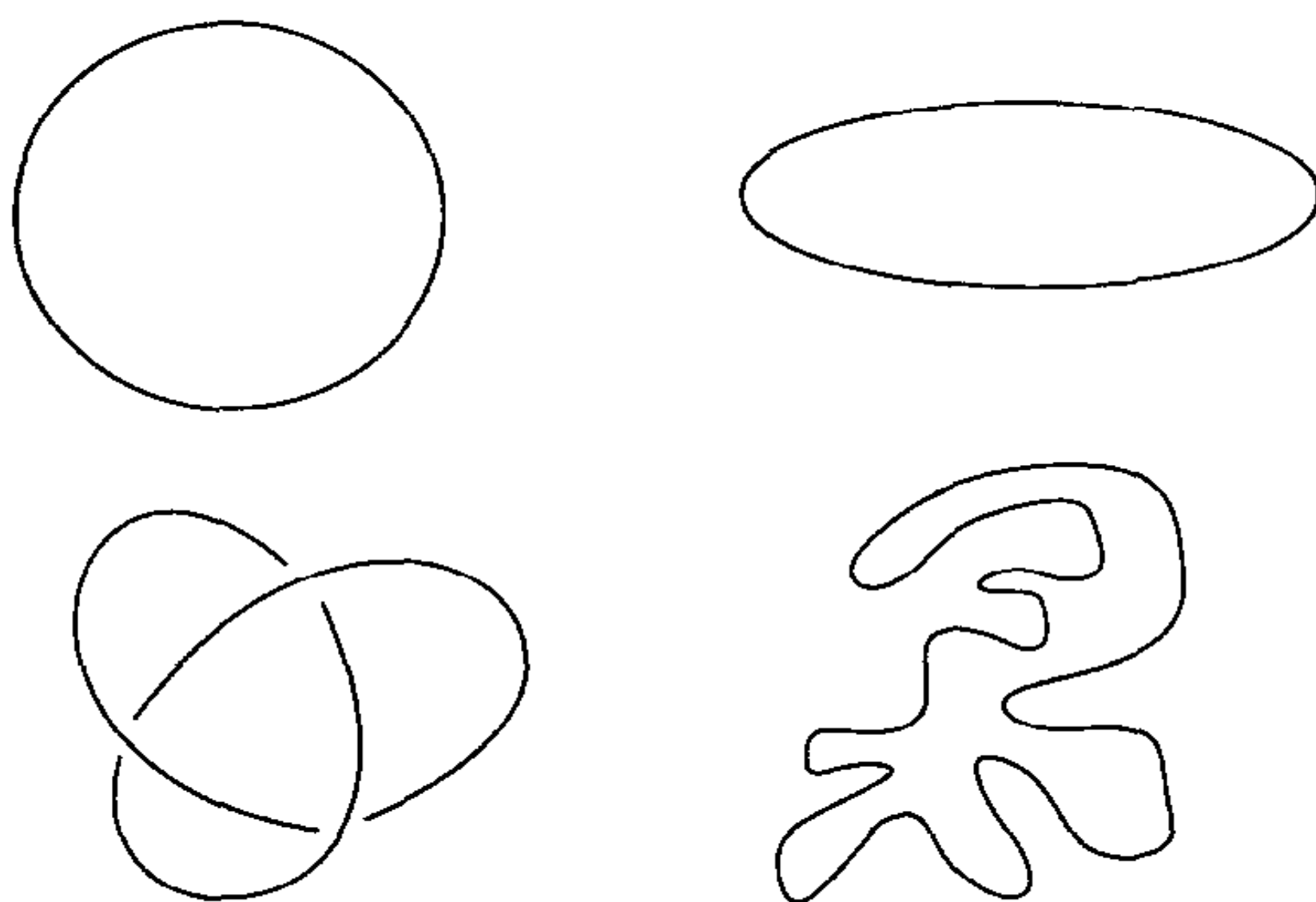
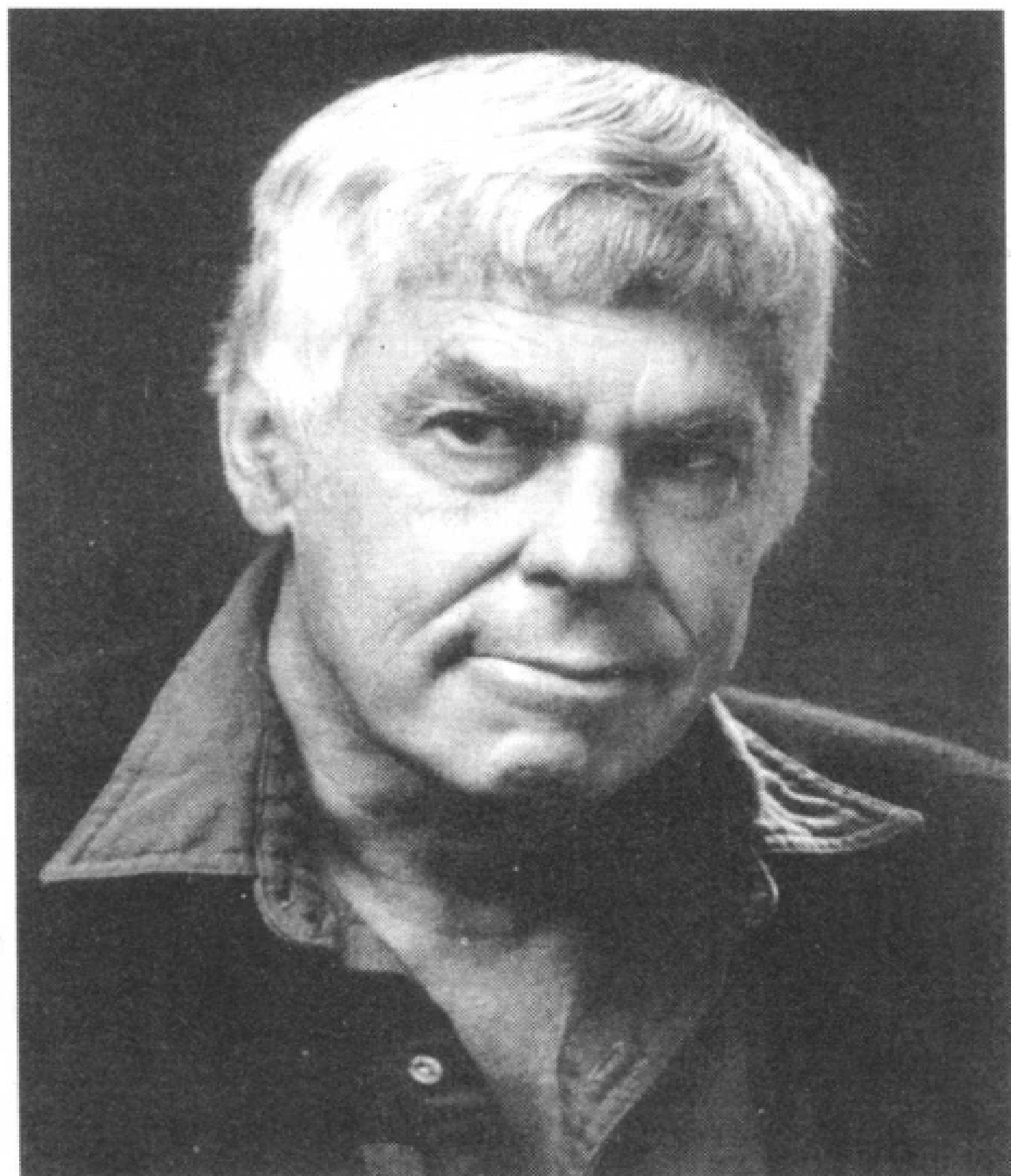


图 2.2 4 个拓扑学中的圆周。

拓扑学家像蚂蚁一样：他趴在圆周上，看到的只是局部结构却没有意识到整个圆周被嵌入到三维空间中。但是，没有端点的圆周和具有两个端点的线段，却被认为是两个不同的拓扑对象。类似地，在第 1 章我们讨论流形时提到的二维球面与二维平面也是不同的。我们可以定义任意维数的球。庞加莱猜想正是关于 n 维球的，它过于专业化以至于我们无法描述，斯梅尔证明了维数大于或等于 5 的情形。四维情形最近刚刚被解决，而三维情形还没有被证明。庞加莱猜想即便不是整个数学领域中一个主要的猜想，也是拓扑学中首要的未解决的猜想。

现在我们回到动力系统的讨论，上面提到的球面猜想只是为了说明数学中不同领域的研究是如何在同一个人的头脑中展开的。事实上，在斯梅尔获奖时，他的兴趣已经不在拓扑学的范畴了。他在早些时候就转向动力系统理论方面并研究映射的迭代问题。斯梅尔认

为这一理论是重要的，不仅因为首回映射在微分方程研究中所起的作用，还因为映射的研究为微分方程的研究提供了一套平行的理论，而从某种意义上讲，映射比微分方程更容易。斯梅尔希望将这两方面的结果互相转化。大体上，他早期在纯粹拓扑学领域的工作使他对于动力学的长远问题有着一个全新的深刻认识。



照片 2.3 斯蒂芬·斯梅尔。[小毕晓普(G. Paul Bishop, Jr.)摄]

1959 年 12 月底，斯梅尔离开他在普林斯顿的临时职位前往巴西，随行的是他的妻子克拉拉(Clara)和两个孩子：两岁半的劳拉(Laura)和六个月的奈特(Nat)。他此行是应佩雪托(Mauricio Peixoto)的邀请到 IMPA(里约热内卢的纯粹与应用数学研究所)开展

第二年的博士后研究工作。佩雪托关于结构稳定性的工作(见第4章)那时还没有广为人知,而 IMPA 的规模也很小,坐落在布达福古郊区一幢很小的旧建筑里。[这些情况在几年后得到了改善,特别是当帕利斯(Jacob Palis)师从斯梅尔学成返回巴西以后。]

斯梅尔的家刚刚安顿在一名因政变失败而逃跑的空军军官留下的公寓里,他就每天早晨带着纸和笔在海滩上散步。他经常去莱梅海滩,它毗邻着有名的卡巴卡巴纳海滩。斯梅尔在 IMPA 的朋友利马(Elon Lima)有时同他在一起。大多数人都不能在公共场合工作,可是斯梅尔发现他能够全神贯注地工作。大西洋的海风和海中的畅游令他充满活力。

那时斯梅尔还不熟悉庞加莱的《新方法》一书,也不知道他行将介入书末提到的同宿栅栏现象。斯梅尔正在研究一个特殊的微分方程。早些时候,他曾提出一个关于结构稳定的或“典型的”微分方程和映射的不动点、周期轨道及其稳定流形与不稳定流形的结构的猜想。(我们将在第4章讨论结构稳定性。)他尤其觉得上述系统在它们的相空间的任何有界区域内只能有有限组周期轨道。如果在一个有限的区域中存在无穷多个周期点,其中的一些必定在某处任意接近地聚集在一起,毫无疑问,系统的任何小的改变都将破坏这样精致的结构。事实上,佩雪托已经就具有二维相空间的微分方程证明了这一点,如图 1.1、图 1.2、图 1.6、图 1.9 和图 1.10 所示。

在这个问题上,麻省理工学院的莱文森(Norman Levinson)建议斯梅尔考察范德波尔方程(van der Pol equation),它描述具有周期变化的输入电压的电路系统的振荡情况。范德波尔方程是以一位在飞利浦电气实验室工作的荷兰物理学家的名字命名的,在某些方面它类似于受到周期扰动的摆方程,如第1章所述,这类方程可以有混沌解。

剑桥大学的卡特赖特 (Mary Cartwright) 和李特尔伍德 (John Littlewood, 1885 ~ 1957) 在第二次世界大战期间一直从事雷达的研制工作, 他们指出范德波尔方程具有无穷多个共存的周期解, 即伯克霍夫所谓的“不连续回复解”。数学与物理学在研究过程中也是相互影响的, 事实上, 在这篇论述数学结果的文章中, 作者清楚地知道他们的结论在一段时间只是依赖于范德波尔和他的同事范德马克 (van der Mark) 关于电路系统的实验证据。后来莱文森简化并且深入地研究了这个问题, 他的文章发表在 1949 年的《数学年刊》上。

现在这是一个例外的方程, 它也可能很特殊; 斯梅尔的猜想可能对于“大部分”情形仍然成立, 但是莱文森认为它会导出反例。实际上, 假如斯梅尔预先知道庞加莱的工作, 他就已经找到反例了。然而由于研究文献过于繁多, 一个人如果阅读所有的相关文献, 他就没有时间进行原创性的研究工作。科学家经常需要在参加各种会议时的非正式谈话和提示来指引他们正确的研究方向。无论如何, 斯梅尔在随后的几年中都会很好地了解《新方法》一书和伯克霍夫的工作。

作为一名拓扑学家, 斯梅尔习惯于通过图形理解数学对象之间的关系。他通过画图丰富自己的直觉, 然后再将它们翻译成严格的分析语言。莱文森的文章实质上是讨论范德波尔方程的庞加莱映射, 但文中几乎没有图形, 这促使斯梅尔像在儿童游戏中一样画各种线条, 将它们拉伸、压缩、弯曲, 然后相交或者重叠这些图形。这并不容易, 然而他乐在其中。

对于科学家来讲, 在遇到困难时处于这样的状态是很常见的。科学研究需要充沛的精力、时间和奉献, 人们不可能在没有热情的情况下长期从事它。一旦在发明的过程中失去了好奇心与快乐, 那必将无功而返。数学的优势就在于它提供了一个永不枯竭的问题来

源，这些问题为人们到达一个持久的、未知的目标架起了桥梁。沿着这条探索之路你会不断欣喜地发现你的未知与已知是一样多的。从这一点来看，一个献身于数学的人和一个虔诚的宗教信徒的感受有着惊人的相似之处。

斯梅尔马蹄*

斯梅尔集中精力研究范德波尔方程中的庞加莱映射的某一特定的部分。他尽力简化和理想化这个模型。在斯梅尔的映射的第一次迭代以后，他得到这样的图形：看起来像是放置在正方形上的一缕卷发。这个正方形代表满足原方程初值条件的点集，而卷发代表正方形在庞加莱映射作用下的象。1960年夏，当斯梅尔在伯克利谈起他构造的映射时，纽沃思(Lee Neuirth)问道：“为什么你要将这幅图画成这样呢？”说着他就在黑板上画了另一幅图。斯梅尔认可了。纽沃思的图形比范德波尔方程中自然出现的图形更为简单明了。斯梅尔主要关心的是微分方程的一般性质，因此他允许对图形做出这种富于美感的修改。他首先沿着水平方向压缩正方形，然后沿着垂直方向拉伸它，最后弯曲所得到的图形并使它与初始的正方形相交，如图2.3。依据这一形状得到了它的名称：马蹄。映射的第二次迭代重复上述步骤：从图形上看就是压缩、拉伸然后弯曲，但此时作用的对象是马蹄型的象。斯梅尔于是得到了图2.4。在本章的末尾(图2.9)，我们将说明斯梅尔的映射是怎样在任一横截同宿点的邻域中产生的。

在本节及随后的两节中我们将深入探讨隐含在马蹄映射(horseshoe map)中的动力学性质。与第1章中类似的专业部分一样，一些读者可能会发现有些讨论和构造难以理解，但我们还是希望

读者们能够尽力跟上，当仅凭想像失败时求助于纸和笔。那些决定略过这些专业部分的读者，可以直接阅读“振荡与革命”一节。

斯梅尔感兴趣的是在迭代下永远保留在正方形中的点构成的集合。这个集合包含所有的周期解和上面提到的回复解。为此，他必须从正方形中排除经过迭代，不仅是第一次迭代，而且是正向或反向的任意次迭代之后，其象落在正方形外面的所有点。在第一次迭代中，正方形中弯曲成“拱形”的那部分落在正方形的外面，因此斯梅尔集中讨论正方形中余下的部分，它们在迭代下的象与原来的正方形重叠或者相交。利用这种方法他可以避免拱形区域中的点的困难分析而重点考虑其中更为简单的拉伸与压缩行为。我们将会发现，上述操作对于所研究的问题会得出足够丰富的结果。

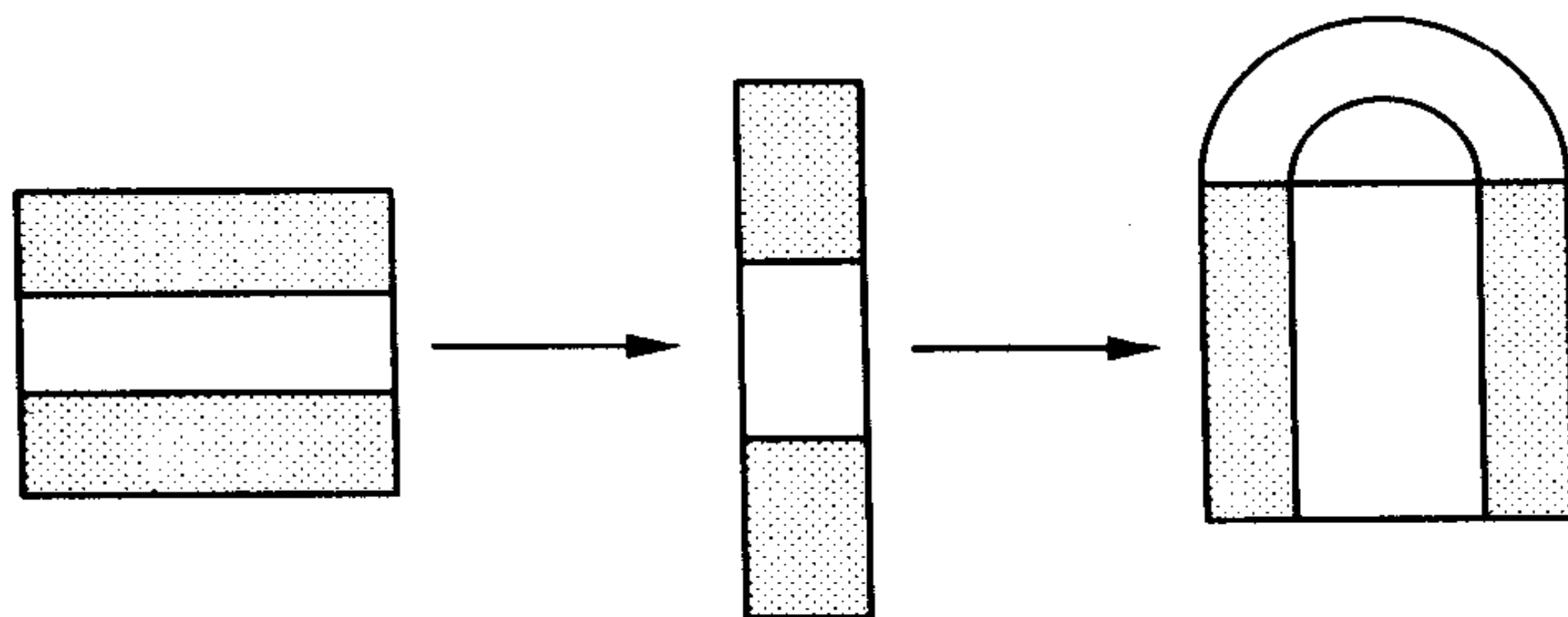


图 2.3 斯梅尔马蹄映射第一次迭代中的压缩、拉伸和弯曲过程。

想像正方形是我们手中的一小块橡皮，可以抓起来、弯曲、放回去，我们发现第一次迭代后的象与初始正方形相交于 2 个垂直条，如图 2.3。第二次迭代的象与正方形相交于 4 个更加狭窄的垂直条，它们依次包含于前边的 2 个垂直条中。（见图 2.4。）

继续进行上述过程，斯梅尔在第三次迭代后获得了新的、更为复杂的象，它与初始正方形相交于 8 个垂直条。所有这 8 个垂直条都

成对地包含在前面 4 个垂直条中，4 个垂直条又分成 2 对分别包含于最初的 2 个垂直条中。重复上述迭代过程，每一步垂直条的数目都增加 1 倍，新产生的垂直条与以往的比起来都更加狭窄。经过 4 步后产生 $16 (= 2^4)$ 个垂直条，经过 5 步后产生 32 个，20 步后产生 $1\,048\,576 (= 2^{20})$ 个垂直条。经过无数步以后，保留在正方形中的点组成了由垂直线段构成的康托尔集 (Cantor set)。而初始正方形经过无数次垂直方向的拉伸和水平方向的压缩后成为一条无限长的线，它无数次缠绕在正方形上。不管我们的铅笔有多细，都无法描绘这一现象，然而可以通过想像导出它的一些性质。

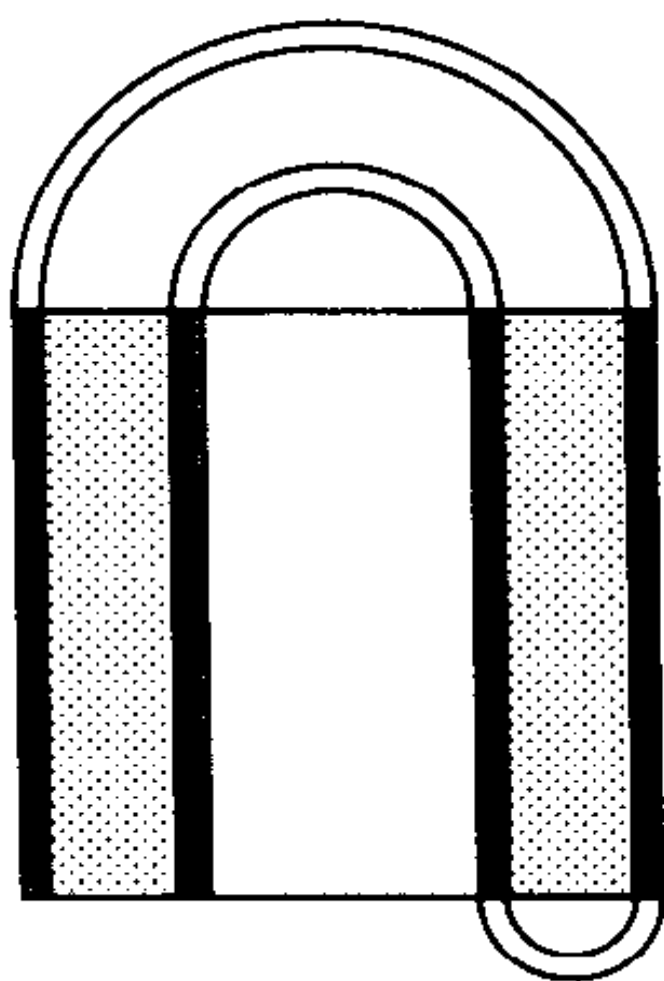


图 2.4 映射的第二次迭代产生一个弯曲的马蹄。

这个奇怪的集合是以康托尔 (Georg Cantor, 1845 ~ 1918) 命名的，他是 19 世纪德国数学家，在探求理解无穷集合间的对应关系时发明了康托尔集。后面我们将更多地谈到集合论，康托尔集在第 3 章中将再次出现。多年来康托尔集被认为是纯粹抽象的构造，但现在通过庞加莱映射和斯梅尔拓扑上的智巧，康托尔集从微分方程中自然产生了。

上述垂直线段组成的无穷集合，是由经过映射的正向迭代以后仍保留在正方形中的所有点组成的。这些点最初在正方形的什么位置

呢？为了回答这个问题，我们必须考虑映射的逆象 (inverse images)，即在微分方程中反转时间的走向。现在正方形被沿着水平方向拉伸并沿着垂直方向压缩，于是得到图 2.5。由垂直线段组成的康托尔集的原象 (pre-image) 本质上是水平线段构成的康托尔集。如果我们在水平线段上选取一个初始点，那么它将来的象在正向迭代下将依然保留在正方形中。

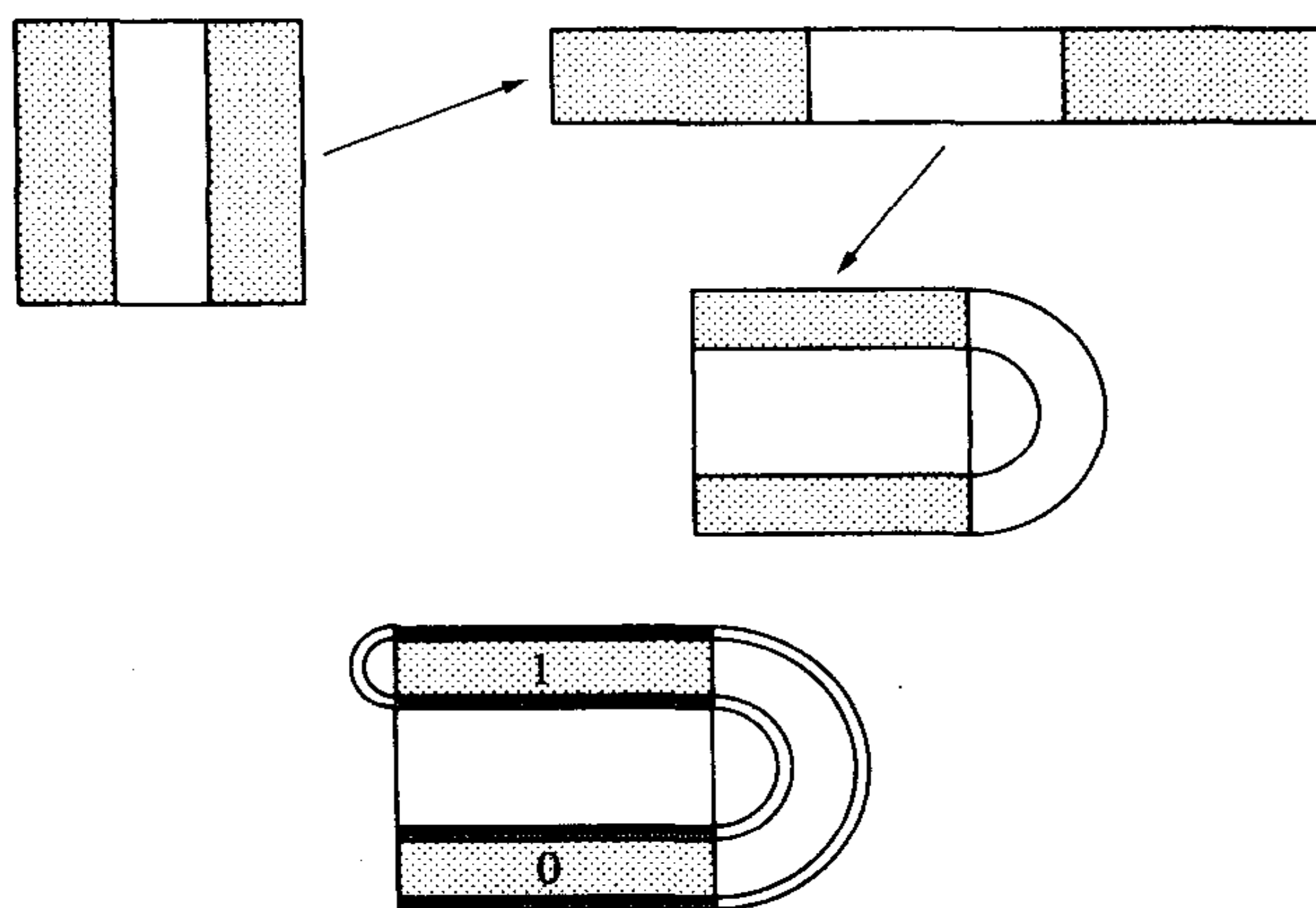


图 2.5 映射的逆迭代。

考虑到斯梅尔关心的是永远保留在正方形中的点，这意味着它们在正向和反向迭代以后都保留在正方形中。如图 2.5 所示，水平线段中间的部分在第一次逆迭代后被映到正方形的外面。我们现在要将这些点以及所有在任意次逆迭代后落在正方形外面的点都去掉。但是这一信息早已隐含在图 2.4 中了！注意到垂直线段构成的康托尔集包含了那些经过任意多次正向迭代后仍保留在正方形中的点，因此这些点恰好就是在反向迭代下从不离开正方形的点。初始正方形中在正向和反向迭代下永远不离开正方形的点，显然就是既属于垂直

线段构成的康托尔集又属于水平线段构成的康托尔集的点。我们记此集合为 Λ 。

为了便于想像 Λ 中的点，首先画出经过一次正向迭代和一次反向迭代保留在正方形中的区域。它是最宽的水平条和垂直条的交集，见图 2.4 和 2.5 中的阴影部分，可以看出它就是初始正方形角落的 4 个小正方形。经过 2 次正向和 2 次反向迭代保留在正方形中的点可以通过将图形中窄一些的水平条、垂直条取交集而得到，于是产生了 16 个小正方形，它们每 4 个分别包含在第一步得到的 4 个小正方形中，如图 2.6 中的深色部分所示。在每一次进一步迭代以后，小正方形的数目都是原来的 4 倍，而它的大小却比原来缩小了，当迭代次数趋于无穷大时，我们就得到了点云 Λ 。图 2.6 说明了上述过程的前 3 步，其中 64 个最小的正方形被涂成黑色。

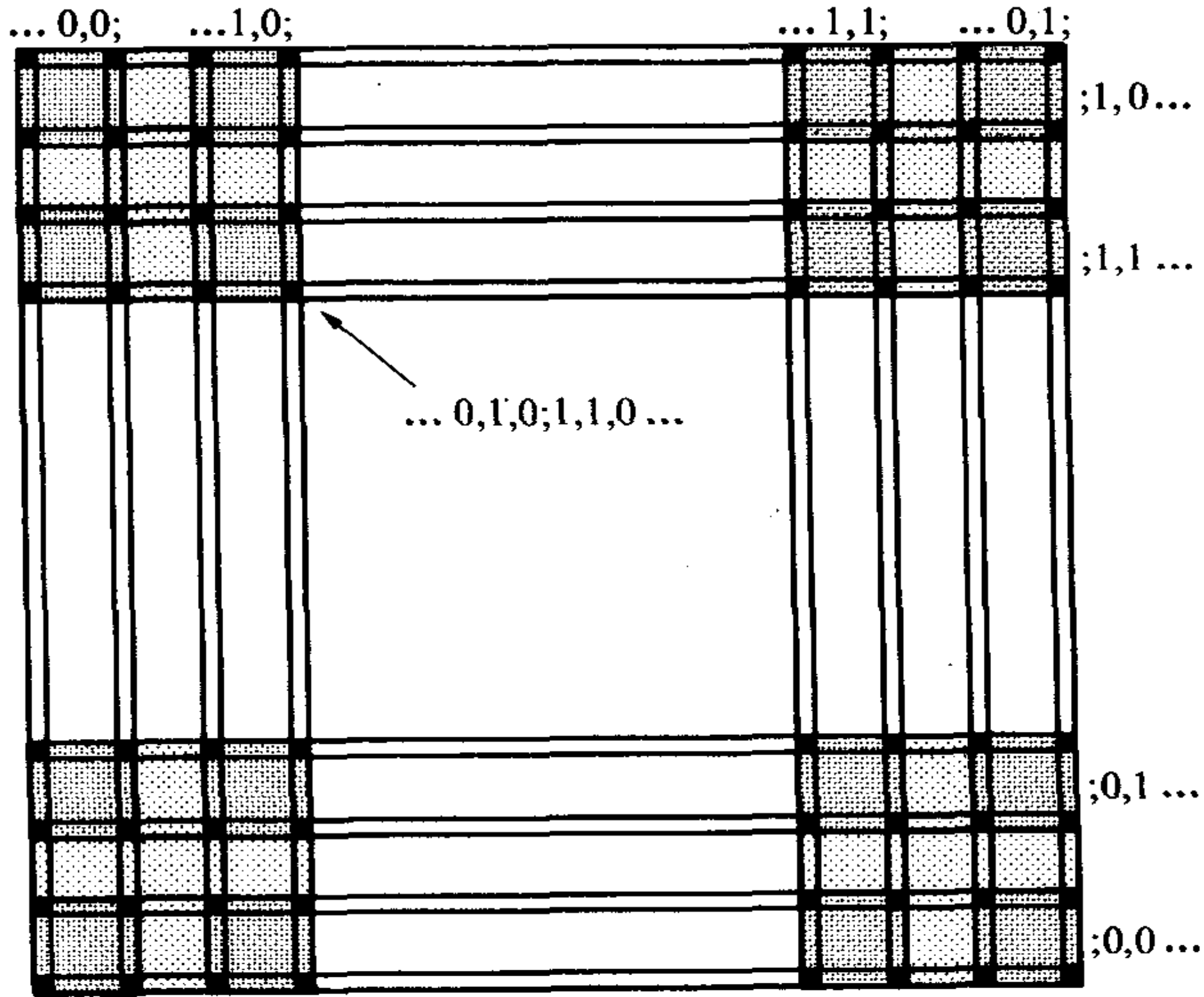


图 2.6 通向点云 Λ 中的点的组成。

我们已经找到一个看似简单的映射，它将正方形弯曲成马蹄然后

叠置在正方形上，从而产生由保留在正方形中的无数个点构成的康托尔集。即使上述映射还不够完美，但其中发生了某些值得注意的现象。斯梅尔意识到他可以将 Λ 中的每一点与一个代码或地址相联系，地址不仅描述该点所在的位置，还说明它在映射的正向或反向迭代后所处的位置。

首先将图 2.5 中两条宽的水平条记为符号 0 和 1。任意选取 Λ 中的点 x 。我们利用一个由 0 和 1 组成的无穷序列确定其地址，这个序列满足如下规则：如果经过 k 次迭代后 x 的象落在水平条 0 中，则记序列的第 k 个位置为 0；如果落在水平条 1 中，则记第 k 个位置为 1。在每次迭代后 x 的象必定落在水平条 0 或 1 中，否则 x 在以后的迭代中就要离开初始正方形从而导致矛盾。上述过程对于逆迭代同样成立：如果 x 在反向迭代 5 次后的象落在水平条 1 中，我们就将序列中 -5 的位置记为 1。因此要想了解一个点在 20 次迭代以后或 30 次迭代以前的位置，只要看一下序列中相应项的值即可。想像我们的双眼固定不动，将上述序列逐格写在电影胶片上，左右移动胶片，就像看电影一样：映射正向迭代一次相当于将写着整个序列的胶片向左移动一个位置；反向迭代一次就向右移动一个位置。通常我们在序列的零位置的左侧用一个分号表示序列的初始点或中心，因此如果假设序列的第 k 项为 a_k ，那么序列的中心部分可以写成 $(\dots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}; a_0, a_1, a_2, \dots)$ 。由于我们讨论的映射和微分方程都是可逆的，因此上述双边无穷序列是必要的。

x 的位置可以通过考虑正向和反向迭代的行为由它的序列导出，图 2.4 和 2.5 能够说明这一点。例如，某点的序列以 $(\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ 为中心段，由于序列的零位置为 1，因此这点必定在上部的水平条 1 中。由图 2.4，该点的第一次迭代落在水平条 1

中，蕴含它本身必然在上部水平条 1 的下方较窄的水平条中，这是因为经过拉伸弯曲后，水平条 1 的上部被映到正方形的下方。但这点的第二次迭代落在下方的水平条 0 中，这意味着一次迭代以前（第一次迭代以后）它落在水平条 1 的上半部。通过多次考虑映射迭代的作用，我们发现这个点属于图 2.6 中从下往上的第 5 个狭窄的水平条。类似的推理揭示出它属于从左往右的第 4 个狭窄的垂直条。图中所示该点所在的小正方形，是用长度为 6 的所有可能的符号序列的中心段作为代码的 64 个小正方形中的一个。理解各个符号地址所处的位置的最好办法，是在纸和彩笔上花一点时间。

这样斯梅尔将他的马蹄映射与作用在无穷符号序列的集合上的移位映射(shift map) σ 联系起来。（移位映射的想法可以追溯到第 1 章曾经提到的伯努利。）事实上，斯梅尔证明在马蹄映射与移位映射之间存在完美的对应：马蹄映射具有移位映射的任何性质，反之亦然。利用这种方法他将马蹄映射的研究简化为研究符号序列的移位映射。我们将会发现，它不只是一种巧妙的对应，而是代表着真正的进步。

数学家经常通过说明他们正在解决的问题与别人已经解决的另一问题本质上是同一问题而取得进展。（实际上这不是欺骗行为：经常要有大量的工作去证明这种对应性！）这在前面讨论的情形中是非常有用的，因为移位映射的性质是人们所熟知的，它们属于符号动力学(symbolic dynamics)的理论范畴。但是这一点并不是值得我们高兴的唯一原因，移位映射关键的性质是它的混沌特征。我们将简要解释一下其中的含义，然后给出混沌的精确的定义。这样做是至关重要的，因为在过去的 10~20 年间，不仅非专业人士，甚至数学家和其他科学家都在误用和滥用混沌概念。许多不规则的或无序的现

象，仅仅由于它们不是定常的、不是周期的或者不具有其他好的容易理解的性质，就被描述成混沌的(chaotic)。尽管我们可以按照自己的喜好来称谓一事物，但是给予几百种不同的对象以同样的名称只能导致混乱。

在一个迅猛发展、杂乱无章的新领域中，迅速有效地建立精确的术语是很困难的。人们常常不知道哪些公理和定义会引出最有用的结果。然而，混沌(chaos)被误用的主要原因可能并不在于此，而是因为混沌一词具有许多令人感兴趣的奇特含意。“混沌理论”(chaos theory)被形容为“一门新科学”和其他许多过分的称谓。突变理论(catastrophe theory)也有过类似的情况，直到人们找到它在科学中更为恰当的位置和价值。当混沌一词至今仍然令人着迷时，它已经开始丧失某些缺乏科学基础的含义了。现在一些基金会不再盲目地争夺对混沌项目的资助，应该是人们坐下来重新思考这一术语的时候了。对于数学家来讲，最好离开混沌的夸张的不切实际的描述，仅保留其严格的有着深刻基础的内涵，而物理学家和其他应用科学家将在实际应用中继续检验他们得到的新的定义和结果。正是通过这种方式，今日被许许多多数学以外的科学家用作工具的微积分和概率论才发展起来。真正的混沌理论也应该沿着类似的途径发展。那时，我们更愿意使用不常见的没有引起人们注意的术语：动力系统理论。

符号上的移位*

符号动力学大约产生于20世纪初阿达马的工作中。30年代莫尔斯和赫德隆(Gustav Arnold Hedlund)进一步发展了符号动力学并将它应用于变分学和微分几何中。符号动力学在动力系统理论和数学中的其他领域的发展中起着非常重要的作用。这里讲述的仅限于与

斯梅尔马蹄有着直接关系的移位映射的那些性质，尽管乍一看我们似乎远离了动力系统的范畴。首先请读者将符号动力学看作是一种数学游戏，后面我们会将它与马蹄和混沌联系起来。

记 Σ 为由 0 和 1 构成的所有可能的无穷序列的集合。第一个问题是：“如何测度 Σ 中两个元素的距离？”假设 $(\dots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$ 和 $(\dots, r_{-2}, r_{-1}; r_0, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots)$ 是两个此种序列，对于所有整数 n ，序列中的元素 s_n 和 r_n 取 0 或 1。两个序列相等，当且仅当 $\dots, s_{-2} = r_{-2}, s_{-1} = r_{-1}; s_0 = r_0, s_1 = r_1, s_2 = r_2, \dots, s_n = r_n, \dots$ ，即两个序列中相应的项都相等。如果两个序列中间一段的符号相同（对于 $-N$ 和 N 之间的所有整数 j ，有 $s_j = r_j$ ），这两个序列就被认为是接近的。两个序列中间一段相同的项数越多（ N 越大），它们就越接近。例如，序列

$(\dots, 0, 1, 0, 1, 1; 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$

和

$(\dots, 0, 1, 0, 1, 1; 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$

之间的距离，比序列

$(\dots, 0, 1, 0, 0, 0; 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$

和

$(\dots, 0, 1, 1, 0, 0; 1, 1, 0, 1, 1, \dots)$

之间的距离要小。在前面一对序列中，中间的 6 项是一致的，而在后面的一对序列中只有中间的 4 项是一致的。

下一个问题是：“什么是周期序列？”周期序列是指由有限个元素组成的符号段无限次地重复自身所得到的序列。例如，序列 $(\dots, 1, 1, 0, 1, 1, 0; 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ 中每两个 1 的后面总是 0，它就是一个周期序列。在向左移动 3 个位置以后序列又变成

了它本身。此序列的周期就是 3。同理，序列 $(\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, \dots)$ 的周期是 5。运用这种方法我们可以构造集合 Σ 中的无穷多个周期序列。

容易看出移位映射 σ 作用在周期序列上会产生一条周期轨道。例如，选取序列

$$S_0 = (\dots, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

移位映射 σ 作用在 S_0 上，第一次迭代产生序列

$$S_1 = (\dots, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$

(请注意向左移位和将序列中间的分号向右移动一位是一致的。) σ 的第二次迭代产生序列 $(\dots, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ ，即 S_0 ，第三次迭代再次产生 S_1 ，以此类推。序列 S_0 和 S_1 在 σ 的每次迭代下交替出现，从而产生一条周期轨道。用这种方法我们还发现了移位映射 σ 的周期轨道的含义。不考虑与电影的类比，我们考虑一台设有环形旋转器的滑动幻灯机，在放映完一套邻舍的度假生活图片以后，镜头又回到起点，重复放映所有的图片。通常任何一个序列在移位映射作用下的轨道是由最初的序列向左或向右移动若干次得到的所有序列组成的集合。对于周期序列来讲，轨道是一个有限的集合，比如前面介绍的由 S_0 和 S_1 构成的集合。但我们下面会发现，“大多数”序列的轨道都是无限的集合。幻灯机上放映的图片永远不会重复。

为了了解如此简单的符号机器如何产生混沌，假定我们反复投掷一枚硬币，每次投掷都记录下硬币的正面或背面。将硬币的正面记为 0，背面记为 1，我们就得到一串由 0 和 1 组成的随机序列。但是这个序列和任何用类似的方法产生的随机序列都属于 Σ ，从而 Σ 不仅包含所有的周期序列，还包含随机选取的许多序列。因此 Σ 中含有

永不重复但混乱地(chaotically)变化的轨道。

最后一个需要澄清的概念是稠密性(density)。它并不容易去想像。我们从一个几何的例子出发,考虑描绘在一张纸 $\mathcal{P}$ 上的曲线 $\mathcal{C}$ 。在曲线 $\mathcal{C}$ 的四周一般会留有大量的“空白”,从而 $\mathcal{P}$ 上的许多点都不与 $\mathcal{C}$ 接近,但是事实上人们可以(在理论上)构造一条曲线,使它与纸面上的所有点都任意地接近。此时我们称曲线 $\mathcal{C}$ 在纸面 $\mathcal{P}$ 中是稠密的。这样的曲线 $\mathcal{C}$ 必须以某种方式在 $\mathcal{P}$ 中几乎所有点的周围盘绕。(你能够想像这是如何发生的吗?在第5章我们将给出环和环面上这种曲线的例子。)类似地,我们称移位映射 σ 的轨道在集合 Σ 中是稠密的,如果对于集合 Σ 中任何给定的序列,这条轨道都包含与所给定的序列任意接近的点。沿着这条稠密的轨道,人们可以任意接近 Σ 中的每一个元素。

集合论是数学的一个分支,它处理的是对象或者元素的总体,称为集合,并且在不考虑元素的本质的情况下,试图建立关于集合的真值。当集合论在“新数学”泛滥时企图将自己强加给一群无辜孩子的时候,它得到了一个坏名声。然而,集合论中稠密性的理论推广了上面描述的性质,它揭示了这个概念的其他方面,因此我们进入这一抽象世界的努力是值得的。

σ 的轨道和曲线 $\mathcal{C}$ 都可以看作是分别包含在更大的集合 Σ 和 $\mathcal{P}$ 中的集合。粗略地讲,一个集合在另一个集合中稠密是指前者的元素能够充分好地接近后者的元素。对于第二个集合中的任意一个元素,人们能够找到第一个集合中的元素与它任意地接近。经典的例子是有理数集,它包含于全体实数构成的集合。有理数集由所有能够写成分数的数组成: $1/3$, $4/7$, $2/5$ 等。但是有理数并不包括所有可能的实数,其余的实数是由无理数构成的,它包含所有不能写成分数

的数： $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-1$, π 等。（希腊数学家能够认识到无理数的存在是一个伟大的成就。）有理数集在实数集中稠密，意味着任何实数都可以被有理数任意地逼近。例如 $\sqrt{2}$ 能够近似地写成 $1.41 = 141/100$ ，稍好的逼近是 $1.4142 = 14142/10000$ ，更好的逼近是 $1.414214 = 1414214/1000000$ 。这个逼近的数列可以无限制地继续写下去，每一项都比前一项更加精确。因此有理数在实数中稠密。如图 2.7，我们可以在实数轴上描绘有理数序列逼近并趋于一个实数的情形。

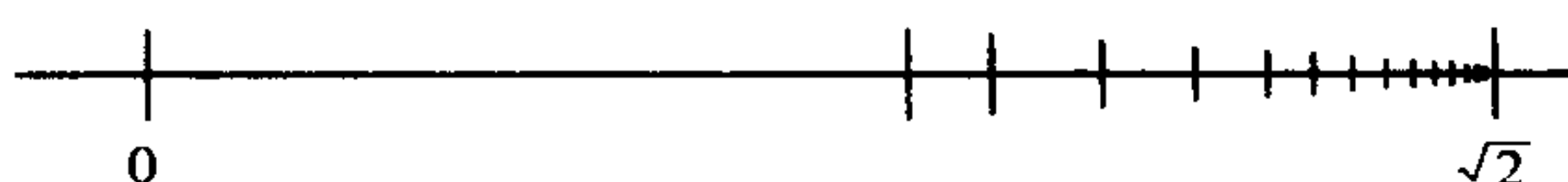


图 2.7 逼近 $\sqrt{2}$ 的有理数。

混沌的符号*

现在我们将用严格的数学语言重新描述混沌。尽管并不是所有的人都接受混沌映射 (chaotic map) 的数学定义，但大多数专家都认为混沌可以用下述性质去刻画：

- (1) 对初值条件的敏感依赖性，
- (2) 至少存在一条稠密的轨道，
- (3) 周期轨道组成的集合的稠密性。

这些性质不是独立的，在某些情形中(1)和(2)蕴含(3)。

上面我们按照其实际重要性顺序列举了混沌的性质，但是按照相反的次序更容易理解这些性质的含义。从周期轨道集合的稠密性出发，我们能够说明移位映射满足所有的性质。按照前面给出的序列之间距离的定义，很容易产生与给定的序列任意地接近的周期轨道（序列）。假设给定序列 $S = (\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \dots)$ ，并考虑周期序列 $T = (\dots, s_{-1}, s_0, s_{-1}; s_0, s_{-1},$

$s_0, \dots$), 两个序列中间的两项相同。周期序列 $R = (\dots, s_0, s_1, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_{-2}, s_{-1}, \dots)$ 提供了更好的近似, 它与给定的序列中间的 4 项完全相同。想法是显然的: 每次都从给定序列的中间选取长度为 $2n$ 的符号段放在需要构造的周期序列中间的同样位置上, 然后沿着正、负两个方向无限次地重复该符号段就得到一个周期序列。 n 越大, 它就越接近于给定的序列。我们关于 n 的选取是有限制的, 只要它是有限的即可。这就证明了移位映射满足性质(3)中的稠密性。

下一步建立单个稠密轨道的存在性。我们需要构造一个符号序列, 使得它在移位映射作用下的轨道包含与 Σ 中的每一个元素任意地接近的序列。定义符号序列 S^* 如下,

$$S^* = (\dots, \underbrace{0, 1}_{1 \text{ 段}}, \underbrace{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1}_{2 \text{ 段}}, \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 1}_{3 \text{ 段}}, \dots, \dots).$$

S^* 是这样构造的: 首先, 写出长度为 1 的所有可能的符号段, 即 0 和 1。接着写出长度为 2 的所有符号段: 0, 0; 接着是 0, 1; 然后是 1, 0 和 1, 1。继续以上的步骤写出长度为 3 和 4 的所有符号段, 依此方法一直写下去, 写出的序列将包含所有长度有限的序列。此时所得到的无穷序列还有一个起始点, 为使它在正、负两个方向上都是无穷的, 我们只需将得到的右半截序列翻转过来粘贴在它的左端, 所得到的双边无穷序列包含了任意(有限)长度的所有可能的符号段(子列)。

略加思考就会发现上述序列正是我们要寻找的序列。事实上, 由于移位映射的迭代等价于将序列向左平移, 右端远处的符号段会逐渐来到序列的中央, 又因为 S^* 包含了所有的有限序列, 所以 σ 的若干次迭代作用在 S^* 上将产生在我们希望的许多中央项上与任一给定

序列一致的序列。这就证明了，对于 Σ 中任何给定的序列，存在着 S^* 在 σ 下的迭代，它与给定序列任意地接近。于是我们证明了性质(2)成立。

我们最终接近了混沌行为最重要的特征或征兆：对初值条件的敏感依赖性。这在许多人的眼中是混沌的核心。它究竟意味着什么呢？回忆第1章中陈述的微分方程的解关于初值条件的连续依赖性，它指的是从相近的点出发的轨道会在一段时间内保持相近。我们考虑的所有系统都满足这个条件。同时我们还引进一个类似的概念：稳定性，它要求从相近的点出发的轨道永远保持相近。对初值条件的敏感依赖性并不与连续性发生矛盾，但它与稳定性是完全对立的。我们只能保证在很短的时间区间中轨道从相近的点出发并保持相近。为了使两条轨道保持相近的时间持续得更长，我们就需要解的初值条件更加靠近。

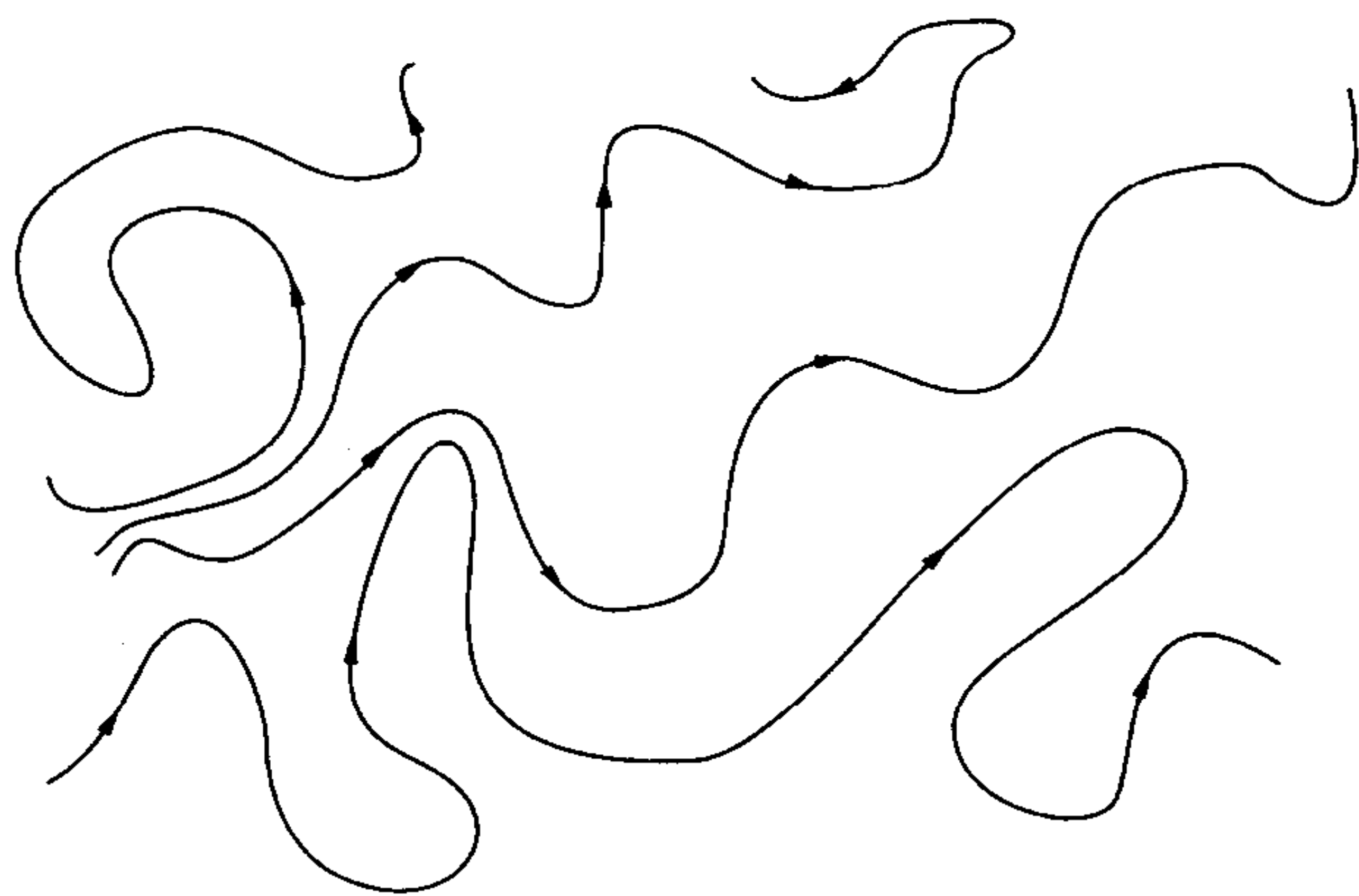


图 2.8 对初值条件的敏感依赖性。

但是如果敏感依赖性是普遍的行为，那么对于几乎所有的轨道上述的时间区间都是很短的。经过一段时间以后，方程的解相互分开

并且具有非常不同的动力行为。图 2.8 中的一些曲线最初非常靠近，但是后来它们迅速地分开。回想一下图 1.6c，相空间中包含一个鞍点，它的不稳定分界线使其邻域内的轨道相互分开。事实上，这就是产生斯梅尔马蹄时的情形：无穷多条周期轨道都是鞍型的。

麦克斯韦(James Clerk Maxwell)早已理解或至少部分理解了，解对初值条件的敏感依赖性。这位著名的苏格兰数学家和物理学家在 1873 年写的一篇文章中指出，当微小的扰动导致宏观的变化时，对未来事件的预测就是不可能的。敏感依赖性在数学上用来表述高度不稳定和不可重复的系统行为特征的一种严格的方法。它的内涵是很难理解的。事实上，麦克斯韦的论断是在剑桥大学关于自由意志(free will)与决定论(determinism)的一场大辩论中发表的。30 年后，庞加莱在《科学与方法》一书中回应了这些思想。

我们在日常生活中都会遇到敏感依赖性。许多人都知道如果他们在早晨合适的时间从家里出发，那么公路上不会塞车，他们能够按时到达工作场所。但是如果他们仅仅比平常晚走 5 分钟，交通堵塞就会使他们多花费半个小时。初值条件的微小变化导致了出行时间的很大变化。

今天，敏感依赖性的另一个经典的例子是“蝴蝶效应”。1972 年，气象学家洛伦茨(Edward Lorenz)在美国科学促进会上发表演说，题目是“可预测性：巴西蝴蝶的振翅能否引起得克萨斯的龙卷风？”当然，他不是认为蝴蝶的微弱力量能够直接导致一场龙卷风，而是发现了与气候环境相关的内禀不稳定性(更精确地讲，是作为大气模型的微分方程的不稳定性)，它将微小的因(cause)放大为很大的果(effect)。

不难看出移位映射具有敏感依赖性。假设两个序列 S 和 R 充分

靠近, 即对于充分大的整数 n , 它们中间 $2n$ 项都相同。然而 S 和 R 在 σ 的 n 次迭代以后可能相互远离对方, 这是因为它们的第 $n+1$ 项 [和 $-(n+1)$ 项] 有可能不相同。例如, $S = (\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$, $R = (\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$, 它们的中间 4 项相同。经过两次迭代以后, S 变为 $(\dots, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \dots)$, R 变为 $(\dots, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, \dots)$ 。移位后的序列在第 0 个位置的值是不同的。 S 和 R 之间的距离比较近, 但是在 σ 的两次迭代以后就已使得两序列相互分开。这样就证明了性质(1): 移位映射对初值条件的敏感依赖性。因此, 我们证明了移位映射按照我们给出的精确定义是混沌的。

我们曾经指出斯梅尔证明了作用于康托尔集 Λ 上的点的马蹄映射与作用在符号空间 Σ 上的序列的移位映射之间存在“完美的对应”。在拓扑学中, 这种完美的对应指的是同胚, 即连续的一对一的变换。斯梅尔证明 Σ 中的每一个元素都与 Λ 中的一个点相对应, 反之亦然。为此首先选取长度的有限序列——比如长度为 6, 说明它与我们上面讨论的图 2.6 中的 $2^6 = 64$ 个小正方形中的一个相对应。然后不断增加序列的长度 n , 由于 n 在趋于无穷大时相应的小正方形收缩为一个点, 因此斯梅尔给出 Σ 中的符号序列与 Λ 中的点的一一对应关系。为了证明连续性, 斯梅尔需要说明 Λ 中邻近的点对应于 Σ 中邻近的符号序列。但这个性质隐含在序列作为表示点的“地址”或位置的定义中: 例如, 所有以 $(\dots, 0, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$ 为中间段的符号序列表示的点都在图 2.6 中被该序列所标记的正方形内; 这个正方形里面含有 4 个更小的正方形, 所有以 $(\dots, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, \dots)$ 为中间段的符号序列表示的点则包含在其中一个更小的

正方形中，如此等等。

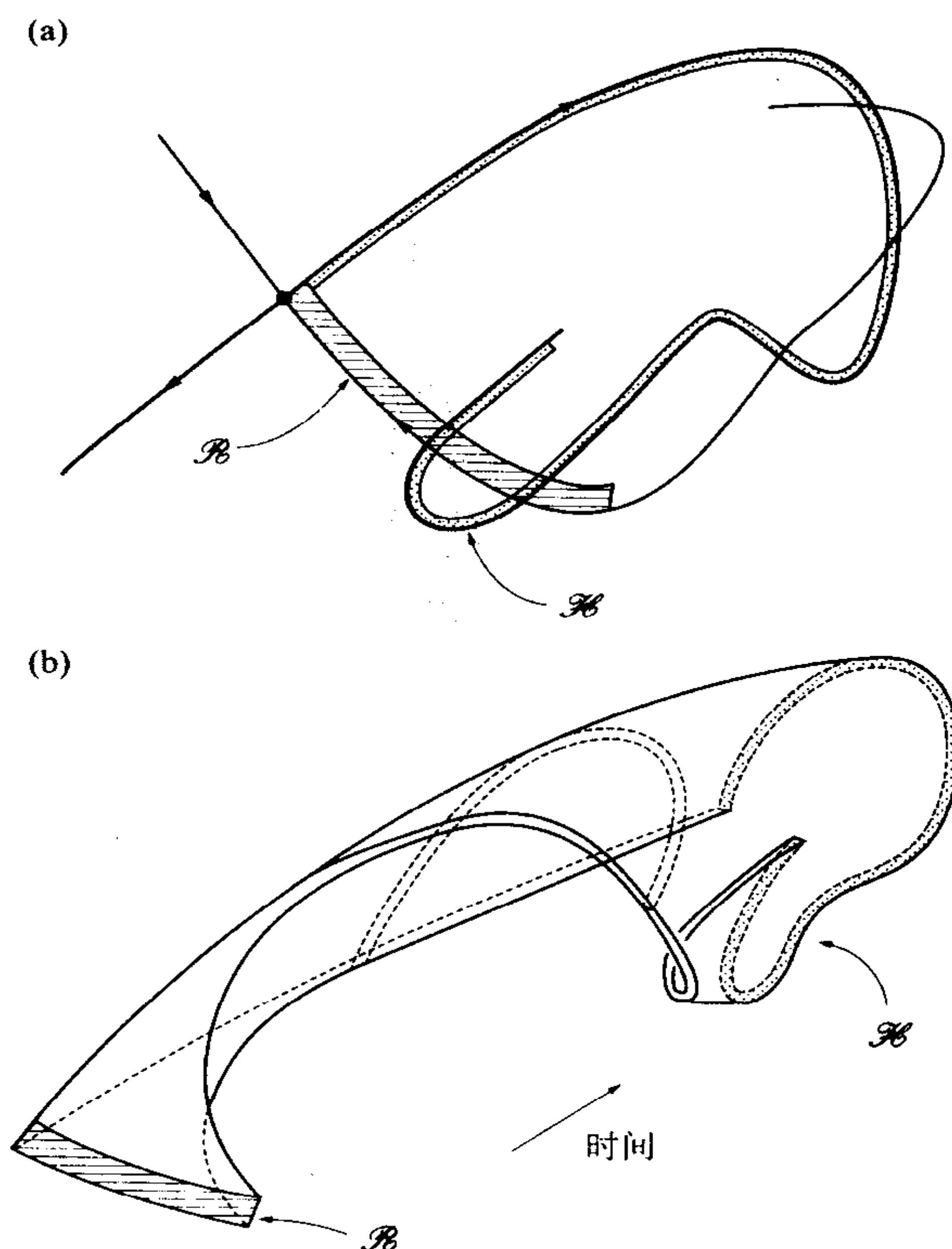


图 2.9 横截同宿点蕴含马蹄：(a)映射的情形，(b)微分方程的情形。

斯梅尔在动力系统领域做出的一个重要贡献，就是将马蹄和移位映射联系起来。类似地，我们可以建立横截同宿轨道附近的庞加莱映射与马蹄映射之间的联系。图 2.9 显示图 1.14 中的映射在经过充分多次迭代以后，一个狭窄的矩形 $\mathcal{R}$ 如何被拉伸、压缩和弯曲成马蹄形 $\mathcal{H}$ 。它揭示出马蹄映射、同宿轨道附近的庞加莱映射和移位映射实质上是用不同的方法描述同一种现象：混沌。在图 2.9 中我们还描绘了在具有三维相空间的微分方程中，马蹄如何随着流的挤压和拉

伸而产生，就像面包师揉生面团一样。人类的智慧大约需要四分之三个世纪才将分析表述、几何表述和符号表述的思想联系起来，并运用自如地将它们相互转化。从数学的观点来看，最易于理解和处理的无疑是移位映射，事实上，我们很容易导出移位映射的性质，比如上面讲述的那些性质，并且推理是如此清晰易懂以至于混沌这一名称看起来似乎是毫无根据的。这说明符号动力学和数学通常具备超凡的能力，将表面上不同的各种思想联系起来并指出其内在的同一性。

这样，斯梅尔在 20 世纪 60 年代获得的结果继续揭示了 19 世纪末庞加莱为之奋斗的同宿栅栏问题的奥秘。描述同宿栅栏的完整结果，最近被表述为庞加莱-伯克霍夫-斯梅尔定理。它已经成为非线性动力学研究中的一块基石。

作为这篇故事的注记，我们饶有兴趣地指出，斯梅尔 60 年后的工作同庞加莱的工作一样，在发表前被耽搁了。尽管 1960 年斯梅尔在 IMPA 工作期间已经发现马蹄并应用了符号动力学，但直到 1961 年底他才将阐述以上思想的论文付诸写作。其间斯梅尔首先撰写了他早期感兴趣的微分拓扑方面的几篇论文。斯梅尔这篇描述同宿栅栏的论文的题目很普通，“具有许多周期点的微分同胚”，它于 1965 年才发表在微分和组合拓扑的文集中，或许没有几位动力系统专家阅读过它。

振荡与革命

在庞加莱和斯梅尔两个时代之间，动力系统领域最杰出的数学家是伯克霍夫。到哈佛以后，他继续钻研比不动点问题更为困难的问题。他成为研究庞加莱在动力系统方面工作的专家，试图解开他的前驱者未能解决的最困难的问题，其中包括首回映射不动点的稳定流

形和不稳定流形横截相交附近发生的有趣现象。如第1章所述，庞加莱认识到这种情形将导致同宿栅栏，但是他在《天体力学新方法》中承认，他还不能把它画出来或者描述它的性质。

1927年伯克霍夫出版了他的名著《动力系统》。我们曾经提到，他在书中证明，在横截同宿点的任何邻域中，都存在无穷多条周期轨道。在后来由斯梅尔发展的符号描述中，这些周期轨道只是对应于周期序列构成的无穷集合的一部分。相关的书籍和论文，包括本书第二作者编写的教材，都将关于同宿栅栏的结果归纳为斯梅尔-伯克霍夫定理。然而去掉庞加莱的名字就像仅仅称赞果实而挖掉树木的根一样。一些较新的文献称此结果为“庞加莱-斯梅尔定理”。我们却认为，该定理中包含这三个人的名字似乎较为公允。

伯克霍夫确实在这个问题上做出比大多数动力系统理论家所认识到的更大的贡献。1935年他出版了另一本专著《关于动力系统的新研究》。在第4章他研究了不变流形横截相交的进一步结果。然而，这本书或多或少地被他的前一本书所掩盖，几乎没有人阅读它。斯梅尔事实上重新发现并且阐述了伯克霍夫后一部著作中的许多结果。

上述事实并不能抹杀斯梅尔关于这个主题的非凡洞察力。通过正确选择形式化与符号动力学“语言”这些装备，斯梅尔能够比他的前辈走得更远。马蹄的发现主要归功于斯梅尔，尽管在伯克霍夫的文章中可以看出一些隐含的思想和寻找符号语言的尝试，但是后者缺乏合适的(数学)语言去完整地描述马蹄。

符号动力学远比这里提到的特殊应用有更广泛的用途。现在我们举出它直接应用于三体问题的一个例子，毕竟三体问题是庞加莱最初感兴趣的问题。很长一段时间以来，天体力学的研究工作者都在

寻求一种被称为振荡解的例子，即一条轨道几乎逃逸到无穷远处，但它却连续不断地返回。很容易构造这样的函数：图 2.10 所示就是这样的函数。我们只要在每一步将振幅放大即可造成振荡。由于这个函数可以不断重复地取得很小的与任意大的值，因此在时间趋向于无穷时它没有极限。通俗地讲，人们不能确定函数最终的取值。当然，我们可以按照自己的喜好绘制这样的函数，但问题是：三体问题中是否存在具有如此杂乱行为的轨道？

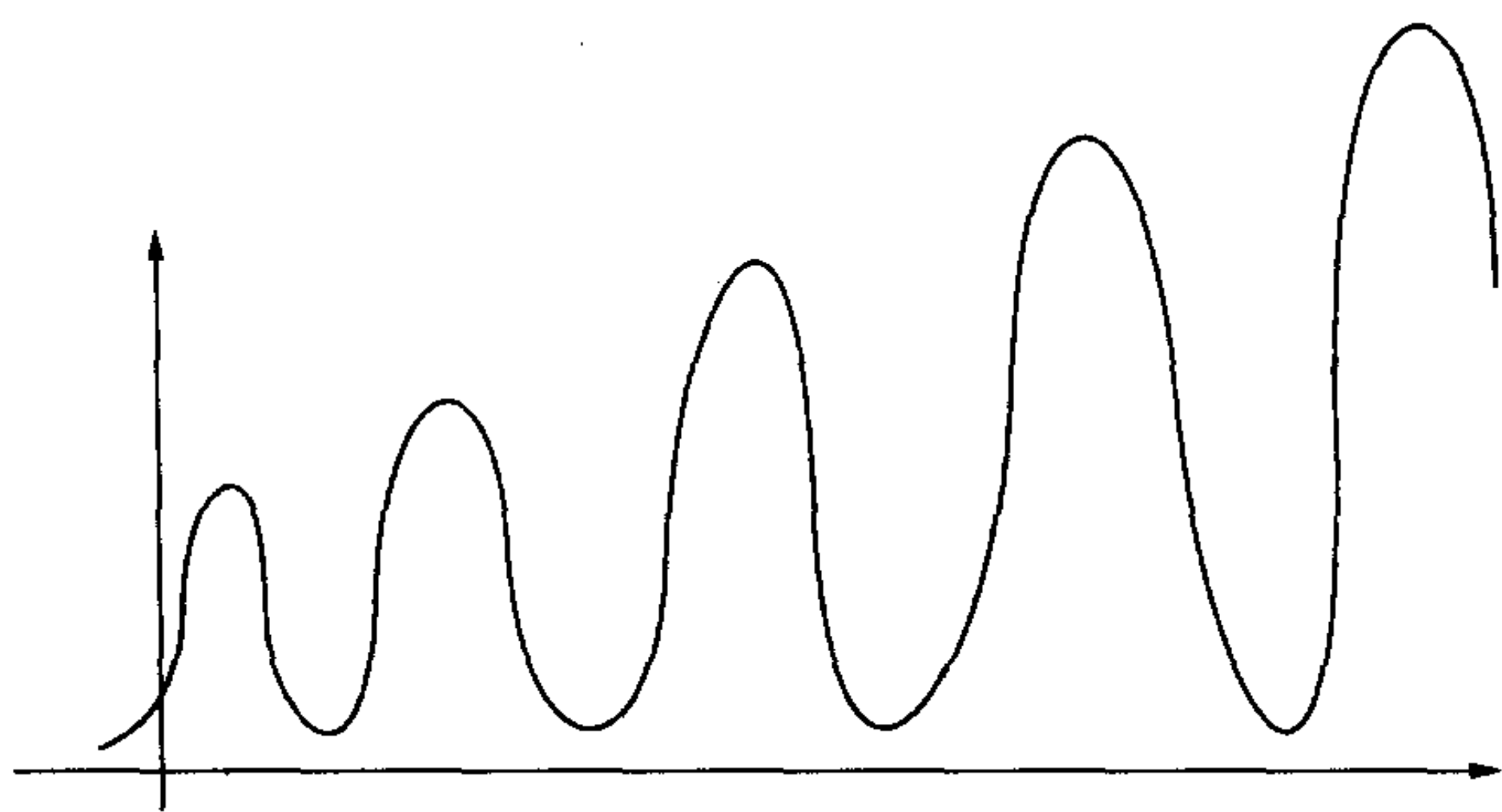


图 2.10 一个振荡函数。

上述问题可能看起来可笑，但是它的解答在 n 体问题解的渐近行为的分类中被证明是非常重要的。下一章我们将深入探索这个问题。每门学科都试图组织和分类它所包含的知识，数学也不例外。微分方程解的渐近行为（即系统在很长时间以后发生的行为）只能进行理论性的研究。计算机不可能无限次地跟踪轨道，只有纯粹的理论思考才能使我们达到最终目的。天体力学家想要了解这样振荡的野兽是否会存在于他们已经发现的那类驯服的规则解的周围。

1961 年，俄罗斯数学家西特尼科夫(K. Sitnikov)证明这种解确实存在。尽管西特尼科夫那时从事拓扑学的研究，并且不是柯尔莫哥洛夫(我们将在第 5 章碰到他)的学生。但他或许从柯尔莫哥洛夫处

听说了这个问题，他考虑具有相同质量的质点 A 和 B ，称它们为主对，它们按照开普勒定律在平面上彼此以椭圆轨道运动。然后选取质量非常小的第三个质点 C ，它的质量充分小，使得由其产生的引力场不影响 A 和 B 的运动。如图 2.11，选取适当的初值条件使得 C 永远保留在直线 l 上，其中 l 是一条与主对运动的平面正交的直线并且经过主对的质心。此时 A 和 B 作用在 C 上的引力的水平分量恰好抵消，于是 C 只能在那条垂直线上上下下移动。这是限制性三体问题的另外一种变形，它不同于庞加莱研究过的情形（所有三个物体都保持在同一平面上，见图 1.8）。

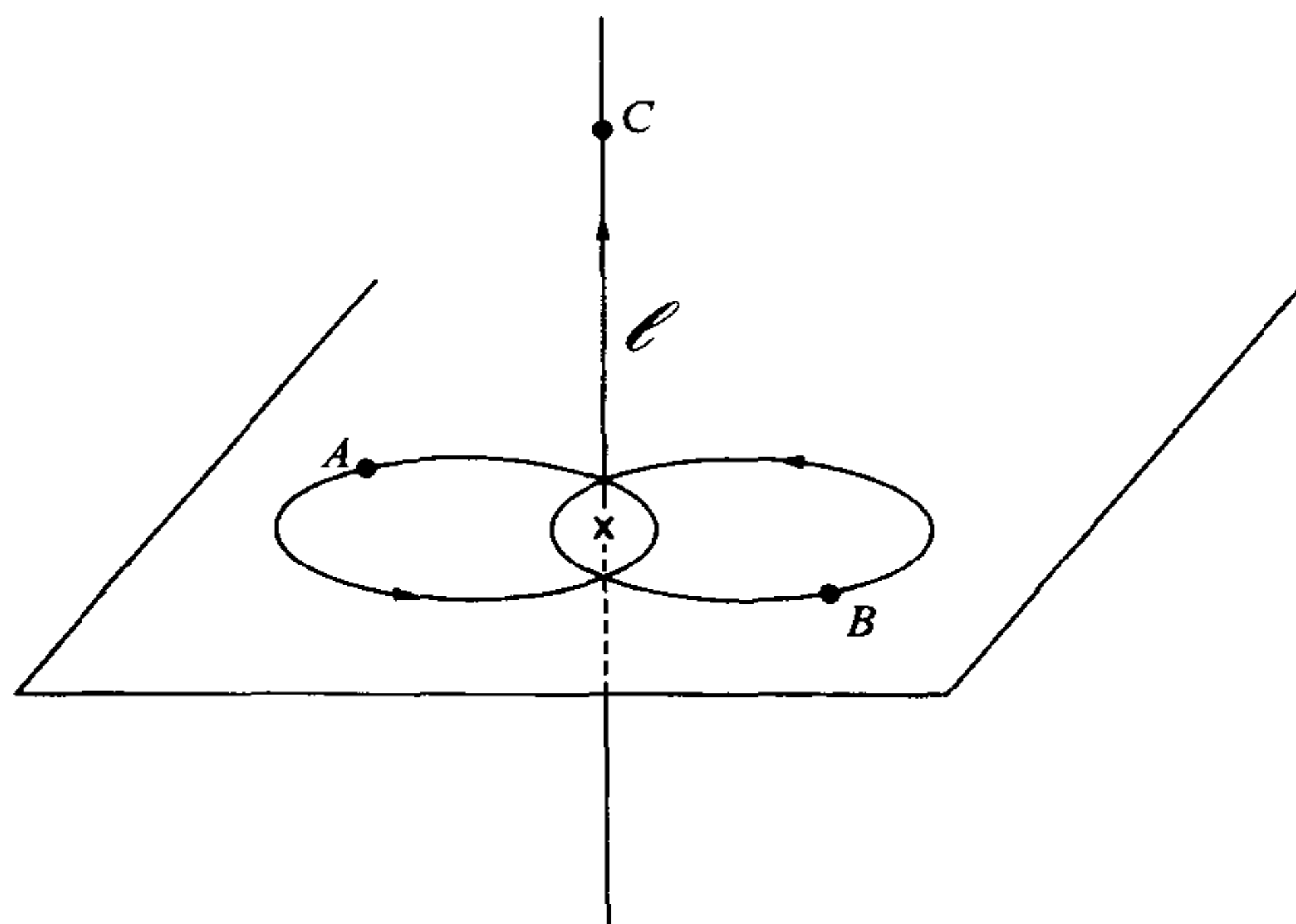


图 2.11 西特尼科夫问题。

西特尼科夫证明，对于适当的初值条件，系统中的质点 C 首先在主对所在平面的上方运动，然后向下方运动，每次振荡都会增加它与主对所在平面的距离。每当 C 通过主对所在的平面时，它都会从 A 和 B 的运动中获取一小部分能量的增量，从而在每次被拉回来以前可以走得更远一些。自始至终，主对都未受干扰地沿着固定的椭圆轨道运动，并且为质点 C 上下趋于无界的振荡提供了能量的无穷

源泉。然而， C 每次振荡都会返回主对所在的平面，因此它的运动在无限长的时间以后没有极限。

几年后，柯尔莫哥洛夫的学生，另外一位俄罗斯数学家阿列克谢耶夫(V. M. Alekseev)重新回到西特尼科夫的例子上来，利用符号动力学的方法，根据人们选取不同的初值条件，证明此问题中任何种类的解都有可能产生。进一步，他证明上述结论对于具有有限质量的质点 C 来讲仍然成立。这里任何种类的解，意味着解的集合与由任何自然数(不像马蹄中那样仅限于 0 和 1)构成的无穷符号序列的集合形成一一对应关系。阿列克谢耶夫究竟是怎样做的呢？

他的思想是简单的。计算一下质点 C 在相继两次通过 A 和 B 所在的平面的过程中主对旋转的圈数。然后通过给序列的每一个元素安排相应的数构造双边无穷序列。例如，选取序列 $(\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) = (\dots, 5, 3; 2, 7, 1, \dots)$ 。现在 s_0 处的值为 2，因此在 C 第一次通过平面时主对已旋转 2 圈。由于 s_1 处相应值为 7，于是主对在 C 第一次和第二次通过平面之间共旋转 7 圈。按照同样的方法， C 在第二次和第三次通过平面时主对旋转 1 圈，以此类推。我们在时间的负向采取类似的方法，可以看出 C 在上一次与当前通过平面之间主对共旋转了 3 圈。由于 A 和 B 的轨道周期不变，我们将任意整数放到符号序列中就意味着 C 的振幅可以任意大。建立主对的旋转与 C 点通过 A 和 B 所在平面以及符号序列之间的对应关系是问题的难点。值得指出的是，对于我们选择的任何序列，都存在与之对应的质点 C 的轨道。

上面讲述了两位俄罗斯数学家在天体力学中的一个重大问题上的贡献。人们会注意到，特别是在第二次世界大战以后，苏联数学家

走出一条自己的道路，产生了许多有重大价值的结果，而且基本上是在与外界隔绝的情况下完成的。一方面是冷战和苏联的政体，另一方面是语言障碍和缺乏及时翻译，导致了西方科学文化与苏联科学文化几十年无法沟通的局面。西方国家看到的苏联的科学杂志几乎不包含细节，并且只有部分的结果；而西方的杂志在苏联的许多研究所里是看不到的。尽管数学在这两个区域都得到广泛的发展，而缺乏交流却导致两个平行的数学框架的产生。在互通信息以后，许多西方的研究人员不情愿地、吃惊地发现，他们的一些成果早在几年前就被苏联的数学家提前发现。当然，相反的情形也是有的。

许多西方数学家想要避免这种人力资源的浪费，他们一有机会就到苏联和东欧国家访问，并且有幸能够获准签证。斯梅尔就是其中一位到莫斯科建立两个世界之间联系的访问者。第5章我们会碰到另一位访问者。互访是很难安排的，只是偶尔才能得到许可。在一些来自“铁幕”后的数学家利用旅行的机会出走后，出访的限制加强了。

今天，随着苏联的解体以及前东方集团的“革命”，一切都发生了变化。但在所处的政治、经济的大环境下，并非这一切变化都是有益的。许多年轻一代的东方数学家已经移民到西方，这使西方年轻人的人才市场出现更大的竞争。人才资源基本上在向西欧和北美转移。现在前共产党国家中存在着严重的差距，这使得它们的大学和研究所的经费来源已成为新增加的一个问题。

在西特尼科夫、阿列克谢耶夫和斯梅尔在动力系统领域取得进展的时候，人们不可能预见到这些历史发展。盲目竞争的年代或许永远也不会再出现了。数学发展的显著不同之处在于它的竞争更加公开。在最后一章，我们会看到赫鲁晓夫(Khrushchev, 1894 ~ 1971)的“解冻”，以及随后苏联向西方的部分开放，至少对一位苏联数学家——柯

尔莫哥洛夫——的工作产生了明显的影响。发生于 20 世纪 80 年代末和 90 年代初的剧变，可能会对数学的发展产生更加重要的影响。

符号动力学如今得到广泛应用。如果缺少这一有价值的工具，人们很难想像动力系统研究的发展。符号动力学已经应用于其他许多数学分支和计算机科学。它在计算机科学中被用于密码理论以及数据存储和传输的算法设计中。符号方法还成为应用科学和工程学中的重要工具，特别是在混沌日益盛行的今天。例如，1991 年在耶鲁大学举行庆祝 IBM 研究实验室的阿德勒(Roy Adler)寿辰的符号动力学会会议。来自 13 个国家的 139 名与会者，不仅包括纯粹数学家和应用数学家，还有物理学家、计算机科学家及来自大学和工业界的电气工程师。

一门新科学？

我们已经旅行到一门新科学——混沌——的核心，正如许多通俗文章中经常阐述的那样。但它真的是一门新科学吗？本书讲述的历史故事让我们得出相反的结论。混沌是由庞加莱发现的，伯克霍夫揭示了它的一部分，而斯梅尔很好地理解了它。混沌诞生于 19 世纪 80 年代，很难说是一门新科学。最近 20 年的成就，即使是独立完成的工作，从某种意义上讲也都是那些奠基人的工作的附属品。对混沌的各种描述和表达，最终都会归结为符号动力学或者数学家新近得到的某种更精密的判据。任何超出这一范围的说法都可能是推测的、没有多少科学价值的。含义模糊的词汇“不规则”和有精确含义的词汇“不稳定”，并不意味着混沌。

事实上，我们甚至怀疑混沌能否严格地被称为一门科学。按照

1992年版《韦伯斯特大学词典》，科学是“处理经过系统地组织的事实或者真理的一个整体及显示其一般规律运作的某一分支的知识和研究”。虽然为研究混沌而发展起来的许多技术可能满足上述定义，但它们是已经充分确立的一门科学——数学——的一部分。更精确地讲，它们是动力系统的数学理论的一部分，而且并不是很大的一部分。这些技术不可能构成像生态学和计算机科学那样意义上的一门新科学。这一术语产生的原因很大程度上是由于文学上的夸张。

那么较谦虚地称为混沌理论又如何呢？唉，即使如此我们觉得这种说法仍有误导。一种理论通常是描述特定范围内的现象提供规律和模型。相对论和量子理论作为现代物理学的基石，就是上述理论的实例。相反，混沌包含微分方程和其他动力系统分析中的一系列分散的方法。符号动力学、庞加莱映射和我们讲过的其他工具，皆不能直接用于描述外部世界；它们只能帮助我们理解和分析其他理论和模型。人们可以说混沌所以不能成为一种理论，是因为它的适用范围太广。

然而，认识到混沌的存在以及认识到它普遍存在于真实世界的确定性模型中，已经改变了我们的思想，从这一观点来看，它所做的远远超过了一种理论甚至一门新科学。混沌在我们的真实世界的确定性模型中是普遍存在的，这一广为接受的观点已经成为革命性的一步。由此已经产生一门新哲学，一种考察随时间甚至空间而演化的现象的新方法。它几乎影响每一个科技领域，激发科研工作者去创造新方法和新观念。混沌也为文学、艺术以及大众文化甚至是很少问津的批评理论等领域带来了新的生机。它触及几乎所有的人类活动，从人造卫星的发射到电视商业广告、流行书籍和电影，比如《侏罗纪公园》。无论我们是否喜欢，它已经成为我们生活中的一部分。

循环、规则性和周期性等旧范式并没有被取代——它获得了新的诠释。它现在可被看作是对宇宙更丰富、更复杂的形式的第一级近似。那些以永恒轮回为主题的古老神话，不会再以相同方式讲述了。我们至多能够保留回复(recurrence)的观点(从第4章将要讨论的庞加莱遍历定理的意义上讲)，但是不应希望严格的重复。这可能就是在秩序(order)和混沌(chaos)之间合理的折衷。

注 释：

2.0 第2章的题记选自[Mor, 1946]。

2.1 从不动点开启的学术生涯：介绍性的场景是我们假想出来的，它是为了说明一位科学家在刚刚得到一份工作时的心理状态。我们不知道伯克霍夫在得到哈佛的聘用时是否是这种反应(或许他并不像我们描述的那样激动)。本节其余部分参见[Bi, 1913, 1927, 1935, 1968]和戈罗夫为[Po, 1993]作的序。庞加莱的最后一篇论文见[Po, 1912]，在[Po, 1951~1956]中也可以找到。

2.2 里约的海滨：辛格的有关菲尔兹奖和相关资料的信件，参看[Sy, 1933]和[Tr, 1976]。关于诺贝尔的评述，参见[Mey, 1994]。

本节的大部分内容以[Sm, 1980]为基础，[HM & S, 1993]重刊了这篇文章。1995年1月3日斯梅尔在一次电话交谈中向PH提供了进一步的细节，另见[Sm, 1991]。范德波尔和范德马克、卡特赖特和李特尔伍德以及莱文森的论文，参见[V & V, 1927]、[C & L, 1945]和[Levin, 1949]。卡特赖特在[Ca, 1972]中描述了她战时的工作，以及关于动力系统理论的其他回忆。马蹄以一种严格的方式嵌入范德波尔方程的庞加莱映射中，直到70年代末才被阐明[Levi, 1981]。

2.3 斯梅尔马蹄：有关斯梅尔的文献，见2.1。关于马蹄的数学结果，今天可以在大部分动力系统的现代教科书中找到，比如[Mos, 1973]和[G & H, 1983]。

2.4 符号上的移位：一些书籍讨论了符号动力学，例如[De, 1986]和[G & H, 1983]。在普林斯顿高等研究院的数学图书馆可以找到一本早期的教材：由奥尔登伯格(Rufus Oldenburger)记录的莫尔斯在1937~1938年作的报告，[Mor, 1938]。斯梅尔关于动力系统的主要评论文章最初发表于《美国数学会公报》，后来在[Sm, 1980]中重刊，并包含了补充注记和评论。斯梅尔关于马蹄的第一篇论文，收录在普林斯顿大学出版社的《微分和组合拓扑》论文集[Sm, 1965]中，它在[Sm, 1980]中被引用。关于定义混沌的几条性质，参见[De, 1986]和[B et al., 1992]。

2.5 混沌的符号：见2.4中提及的参考文献。[Ber, 1978]和[Ek, 1988]引用了麦克斯韦关于初值条件敏感依赖性的最早论述；另见[H & Y, 1993]。洛伦茨过去未曾发表的演讲，包含在[Lo, 1993]中。

2.6 振荡与革命：这里提到的论文、书籍和会议文集，是[Bi, 1927, 1935]，[Sit, 1961]，[A, 1968a, 1968b, 1969]。[Mos, 1973]叙述了西特尼科夫的工作。耶鲁会议的论文集，参见[Wa, 1993]。

2.7 一门新科学？：关于非线性动力学在科学中的应用的例子，参见[Gl, 1987]和[St, 1989]。[Hay, 1990]讨论混沌对文学研究的冲击。

3. 碰撞及其他奇点

潘勒韦的聪明才智在于由他那先知般头脑所表现出的
广博见识、超凡能力和敏捷思维。他以一种非同寻常的方
式，仅用几年时间就在数学、力学和政治领域取得了成功。

——勒内·加尼耶(René Garnier)

国王的侍从步入报告大厅高声宣布：“国王陛下到！”听众都站
起来，轻声的低语立刻肃静下来。所有人都注视着大门，大家一动
不动。

一个高个子灰白头发男人沉重的脚步声打破了这份宁静，整个房
间都欢呼起来。瑞典与挪威的国王奥斯卡二世步入了斯德哥尔摩大
学的一间大报告厅。这是一件非同寻常的事：国王在他统治的国度
中最负盛名的研究机构出席一场通俗的演讲。

有多少总统、首相和州长——在任的或者离任的——会关注某所
大学里的公开讲座？（这里我们并不考虑政治竞选或者上层的政治

活动，比如向政治家或其他人颁发荣誉学位的仪式，而是限于面向学生的常规的演讲。)很难说出一个。国王陛下今天的到来，难道只是为了一次普通的演讲？从某种意义来讲，是的；而从另一种意义来讲，不是。国王出席背后的一个动机可以从他的个性中发现，另一个动机则可以从演讲者那里找到：下面的报告不仅仅是一次普通的演讲。

瑞典与挪威的国王奥斯卡二世是斯堪的纳维亚半岛一位最卓越的统治者。奥斯卡师从于历史学家卡尔森(F. F. Carlson)，在1872年他的兄长查理十五世(Charles XV)去世后登上王位。他是一名优秀的雄辩家、诗人，也是艺术和科学的赞助者。或许受他过去老师的影响，国王十分重视文化，正是这个原因，他设置了许多奖项，比如我们在第1章中描述过的庞加莱获得的奖项。事实上，奥斯卡国王早在1882年就为庞加莱后来发表文章的杂志《数学学报》的创办提供了经济资助，除此之外他还为业余数学家颁发奖金。国王还乐于不时地将欧洲杰出的艺术家、科学家邀请到斯德哥尔摩。那天是1895年10月2日，奥斯卡国王将要聆听一位来访的数学家所作的系列报告中的第一个。

当欢呼的热潮平息下来，会议主席开始了他的介绍。在一段例行的皇家仪式之后，主席开始介绍一位特别的客人，“巴黎大学的保罗·普吕当·潘勒韦(Paul Prudent Painlevé)教授！”当一名年轻人步入主席台面向观众时，大厅里再次爆发出一阵热烈的掌声。在1895年的那个秋天，潘勒韦还不满32岁。他是一位公认的优秀的演说家，在科学院开设的课程经常座无虚席。甚至在面向公众的正式演讲中，他的博学也会与他本人自然、平易近人的举止完美地结合起来。听他的演讲是一种真正的享受。



照片 3.1 保罗·潘勒韦。（巴黎的国家科学研究中心提供）

“陛下，”他开始讲道，“陛下的光临为这次演讲带来了无上的荣耀，我的第一件事就是为我能荣幸地来到斯德哥尔摩探讨数学中分析方面的最新进展向陛下致以最崇高的谢意……正如陛下所表明的，本演讲的主题是超越理论(theory of transcendents)，特别是微分方程定义的一致超越性。我想描述一下在最近几年的研究工作中超越理论所占据的中心地位。这将使我能够从某种角度指出现代数学的内涵与方向。”

介绍性的开场白结束了，现在潘勒韦开始进入科学的世界。他首先谈起牛顿和莱布尼茨，然后讨论开普勒定律，讲述如何从微分的思想引出万有引力定律和 n 体问题。最后，他总结了伯努利、欧拉(Euler)、克莱罗(Clairaut, 1713 ~ 1765)、达朗贝尔(d'Alembert, 1717 ~ 1783)以及微分方程领域的其他先驱们的工作。

在这间拥挤的大报告厅里，听众中几乎没有人具有很多关于这一主题的专业知识。尽管这样，潘勒韦有条不紊、高雅的风格吸引了所有的听众。他的演讲通俗易懂。他不需用冗长乏味的数学细节就阐明了最难的数学问题的本质。大厅里没有耳语声、呼吸声；听众们尽力去捕捉每一个词汇，欣赏每一个句子。他们被征服了。

当演讲结束时报告厅里再次充满了雷鸣般的掌声。国王本人表现出赞美之意：国王以做出邀请潘勒韦来斯德哥尔摩访问的决定为荣，他站起来满意地微笑着以示赞许。潘勒韦的第一次演讲取得了巨大的成功，接下来的是 22 次演讲。

一个奇人

正如潘勒韦在第一次演讲的第二句话所讲的那样，他的报告的目的就是研究微分方程所定义的超越性(transcendents)。为了理解这个相当专业性的概念，我们首先解释一下微分方程解的奇点。为此，回到第 1 章中所谈及的河流的比喻。设想由微分方程定义的向量场就像河流一样将每块浮木(每个解)沿着解曲面带走。有时一小块木棒或枝条可能被推到岸边，在向量场中类似的是方程的解在某个特定时刻离开相空间：它完全不存在了。口语上我们称解在有限时间发生破裂(blow up)，解通常是由于变得任意大而不存在了：解被带到了无穷远。另一种情况，解也可能在相空间遇到障碍物。在图 1.1 中下落球体的例子中，地面($h = 0$ 处)就是物理障碍。只有正的高度(位置)才是被允许的，于是相空间不是整个平面，而仅仅是右半平面，即由所有的速度(正的和负的)和所有正的高度张成的半个平面。此时直线 $h = 0$ 就是“河岸”；当小球向下碰到这条线时，方程的解就失去定义了。(我们可以增加另外一个模型描述小球由地面弹

起的过程。然而，这需要引入球体的弹性和撞击的动力学，它们已经超出我们所讨论的“简单”的牛顿世界。)

奇点也可以发生在相空间中的孤立点处，如图 3.1a 所示。一般地，如果一个解并非对所有的时间变量 t 都有定义，而解在某一瞬间 t^* 处终止，那么称 t^* 为相应解的一个奇点。

在继续讨论之前，我们首先给出解具有奇点和解趋于流的某个平衡点(定义见第 1 章)的重要区别。图 3.1a 和 1.6 假设两个解终止于一个特殊的点，但是两张相图没有明确地显示出前者的解在有限时间内终止，而后者需要无限长的时间达到它的极限——平衡点。为领会它们的区别，需要一张反映解作为时间的函数的图形，如图 3.1b 和 3.1c。在图 3.1b 中解曲线在 t^* 处终止；而图 3.1c 中解曲线对于所有的时间 t 都有定义。

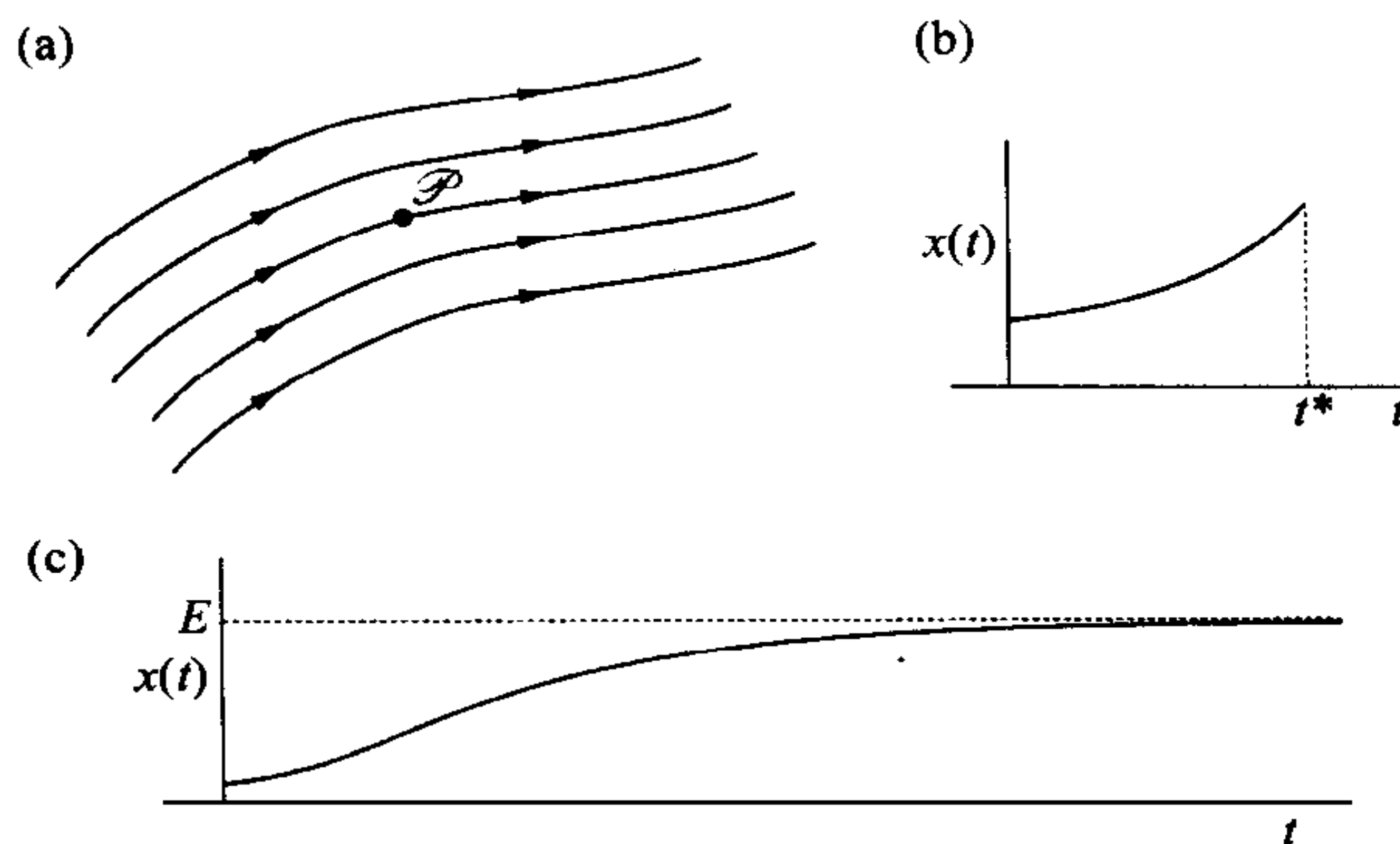


图 3.1 轨道 C 在点 P 处终止。在轨道 C 上，点 P 对应于奇点 t^* 。(a)相图，(b)奇异解作为时间的函数的图象，(c)另一不同的解趋向于一个平衡点。

为了解释潘勒韦的超越性概念，我们首先指出“虚幻”的奇点可能存在。在我们的比喻中，木棒可能漂到岸边，但是由于河岸特别的形状，木棒马上又被带回到水流中。数学家称这样的奇点是可正规化的(regularizable)，它意味着解可以延拓到时刻 t^* 以外。此时

我们说这个奇点只是表面的(apparent)。木棒将继续沿着河流漂浮而下,直至碰到另一处障碍:一个新的奇点。当一个奇点不是表面的,潘勒韦称它为超越的(transcendent)。由定义,解不能延拓到超越奇点(transcendent singularity) t^* 以外。我们过一会将看到,在 n 体问题中,当两个或多个质点发生碰撞时就产生了奇点。如果碰撞的质点的运动可以从某种意义上延拓到碰撞以后,那么奇点是表面的;否则它就是超越的。

在斯德哥尔摩潘勒韦所作的演讲中,这位法国数学家提出奇点(特别是超越奇点)的困难问题。在河流的比喻中事情看起来很简单,但对于微分方程来讲,奇点会引出许多麻烦。潘勒韦将这个问题分成多种不同的情形,他还提供一些新的研究方法,并且发现大量有趣的结果。潘勒韦将 n 体问题作为一个主要的应用。第一个自然的问题就是:经典 n 体问题中是否确实存在奇点?如果存在,它有什么物理意义?

n 体问题中出现奇点的一个明显例子,就是二体碰撞(binary collision)。在时刻 t^* ,两个质点重合,它们具有相同的位置坐标。在相空间中具有相同坐标的点集,是超平面(hyperplane)。特别地,当相空间是平面时,超平面只是一条直线,例如图1.1a中的直线 $h=0$ 。这种简单的情形只发生在直线有心力问题(rectilinear central force problem)中:一个物体沿着一条固定的直线接近或远离中心。对下落的球体来讲,相空间的两个坐标是运动物体关于中心的位置和速度。由于在牛顿万有引力定律中引力的大小与两个物体之间的距离成反比,而在发生碰撞时物体与中心的距离是零,于是引力变成无穷大,方程所描述的运动就失去意义。因此,在平面相空间中发生

碰撞的含有零位置坐标的直线成为轨道的障碍。当一条轨道接近它时，没有办法延拓这条轨道越过或者擦过该直线(见图 3.2)。

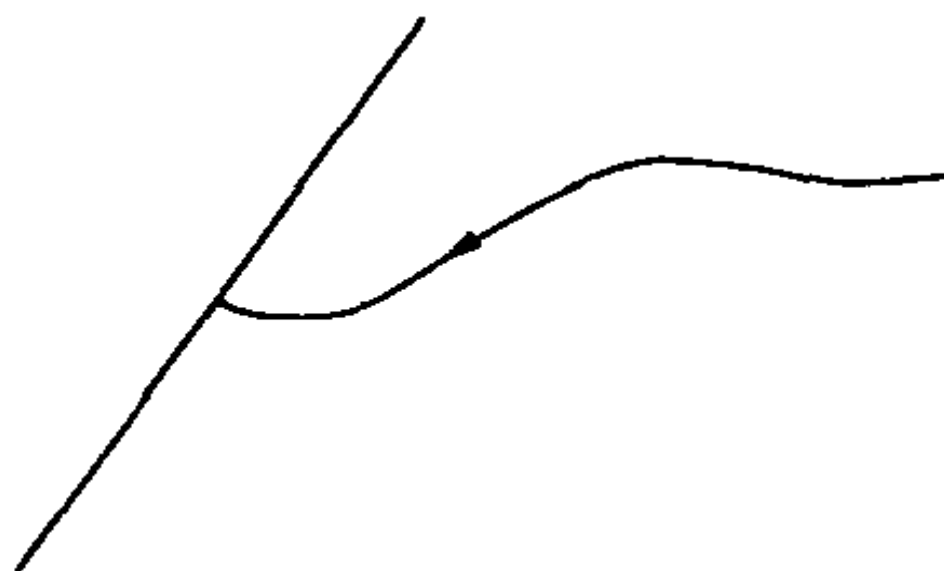


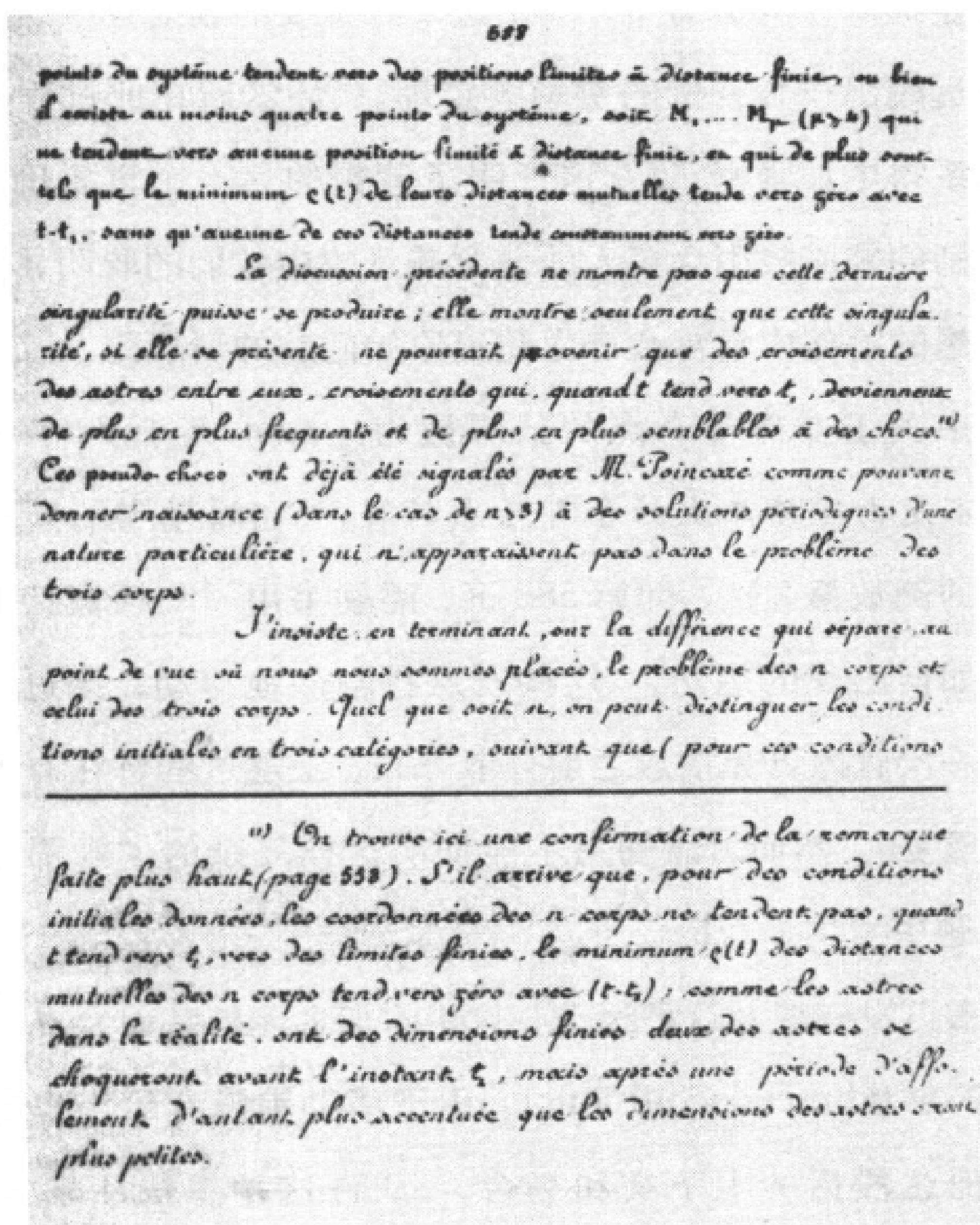
图 3.2 直线有心力问题中一条轨道到达定义碰撞的超平面。

同样的现象可以发生在二体碰撞、三体碰撞、四体碰撞等问题中的任何两个物体之间。同时发生的碰撞也可以在相空间中产生障碍。这类问题的一个实例就是双二体碰撞(double binary collision)，此时两个质点在物理空间中的一点发生碰撞，同时另外两个质点在空间中的另外一点发生碰撞。尽管上述例子在实际中不大可能发生，但是为了给出 n 体问题完整的描述，我们还是需要理解它们。进而，就像投入池塘中的石头会产生涟漪一样，碰撞也使它的影响波及到相空间中奇点的整个邻域。

我们已经部分地回答了前面提到的问题，还给出奇点的实例并且理解了它们的物理意义。然而，像在科学中通常发生的那样，每一个解答都会引出一些新的问题。现在我们要问碰撞是表面奇点还是超越奇点？我们还想弄清楚 n 体问题中碰撞是否为唯一可能的奇点。这些都是十分困难的问题，潘勒韦不可能在他的演讲中完全解决它们。关于第二个问题，他给出部分解答，证明三体问题中存在的奇点都是碰撞。他还试图在多于三体的问题中推广这个结果，但是失败了。由此他提出一个猜想。

猜想(conjectures)刺激了数学的发展。数学家们有时在研究中直觉地感到对于一个问题他们已经有了正确的解答，但是经过长期的

努力仍然不能证明它。这时他们一般会提出一个猜想，即以自己的观点明确阐明问题的正确答案会是什么。一个猜想没有给出证明 (proof) 或否证 (disproof) 的时间越久，它就越有名。如果在某个领域的发展中它的主要理论依赖于某个猜想的明确的解答，那么这个猜想就变得格外重要。试图解决这样的猜想会刺激数学某一支的发展或者产生新的分支。我们已经提到关于 n 维球的庞加莱猜想，其中三维情形的猜想是拓扑学中一个主要的未解决的猜想。



照片 3.2 潘勒韦猜想，据潘勒韦的斯德哥尔摩演讲手稿。（巴黎的国家科学研究中心提供）

数学中最有名的猜想或许是费马大定理，它的名字得自于一位法

国律师皮埃尔·德·费马(Pierre de Fermat, 1601 ~ 1665)。300年前,费马在一本书的空白处写下这个猜想(并宣称已经证明了它)。费马认为当 n 是大于2的整数时,方程 $a^n + b^n = c^n$ 没有(非零的)整数解。1993年,普林斯顿大学的怀尔斯(Andrew Wiles)宣布证明费马大定理,震惊了整个数学界,然而在仔细的检验和复查之后,人们发现了证明中的一处漏洞。1994年怀尔斯与他过去的学生泰勒(Richard Taylor)一起成功地弥补了这个漏洞。在怀尔斯8年来为解决费马大定理所作的努力中,他引进一些重要的新思想,这些新思想的应用远远超出作为特例的费马大定理。怀尔斯在此过程中将几何与数论联系得更加紧密了。这证明了猜想的另一个重要价值:它们在一些特别的领域吸引众多人的注意并且集中他们的聪明才智,而且在这些猜想的解答中常常会产生超出原始问题的新思想。

潘勒韦关于非碰撞奇点的猜想认为:在 n 大于3的 n 体问题中,存在不是由碰撞产生的含有奇点的解。在潘勒韦的斯德哥尔摩演讲手稿的倒数第2页,即第588页,潘勒韦用一句话概括了他认为这样的解如何出现的想法。这些质点将剧烈地振动,接近碰撞,接着在与另一次碰撞更为接近之前分散开来,上述过程将在有限的时间内不断地重复。然而,潘勒韦不能证明这样复杂的“舞蹈”确实会在 n 体问题中发生。

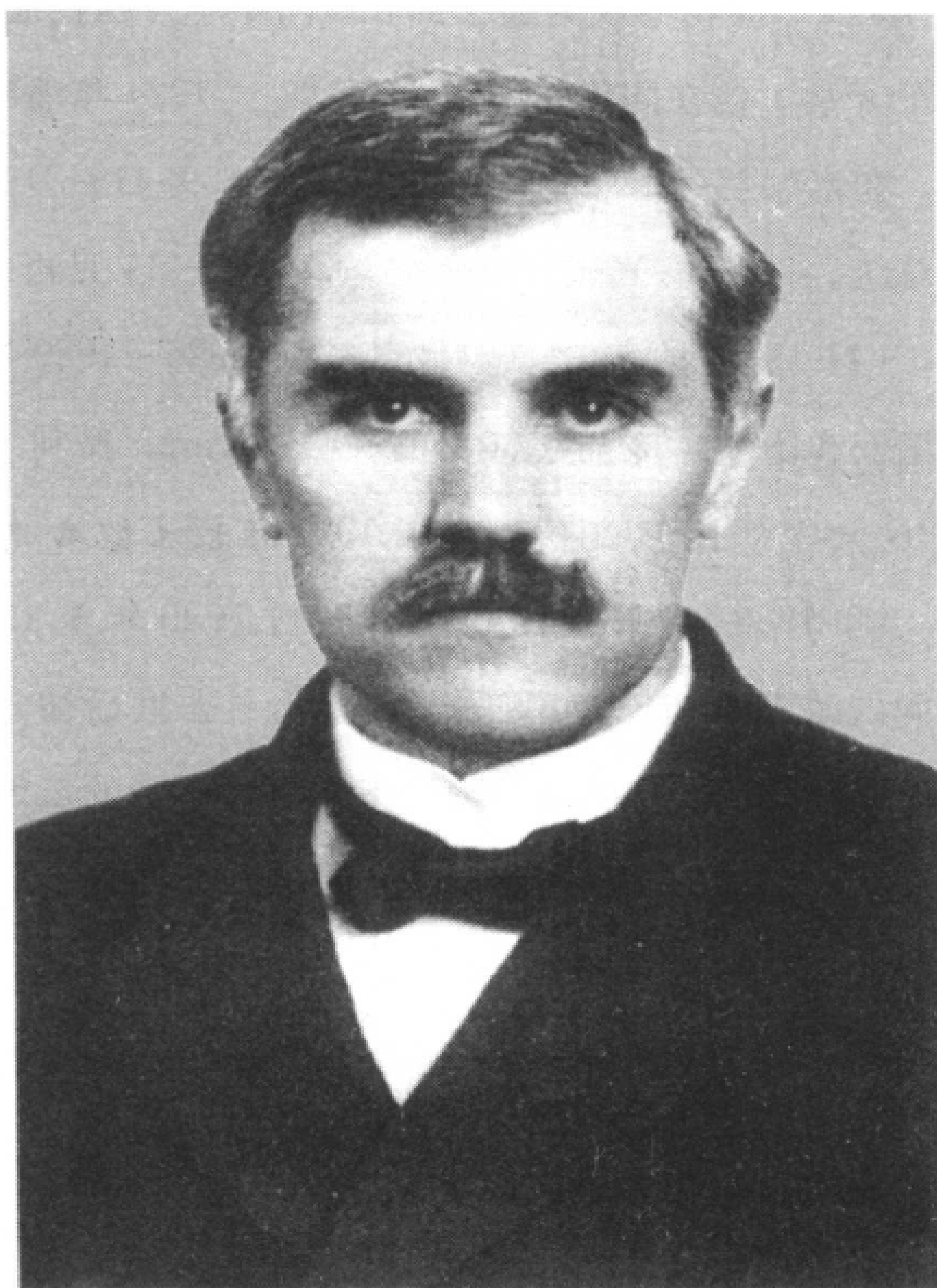
潘勒韦再没有谈及这种运动,只是附加上庞加莱曾经提到过可能会发生的伪碰撞(pseudocollisions);由于潘勒韦没有给出出处,我们还不清楚他这段话的上下文和场合。或许这种想法从来也没有发表,只是产生于两位巴黎的数学家的谈话中。尽管如此,这个猜想仍冠以潘勒韦的名字,它激发了其后100年间许多重要的数学成就,我们将在本章提及这些工作。

在斯德哥尔摩演讲后不久，潘勒韦的活动就超出了他所从事的数学工作。1897年，在德雷福斯(Dreyfus)事件发生时，他进入政界，在不放弃数学研究的同时，他进入法国政府的最高层。他当选为巴黎第五行政区的议员，并于1914年重新当选，他在1915~1916年白里安(Aristide Briand, 1862~1932)的政府中担任公共教育部长。1917年3月20日，潘勒韦成为陆军部长，同年9月担任总理。由于与左翼联盟的矛盾，他在同年11月被迫辞职。1924年潘勒韦作为国民议会主席，在米勒兰(Alexandre Millerand, 1859~1943)辞职后，参加竞选法国总统。他没有当选，但是在1925年4~11月再次成为政府总理。在10~11月期间他还兼任财政部长。1926~1929年，潘勒韦再次成为白里安和雷蒙·庞加莱(Raymond Poincaré, 昂利·庞加莱的堂弟)政府中的陆军部长。剑桥大学于1927年授予他名誉博士。潘勒韦在1928年和1932年再次当选议员，他自1930年至1933年去世前在三届不同的政府中担任空军部长。潘勒韦去世后被安葬在法国的先贤祠，紧邻着其他的前辈政治家、军事家和学者的墓地。

碰撞还是破裂

在潘勒韦的公开演讲中，一位22岁的学生坐在报告厅的角落。其所见所闻给他留下深刻的印象。虽然他只能听懂演讲的一部分，但是这次演讲对他的一生产生了决定性的影响。这位年轻人就是冯·塞佩尔。他在瑞典出生，祖父是一位德国移民，他喜爱数学和天文学，潘勒韦的报告正是两者完美的组合。很可能就在潘勒韦访问斯德哥尔摩期间，冯·塞佩尔有了研究 n 体问题的想法。几年后的1904年，冯·塞佩尔在乌普萨拉大学获得博士学位，博士论文是关于三体问题中的周期解的。接着有一次难得的机会：他被邀请到

巴黎——当时科学的圣地——从事研究工作。1904年6月他来到这个繁华的都市，在此他能够聆听庞加莱的天体力学和潘勒韦的理性力学课程。这些课程重新唤起他对 n 体问题中奇点的兴趣。非碰撞奇点的可能性引发了他的好奇。这是什么样的轨道呢？他的导师们如何思考这种不寻常的动力行为呢？



照片 3.3 雨果·冯·塞佩尔。（乌普萨拉大学图书馆提供）

研究始于未知。在一生的大部分时间里，我们都在走前人的路并且学习他们经过实践获得的知识。但是大自然赐予我们一份宝贵的天赋和好奇心，一种与生俱来的探求未知世界的动力。在 200 万

年的演化进程中，人类已经将这种天赋发展为高度系统化的智力活动，今天称之为研究。我们已经学会如何寻求各种方法以及将它们应用于世间的各个领域和近代的科学领域；并尽力掌握其中的每一个细节。然而，正是最初的好奇心激发了我们在研究中克服困难的毅力。在 20 世纪头十年中，这种毅力一直激励着冯·塞佩尔。

1906 年 9 月，冯·塞佩尔离开巴黎返回瑞典。他回到家乡的时候已经具备了丰富的科学经验，并且准备解决各种难题。冯·塞佩尔希望超过庞加莱和潘勒韦，他决定继续研究奇点问题。1908 年 5 月，冯·塞佩尔回到瑞典的两年内，他用法语发表一篇题为“关于 n 体问题的奇点”的论文。在寥寥 4 页的论文中，他陈述并且证明了方程的解具有非碰撞奇点的必要条件是系统的运动在有限的时间内无界。粗略地讲，他的结果意味着如果方程的解是奇异的，那么或者导致发生碰撞，或者在有限的时间内发生破裂。

为了明确起见，我们试着换一种方式表达冯·塞佩尔的结果。他断言，如果任何两个质点的距离都是有限的，那么可能产生的奇点只能是碰撞奇点。因此，对于非碰撞奇点来讲，至少存在两个质点间的距离会趋于无界。这并不需要两个质点永远分开，它们可以来回振荡，每一次分离后两者的距离都有所增加，并趋于无界，像第 2 章提到的西特尼科夫的限制性三体问题一样。但是为了保证奇点的存在，所有这一切都必须在一有限的时间段内发生。至此，冯·塞佩尔没有证明非碰撞奇点确实存在，他只是描述了如果它们存在会发生什么。他的结果蕴含着如果不发生上述的振荡行为，那么系统中所有的奇点都必然是碰撞奇点。数学与其他学科一样，进展往往都像这样每次向前迈一小步。冯·塞佩尔建立了非碰撞奇点与振荡解之间的联系，并且指出两者是不可分离的，因此我们只需研究其中一种现象。

关于冯·塞佩尔的结果有一段有趣的故事。1920年，法国天文学家让·沙齐(Jean Chazy, 1882~1955)在《法国科学院周报》上发表一篇论文，其中宣布得到与冯·塞佩尔同样的结果，但是没有给出证明也没有引用冯·塞佩尔的文章。显然沙齐不知道冯·塞佩尔在1908年发表的论文。温特纳(Aurel Wintner)在1941年第一次印刷的《天体力学的分析基础》一书中引用了冯·塞佩尔的论文，书中指出他的证明有漏洞，并对其论证的有效性表示怀疑。1970年，在哈特斯维尔的马歇尔航天中心工作的斯柏林(Hans Sperling)利用类似于冯·塞佩尔的思想，克服困扰该问题的重重障碍，最后给出了详细的证明。似乎争辩可以到此为止了。然而在1985年，前文提到的明尼苏达大学的麦吉利用他的休假来到斯德哥尔摩附近的米塔-列夫勒研究所。他在研究所图书馆收藏的一本不知名的瑞典杂志上找到冯·塞佩尔的论文，并仔细地阅读了全文。麦吉发现冯·塞佩尔的证明事实上是正确的，将它翻译成现代的数学语言，从而使今天的专家们更加易于接受。1986年麦吉发表一篇文章指出了真相和冯·塞佩尔的优先权。

1910年以后，冯·塞佩尔的兴趣逐渐转向天体力学中有实际应用的天文研究。他写了一篇关于摄动方法(perturbation methods)的论文，并应用所掌握的知识研究小行星和彗星的运动，最后又转到关于恒星的结构和演化的天体物理研究中。1915年，冯·塞佩尔入选瑞典皇家科学院，4年后他成为乌普萨拉大学天文学教授。1920年米塔-列夫勒请冯·塞佩尔为《数学学报》的纪念专辑撰稿，以缅怀庞加莱的一生及其工作。冯·塞佩尔就这位法国数学家在天体力学方面的工作写了一篇长达75页的文章。这件事说明了他在学术界的崇高地位，因为仅有少数被指定的人，才有资格发表纪念文章，他们是：阿佩尔、阿达马、洛伦兹(Lorentz, 1853~1928)、潘勒韦、普朗

克(Planck, 1858~1947)和维恩(Wien, 1864~1928)。1926~1935年冯·塞佩尔担任瑞典天文学会主席,1931~1948年他担任国家天文委员会主席。1930年冯·塞佩尔的事业达到了顶峰,他由于在恒星的结构与演化理论方面的贡献而获得纽约科学院的莫里森奖。

尽管冯·塞佩尔的定理是他早期的工作并且在他后期的研究兴趣之外,但这一结果在潘勒韦猜想的发展史上起着根本性作用。许多人认为这个定理提供了非碰撞奇点不存在的有力证据。一个由质点构成的“封闭”系统,如何才能获得充分大的能量使其中的质点在有限的时间里达到无界?(这与西特尼科夫的限制性三体问题有重要的区别,在限制性三体问题中,由于假定两个大质点的运动不受第三个小质点的影响,因此两个稳定绕转的大质点提供了无穷的能量来源。)另外,这个问题仍然很难解决,而且在沙齐之后人们已经将注意力转到其他问题上。20世纪60年代两位美国数学家,他们是西北大学的萨瑞(Donald Gene Saari)——如今为西北大学教授——和他过去的博士论文导师、普度大学的波拉德(Harry Pollard)重新使这个课题活跃起来。与此同时,对一个不同问题感兴趣的一群研究者进行了数值实验。在回到波拉德和萨瑞的工作以前,我们描述一下数值实验中的种种尝试。

计算机游戏

第一台数字计算机是非常庞大的。20世纪50和60年代的美国知名大学都在花钱建造或者购买大型计算机。与今天的个人计算机和工作站相比,那个时代的庞然大物占据了整个房间并且运算速度只及现在的数千分之一。但是毕竟计算机诞生了,许多科学家认为它奇妙无比。并不是所有的人都同意这种观点:甚至今天仍有一些保守主义者反对这种机器,人们偶尔会在办公室的门上发现一些过分的

标语“无计算机区”。当时人们对计算机有着深深的疑虑，特别是在数学系。广为人知的一个例子，就是在冯·诺伊曼(John von Neumann)去世后，他的普林斯顿高等研究院的同事们在许多年里都没有在他们的大楼安装计算机。除了在数学上做出了巨大的贡献，冯·诺伊曼还是第一台数字计算机的共同发明者之一。

尽管存在诸多障碍，然而热心者在一开始就渴望使用计算机。特别是天文学家和天体力学家，他们认识到牛顿方程和 n 体问题的计算机模拟将使他们摆脱过去艰辛的手工计算的束缚。

1966 年，塞拜海伊(Victor Szebehely)就是一位热心于计算机的人。他主要的兴趣是天体力学，通过数值计算他攻克了一个古老的问题。梅塞尔(Ernst Meissel, 1826 ~ 1895)是雅可比(Jacobi, 1804 ~ 1851)的学生，他在 1893 年与布鲁(Carl Burreau)的讨论中提出下述问题。(事实上，梅塞尔的笔记本揭示出他在 1893 年以前就关于这个问题和类似的问题做过大量的计算。)考虑质量之比为 3 : 4 : 5 的三个质点，它们分别位于毕达哥拉斯三角形(即边长分别为 3, 4 和 5 个单位的直角三角形)的顶点；参见图 3.3。假设这些质点满足牛顿万有引力定律，如果在质点的初始位置上以初速度为零释放它们，试问三个质点将来的运动状况如何？布鲁在 1913 年通过数值计算研究这个问题，但是没有取得多大进展。他的手工计算不可能使他获得重大的结果。

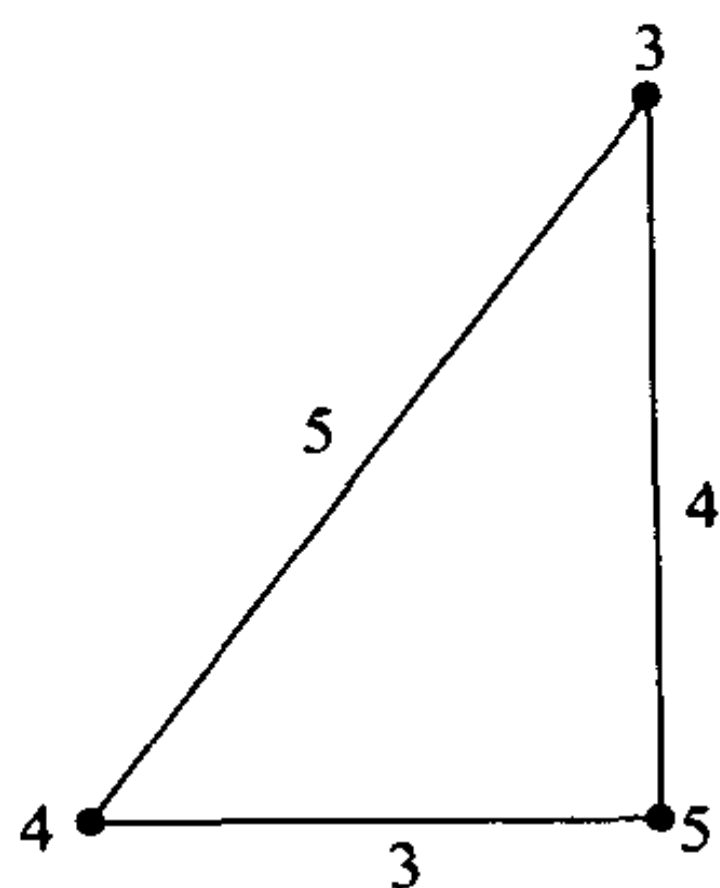


图 3.3 三体问题中的毕达哥拉斯问题。

塞拜海伊在耶鲁大学指导斯坦迪士(Myles Standish)进行数值计算。那年的后一段时间由斯皮奈利(Spinelli)、莱卡(Lecar)和塞拜海伊本人在纽约的国家宇航局所属空间科学研究所继续开展工作。与此同时,施塔内克(L. Stanek)在施蒂费尔(Eduard Stiefel)的指导下,正在苏黎世的联邦工业大学(ETH)研究同一个问题。他们所发现的现象着实令人吃惊。在经过一段复杂的运动过程之后,其中两个质点形成二体系统(它们紧密地互相绕转),而第三个质点以很高的速度被排斥出去。图 3.4 显示了一些通过计算得到的结果。

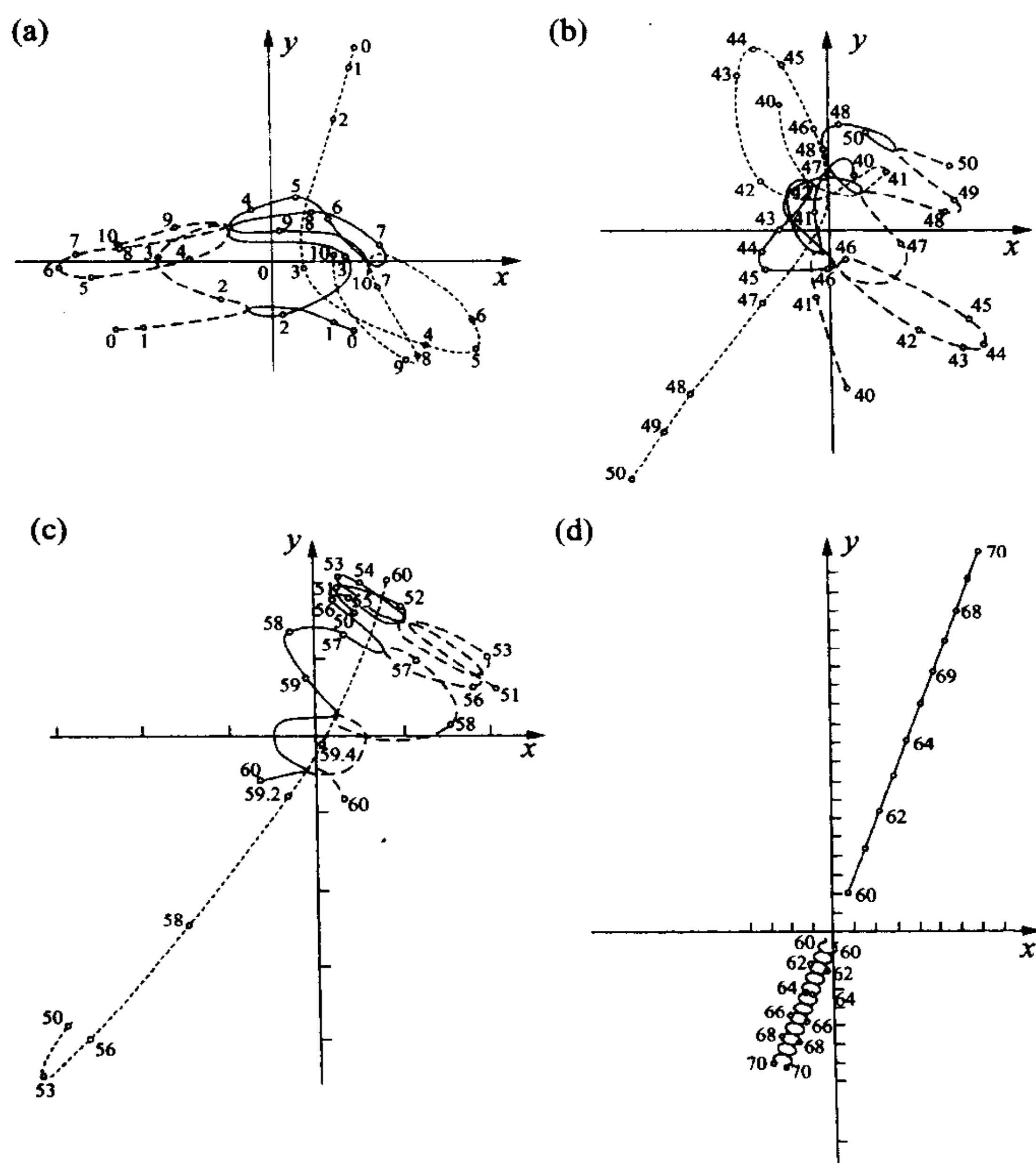


图 3.4 毕达哥拉斯问题的数值计算。实线、段状和点状的虚线表示三个质点的轨道。图(a), (b), (c)和(d)分别表示时刻 $t = 0 \sim 10$, $t = 40 \sim 50$, $t = 50 \sim 60$ 和 $t = 60 \sim 70$ 之间质点的运动过程。

如在科学研究中经常会发生的那样，这些计算结果的作者正在寻找其他不同的现象。他们正在搜寻周期解，取而代之的是发现了上面描述的动力行为。对他们来讲所发现的现象更为有趣，因为它使人们看到了双星形成问题的一线曙光。这些人的工作与潘勒韦猜想的关联之处在于下面的性质：有一个质点被排斥出去，以很高的速度离开另外两个质点。为什么会发生这样的现象，为什么这样的性质如此重要？上述问题被证明是在解决非碰撞奇点问题中必须回答的两个本质的问题。

为了回答第一个问题，我们仔细观察图 3.4b。在时刻 $t = 41$ 附近三个质点非常靠近（请读者注意，图 3.4b 中的尺度比 3.4c 和 3.4d 更为精密）。按照牛顿万有引力定律，两个质点间的作用力由于它们相互靠近而变得非常大。因此当第三个质点接近时，没有发生三体碰撞，而是产生“弹弓效应”（slingshot effect），使第三个质点骤然加速并快速离开两个质点的邻域。

1973 年后，ETH 的瓦尔德福格尔（Jörg Waldvogel）继续从事一般的平面三体问题的数值研究。在他的例子中，其中一个质点总是会逃逸出去。三个质点之间越接近于三体碰撞，那个逃逸质点的速度就越大。但是计算机模拟并不能代替数学证明。特别是在速度和引力很大的时候，利用离散化的运算步骤代替微分方程连续过程的数值算法的精确性还令人怀疑。然而，这些结果是很有启发性的。它看起来像是一个封闭的系统，其内部的质点能够提供足够的能量将其中一个质点以很高的速度排斥出去。随后在 1974 年，麦吉在不知道上述数值结果的情况下就直线三体问题（质点都沿着一条固定的直线运动）给出这一性质的分析证明。1 年后，瓦尔德福格尔独立于麦吉的工作，利用不同的方法也发表了对平面三体问题更一般情形的证明。

特别是，他们都证明三体问题中当三个质点靠得很近时，通常其中一个质点会以任意大的速度从另两个质点组成的系统中逃逸。

对于潘勒韦猜想来讲，这个性质的重要性还在于，它向研究者提供了一条线索去构造导致非碰撞奇点的解。就四体问题而言，人们可以选取适当的初值条件保证三个质点接近于发生三体碰撞。然后，其中两个质点形成二体系统而第三个质点高速逃逸。接着第三个质点会遇到第四个质点，在它们距离很近时，第三个质点会以某种方式飞回由前两个质点组成的二体系统。于是导致三个质点再一次相互接近，随后第三个质点再次以更高的速度逃离二体系统。如果能够找到合适的初值条件，使得系统不断重复地发生接近三体碰撞的现象，而每次都可以估计出速度的增加，那么系统中质点的运动有可能在有限时间内达到无界。实际上，第三个质点将在二体系统和第四个质点之间振荡(二体系统和第四个质点也相互分开远离对方)，它每振荡一次都会用更短的时间走更长的路程。第三个质点经过无穷多次振荡以后，其余的质点在有限的时间里达到无穷远，整个系统没有发生任何碰撞。



图 3.5 质点 A 和 B 沿相反的方向运动，质点 C 在 A 和 B 中间振荡。

上面描绘的景象似乎违背我们的直觉。如何能够在有限的时间间隔里发生无穷多次振荡呢？我们举一个例子，假设两个速度不断增加的质点 A 和 B 沿着相反的方向运动，第三个质点 C 在 A 和 B 之间振荡，它的速度也在不断增加，使得每次振荡以后都可以达到另外两个质点中的每一个(见图3.5)。假设速度增加得非常快，在第一次

振荡中， C 从 A 到 B 需要 1 秒，第二次从 B 到 A 需要 $1/2$ 秒，第三次从 A 到 B 是 $1/4$ 秒，第四次从 B 到 A 是 $1/8$ 秒，以此类推。 A 和 B 到达无穷远的总时间就是将上述所有的时间段加在一起，得到无穷项的和： $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots$ ，这个序列是一个几何级数，可以证明其总和为 2。此时质点从出发到无穷远仅用 2 秒。

球由地面弹起的现象在数学上的理想化，是无穷多个事件发生在有限的时间内一个更为简单的例子。从空中释放小球使它在 1 秒后碰到地板，小球会从地板弹起上升到比初始高度稍低的地方，小球在 $1/2$ 秒后再次从地板上弹起，接着是 $1/4$ 秒，等等。经过 2 秒钟小球会无穷多次从地板上弹起，最后静止下来。当然，后来（无穷多次）小球弹起的高度会小于分子、原子、夸克或者任何物理学家所能想到的更小的粒子的直径，因此在实际中小球只经过有限次弹起就会停止。

是否能够构造一种图 3.5 所示的运动，使得中间的质点在从左向右和从右向左的运动过程中可以获得充分大的速度？在 n 大于或等于 4 的 n 体问题中的三体接近 (triple approach)，允许速度的快速增加。（回顾潘勒韦曾经指出的在 n 等于 3 时所有的奇点都是碰撞奇点：我们发现在三体问题中由于没有第四个质点将第三个质点排斥到前两个质点的邻域中而不能出现非碰撞奇点。）因此，构造在有限的时间达到无界的解的问题，就是在四体或多体问题中证明上面描绘的现象确实会发生。我们唯一能够控制的就是初值条件。如何才能确定某个初始位置和速度恰好使第三个质点一次次返回到二体系统呢？如果第三个质点与二体系统或第四个质点靠近时被沿着错误的方向排斥出去将会怎样呢？这就是证明潘勒韦猜想的下一个困难。

如何逮兔子

萨瑞和波拉德使非碰撞奇点问题重新引起人们的关注。后者是伯克霍夫的“徒孙”，他的导师威德(David Widder)曾在哈佛大学师从伯克霍夫。波拉德是一位卓有才华富于创造力的数学家，善于运用自己的奇思妙想。1966年，他对 n 体问题中当时间趋于无穷大时解的渐近行为(即在充分长的时间以后轨道的形态)产生兴趣。而萨瑞那时是波拉德的学生，正在寻找博士论文的题目。当萨瑞得知他的导师的兴趣以后，他决定研究方程的解接近奇点时的渐近行为，并立即满怀热情地投入了工作。在完成博士论文后，萨瑞和波拉德合作改进了论文中的部分结果。由此他们发表了两篇优秀的论文。这就是一个长篇故事的开端。



照片 3.4 唐纳德·萨瑞。(唐纳德·萨瑞提供)

科学家的职业生涯同科学本身一样，成就一半来自谋划一半来自机遇。在恰当的时间处于恰当的地方，常常比周密地筹划自己的一生更重要。获得博士学位以后，萨瑞在耶鲁大学天文系得到博士后

的职位。这样的环境使他能够继续发挥自己的聪明才智从事研究工作和发表论文。1968年萨瑞成为西北大学的助理教授。这个许诺终身的职位使他有了长期的生活保障，从此开展的研究工作开创了他不平凡的职业生涯。1970年萨瑞开设一门课程，讲述他得到的有关 n 体问题方面的结果，卡尔·西蒙(Carl Simon)当时作为一名研究生学习这门课程。1年后卡尔前往伯克利，在赫希(Morris Hirsch)的指导下从事博士后研究工作。西蒙在伯克利利用萨瑞的课堂笔记讲授了类似的课程。他的听众中有一位名叫杰弗(Joseph Gerver)的年轻人，在几年后非碰撞奇点问题的研究中他起了重要的作用。所有这些人在不同的场合都会在本书中再次出现。

1971年夏天，萨瑞在巴西的萨尔瓦多市召开的一次会议上作关于非碰撞奇点问题的报告。当时莫泽和麦吉都听了萨瑞的报告。后文我们会发现麦吉在这个领域将做出至关重要的贡献，而莫泽作为我们这个时代最伟大的数学家之一，1990年在波鸿接受荣誉学位时指出：“非碰撞奇点问题是20世纪遗留的最重要的数学问题之一。”这使人们增长了对这个问题的兴趣。

1971年萨瑞证明的一个漂亮的性质推广了冯·塞佩尔定理。粗略地讲，他证明当时间趋于某个奇点时，如果质点在空间中的构形缓慢变化，那么系统的轨道必将导致碰撞。这意味着对于具有非碰撞奇点的系统来讲，质点必须剧烈地振荡。从潘勒韦开始，一些人曾经预言这一现象；另一些人则表示怀疑；但是没有人能够证明或者否定它。一个系统能够在发生如此剧烈的振荡的同时还存在有限时间内达到无界的解吗？质点在相互接近时如何才能避免碰撞呢？尽管萨瑞取得一些进展，然而问题显然越来越困难。产生的问题比获得的解答还要多，但是一点一点地，纵横字谜中的一些字母被放到了正

确的位置上。

萨瑞正在思考的另一个问题，是关于没有非碰撞奇点的解的性质。我们曾经指出，潘勒韦证明三体问题中所有的奇点都产生于碰撞。1973年萨瑞证明当 n 个质点在一条直线上运动时，它们遇到的第一个奇点必定是碰撞。接着他又证明方程的解如果不涉及多质点互相接近，就不可能产生非碰撞奇点。

关于科学家，特别是关于数学家，流传着许多笑话。有一个笑话是问：“数学家是如何逮兔子的？”回答是：“他逮了两只，放走一只。”许多情况下这个笑话与实际的情况相差不远。当一些问题看起来相当困难，所有的求解尝试都失败的时候，某个人回过头考虑更一般的问题，它包括最初的以及其他可能出现的困难问题，他试图解决这个一般的问题。令人吃惊的是，这一招在许多情况下都奏效。

萨瑞决定从不同的角度去攻克奇点问题。他采用逮兔子的策略：首先问在 n 体问题的所有解组成的集合中，具有奇点的解究竟有多少。该问题是在他解决了李特尔伍德的一个猜想以后想到的，我们将简要地描述一些细节。新问题的答案并不是企图回答初始的问题，但是它能够使我们更好地认清究竟可以找到多少具有碰撞奇点和非碰撞奇点的解。然而如何确定解的集合的大小呢？幸运的是，数学家早已具备了这方面的工具。人们（很自然地）称这个工具为测度论(measure theory)，首先我们阐述测度论中的一些基本思想，这有助于理解萨瑞的结果。

我们已经习惯于测量许多事物，对每一个事物都给出精确的测量度。只要被测量的对象看起来相当“规则”，我们可以测量它的长度、面积和体积。当我们离开常见的对象而考虑更加复杂的例子

时，问题就变得更加困难了。挪威的海岸线有多长？首先人们通过计算给出粗略的估计，但是如果将海湾计算在内，结果就会发生改变。更仔细地观察会发现每个海湾都包含许多更小的海湾，如此继续下去。沿着小的海湾和海峡，经过巨石、石块以及小鹅卵石……人们总是能够得到更精确的长度的估计。挪威的海岸线究竟有多长呢？现在我们认识到这个问题没有明确的答案，并且对它的长度是否有限表示怀疑！

海岸线问题可以在分形(fractals)理论中找到它的解答。分形理论用大量优美而奇特的计算机图形描绘越来越精细尺度下的行为，它们超出了本书的主题。我们只需知道一个集合具有正勒贝格测度或零勒贝格测度的含义。勒贝格测度这个概念是由勒贝格(Henri Lebesgue, 1875~1941)在20世纪初定义的。简言之，在给定维数的空间中集合 M 的测度为零，意味着如果在这一空间中随机选取一点，那么该点属于 M 的可能性是无穷小的(但不是不可能的)。相反，若集合 M 具有正测度，那么随机选取的点在 M 内的可能性是有限的正数。下面作为例子给出一维空间中所包含的几个集合。为简单起见，选取线段 $[0, 1]$ ：0和1之间的全体实数，包含两个端点；见图3.6。

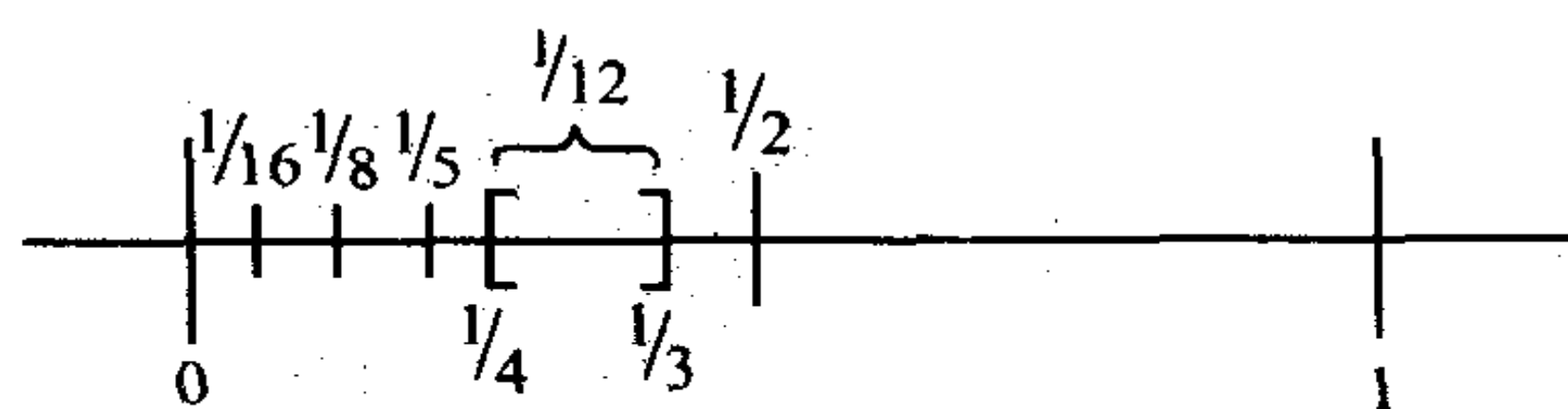


图 3.6 区间 $[0, 1]$ 中的集合。

首先选取 $[0, 1]$ 中的一个线段，例如 $[1/4, 1/3]$ ： $1/4$ 和 $1/3$ 之间的全体实数。它的勒贝格测度为 $1/3 - 1/4 = 1/12$ ，是一个正数：只是区间 $[0, 1]$ 总长度的 $1/12$ 。可以证明不是一个纯粹点的任何线

段都具有正的勒贝格测度，其值等于线段的长度。接着选取由三个点组成的集合 $\{A, B, C\}$ ；它的勒贝格测度是零：每个点的测度都是零，有限个点组成的集合的测度仍然是零 ($3 \times 0 = 0$)。随机选取一点，我们选到预先指定的点的机会是零。现在考虑由无穷多个点组成的集合， $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$ ；尽管结论不是显然的，它的勒贝格测度仍然是零。上述情形中勒贝格测度与长度的通常含义是一致的，因此直觉上是合理的：由点组成的集合，不管它包含多少个点，其长度为零。

下面我们看一个更加复杂的例子。类似于曾经描述过的与斯梅尔马蹄相关的集合 Λ ，可以定义康托尔集。为此选取线段 $[0, 1]$ 并移去线段中间的 $1/3$ ：开区间 $(1/3, 2/3)$ (即三等分 $[0, 1]$ 后，去掉端点 $1/3$ 和 $2/3$ 的中间一段)。剩余的集合由 2 条线段 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 组成；参见图 3.7。现在在每条线段上移去中间的 $1/3$ 的开区间。新的集合包含 4 条更短的线段，每条的长度为 $1/9$ 。重复以上步骤，我们得到 8 条更短的线段，以此类推。无限次地重复上述过程就得到所谓的康托尔三分集。它包含从区间 $[0, 1]$ 中移去所有的“中间 $1/3$ 的开区间”以后剩余的点。如果计算所有被移走的

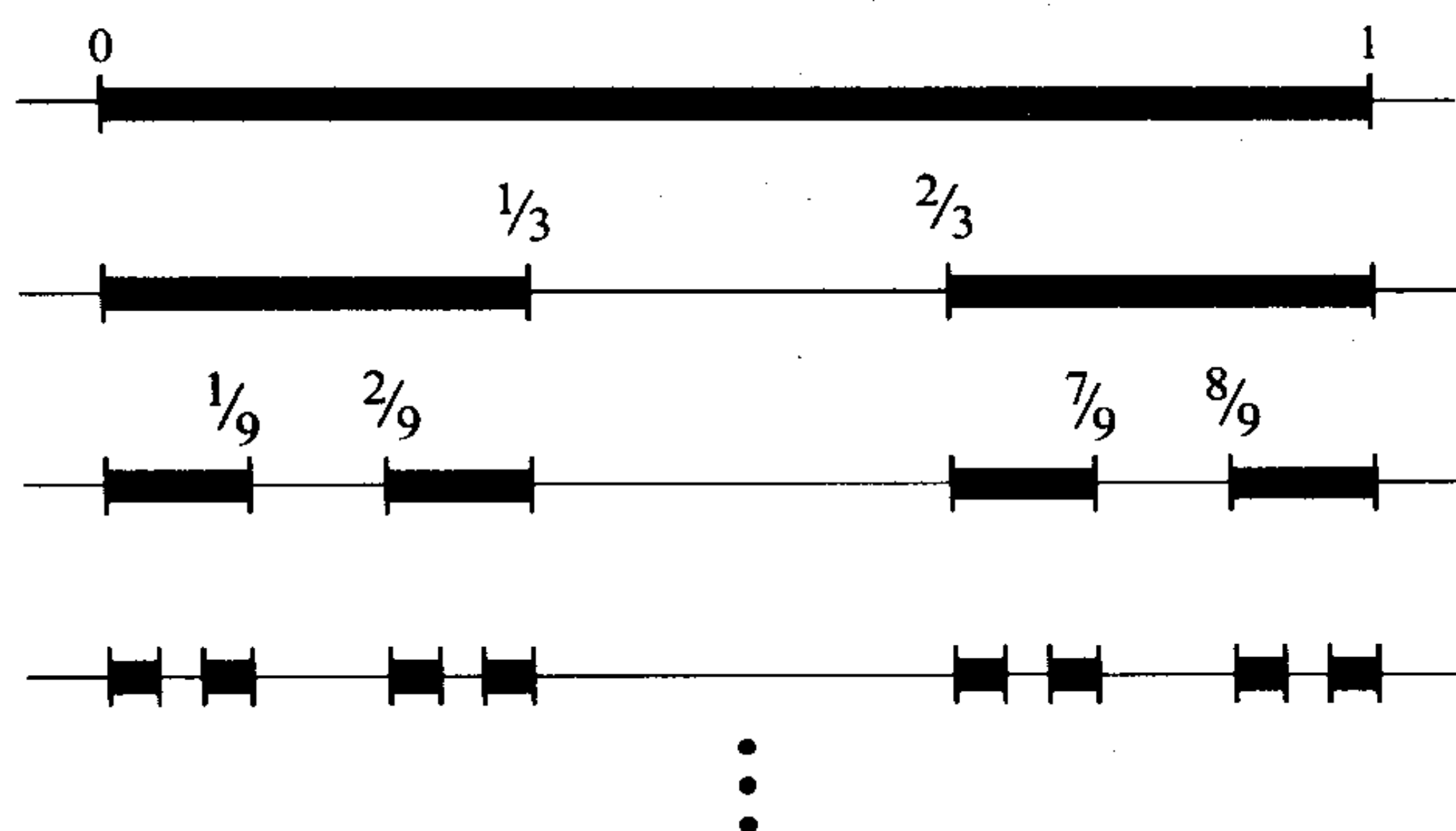


图 3.7 康托尔三分集的构造。

(无穷多的)线段的勒贝格测度，我们会发现它们的和等于1。(像上述振荡问题一样，这也是几何级数的求和。)由于线段 $[0, 1]$ 的勒贝格测度也是1，而我们从其中移走一个测度为1的集合，因此保留下来的康托尔三分集的测度一定是零。如果在上述构造的每一步移去中间的 $1/5$, $1/7$ 或者其他任何固定比例的开区间，那么结论是一样的。尽管线段中保留的点具有有限的分形维数(fractal dimension)，但它的“长度”为零。

还存在其他类型的康托尔集。同前面一样，假设我们首先移去线段中间的 $1/3$ ，接着从保留的2条线段中分别移去中间的 $1/9$ ($9 = 3^2$)，然后从保留的4条线段中移去中间的 $1/27$ ($27 = 3^3$)，如此继续下去。将被移去的所有线段的长度加起来，我们得到一个小于1的数。此时保留在区间中的点组成的康托尔集具有正的勒贝格测度。直观地看，在每一步我们都移去比例更小的线段，因此保留在线段中的点比前面的情形增多了。这两种情形中康托尔集都是由不连续的点尘组成的，但是第二种情形中它是由“较厚的”点尘构成的。这里得到的由点组成的具有有限“长度”的集合违反了我们的直觉！这种较厚的康托尔集将在第5章的柯尔莫哥洛夫-阿诺德-莫泽理论中再次出现。

一条线段在平面上的勒贝格测度是零，但是平面上完整的正方形——不管它多小——都具有正的勒贝格测度。虽然在三维空间中圆盘的勒贝格测度为零，但是空间中的实心球具有正的勒贝格测度。平面与空间中还存在一些类似于线段上的康托尔集的奇特例子。通常人们很难立即指出一个集合的勒贝格测度为正还是为零。

值得注意的是，我们一直特别强调勒贝格测度。这是因为还存在冠以其他数学家名字的其他许多测度。同时存在推广了所有测度

的抽象的测度。勒贝格测度是最常用的；在简单的情形中，勒贝格测度与通常的长度、面积和体积概念是一致的。

测度论不仅应用于直线、平面和物理空间中的集合，还可以应用于各种不同的对象，其中包括微分方程解的集合。人们可以问具有某种特殊性质的解的子集(比如发生碰撞的解的集合)的勒贝格测度是多少。不久我们将会回到这个问题。

成功的测度

旋转的龙卷风在迅速迫近了。它在密歇根湖以外的大草原上形成，如此接近足以让人感到不安。但这对于中西部地区的人们来说并不是一件稀奇事，几乎很少有人忧心忡忡。人们可能会听到诸如此类的警告：“啊，又一场龙卷风将要来临了！”正是因为考虑到最狂暴的龙卷风可能会袭击这一宁静的地区，西北大学校园内的建筑才设计成大块的砖石结构。这所令人仰慕的学术机构就坐落在芝加哥市郊的埃文斯顿，那是一座宁静、风景如画的小城，远离市区嘈杂的街道。

萨瑞喜欢比家人更早起床。他的妻子和两个小女儿仍在熟睡，因此他能利用早晨的几个小时做一些工作。随后与家人共进早餐，度过快乐的半小时时光。然后他与她们吻别赶去上班。前往学校的途中他可以思考正在研究的工作或者将要讲授的微分几何课程。他喜欢这样开始一天的工作。但是那天早晨不能像往常那样步行，风实在太大了，他只好开车去学校。萨瑞整个上午都全神贯注于计算之中，竟完全没有注意到中午的龙卷风。他的头脑中盘旋着另一种旋风。他终于理解了在相应的碰撞奇点中所发生的现象。他打算为这个思考多年的问题下最后的结论。

那是在1968年秋天一个雾蒙蒙的夜晚，当时萨瑞是西北大学的

一名新教员。他喜欢临睡前在昏暗的灯光下看一会儿书，当天他从图书馆带回一本李特尔伍德的通俗文集《一位数学家的手记》。每一位数学家在浏览这本小书时，都可能会感同身受。它讲述 20 世纪上半叶与哈代(G. H. Hardy, 1877~1947)共同主宰着英国数学界的李特尔伍德学生时代的有趣故事，描写了在他生活中发生的各种事件。

我们曾谈及李特尔伍德关于范德波尔方程方面的工作，但他的兴趣相当广泛。其书中的一章讲述作者如何证明 n 体问题的一种有趣的性质，同时提到导致二体碰撞的初值条件的集合在所有解的集合中的测度为零。我们曾经指出，上述结论蕴含着碰撞是几乎不会发生的(very improbable)，但不是不可能发生的(not impossible)。几乎所有初值条件的选择都会产生没有碰撞的解。在该书的一个旧版本中有一个脚注，以开玩笑的语气谈到如果三体碰撞发生于正勒贝格测度的解的集合中是可能的，就会导出自相矛盾的结论。但是上面的脚注在新版本中被删掉了。

萨瑞对这个脚注很感兴趣，但是没有引起足够的重视。然而几个月后，李特尔伍德出版了一本名为《实分析和复分析中的若干问题》的书。书中提出的一个悬而未决问题，涉及 n 体问题中导致碰撞的初值条件的集合的测度。在读了这本书后，萨瑞开始重新考虑这个问题。他有一些如何解决它的想法，并想立即开展工作。没有时间可以浪费了。他清楚这本书一经出版，其他人很快就会着手对付这个难题。对萨瑞来讲，寻求证明的比赛从那天晚上便开始了。

经过一个不眠之夜，早晨的时候萨瑞认为他已经完成了。他到学校去授课，并且告诉一些同事和研究生他已经解决了李特尔伍德的一个难题。中午时他感到有些疲倦，回家小睡了一会儿。醒来时却大失所望。他意识到自己的证明并不完备，忽略了退化中心构形

(degenerate central configurations)的情况，在第4章的结尾，我们会详述这个概念。在陶醉于自己的证明时，他相信已经找到一种技巧来回避这些困难，但现在他知道所做的计算是错误的。问题比他预想的更加困难，他这才认清其中的一些真正的障碍。

第二天，萨瑞告诉朋友们自己先前的宣称过于草率。他没有找到证明，至少现在还没有。但一位同事没有听到萨瑞的更正，西蒙在到其他大学开会和作报告时，将萨瑞已经证明李特尔伍德关于 n 体问题的猜想的消息告诉了每一个人。几个月之后，萨瑞陆续收到许多著名人士的来信，他们索取论文的预印本——一篇根本不存在的论文。

萨瑞处于一种尴尬的境地。尽管他继续拼命干，但仍然缺乏足够的证据。其间，他曾经放弃最初的想法，试图用其他方法来解决这个猜想。幸运的是，施蒂费尔邀请他到苏黎世的 ETH 工作一段时间使他摆脱了困境，至少在一段时间里摆脱了困境。他整装前往瑞士，希望在访问期间可以得出证明，以便回来时能够回复索取预印本的信件。

在苏黎世，萨瑞专注于李特尔伍德猜想，并最终解决了它。但这次他没有告诉任何人。他需要有绝对的把握，为此他不得不弄懂更多的细节。回到埃文斯顿，他又仔细检查了证明的每一行。他会一直记得那个决定性的忙乱的一天，却不是因为那场龙卷风。

1971~1973年，萨瑞发表了3篇论文。在文中，他实质上证明了在 n 体问题中，导致各种碰撞的初值条件的集合的勒贝格测度是零。那么碰撞不值得研究了吗？如果几乎所有的轨道都不发生碰撞，为什么数学家不将他们的注意力转移到其他课题呢？表面上答案是肯定的，但深一层的思考暗示着相反的答案。我们下面就解释一下其中的原因。

碰撞的重要性不是由于它自身的原因，而是因为碰撞是奇点。在奇点的邻域中相空间的结构会发生剧烈的变化，从而使经过奇点附近而没有终止于奇点的解有着奇怪的动力行为。在图 3.4 所示的毕达哥拉斯问题的数值模拟中，我们曾经发现这一点。从某种意义上讲，碰撞点对应于相空间中的无底洞，当质点接近它时，(引力)势能转化为动能，它的相对速度显著地增加，越靠近时速度就越大。因掠过奇点的解的集合具有正的勒贝格测度，故不能将它们忽略。而奇点的彻底研究将有助于我们理解这些轨道。

几年后，萨瑞回到他在那个夜晚的想法。他改进了自己早期关于李特尔伍德猜想的工作，证明导致碰撞的解的集合形成一些低维流形。这个结果一方面蕴含着导致碰撞的解的勒贝格测度为零，另一方面提供了对这些解的几何理解。萨瑞最终证明在四体问题中，含有奇点的所有解的勒贝格测度为零。从而说明四体问题中非碰撞奇点也是非常少见的。人们还不清楚，在 n 体问题($n > 4$)中，非碰撞奇点构成的集合究竟有多大，许多人都认为该集合也可以忽略不计。

萨瑞仍然不知道非碰撞奇点是否确实存在。这个问题重新引起他的注意是在多年以后他开始指导来自中国的一位新研究生夏志宏的时候，后文我们将会细述这件事以及他们后来开展的富有成效的合作。

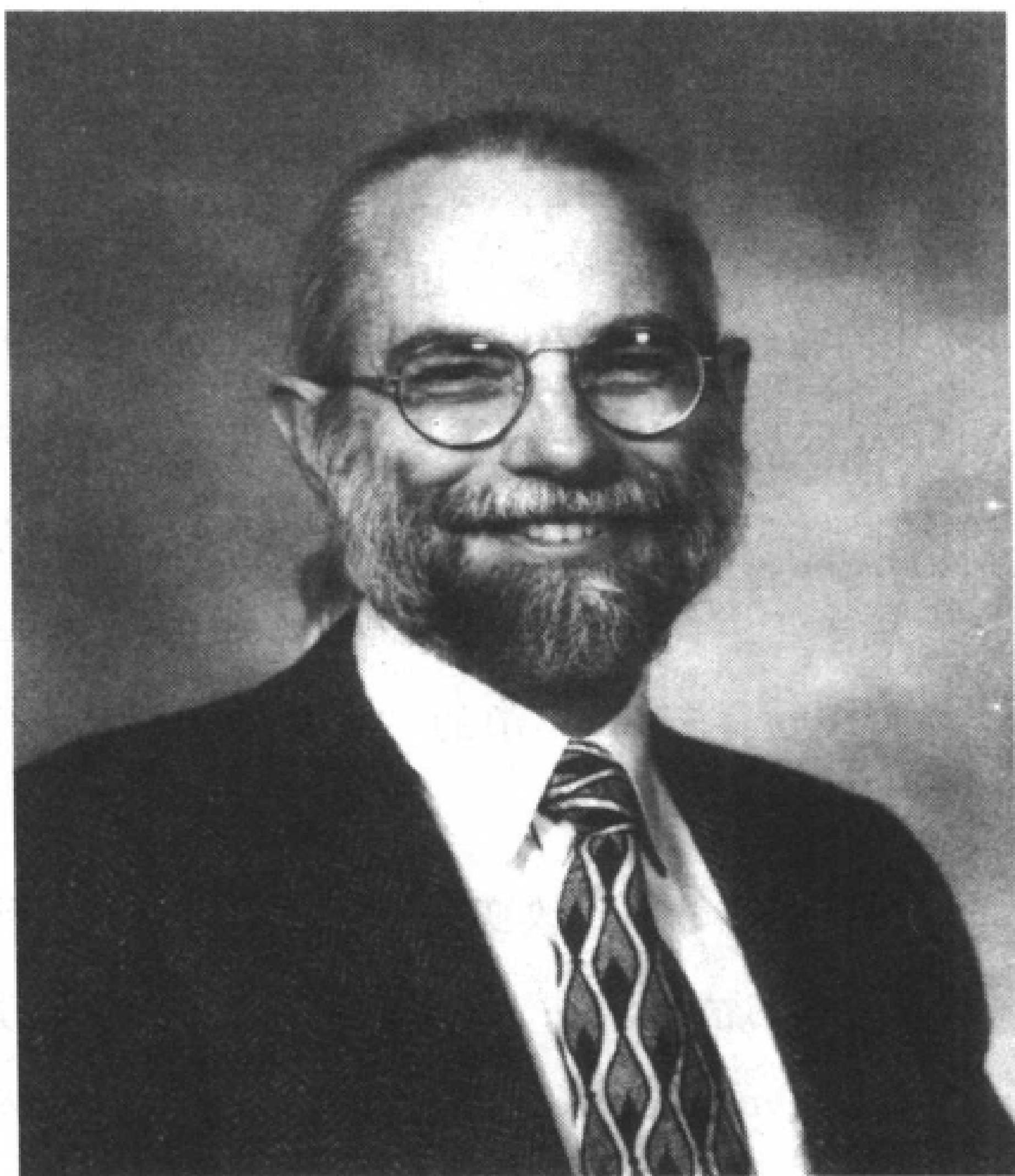
有趣的是萨瑞的研究兴趣还包括表面看起来差别很大的其他课题——数理经济学。他将动力系统理论应用于经济和政治问题。例如，他曾经证明美国国会中议员名额的分配问题将导致数学混沌(mathematical chaos)，即不管采用什么方法，各个州都会有利有弊，不可能存在真正公平的分配。

萨瑞最近主持西北大学的阿瑟·潘寇和格拉迪斯·潘寇(Arthur and Gladys Pancoe)数学讲座。他特别适合担任这个职位——阿瑟·

潘寇曾因潘勒韦超越性方面的工作于 1951 年获得硕士学位。

将碰撞正规化

应邀在国际数学家大会上发言是一件相当荣耀的事。如第 2 章所述，这些会议每 4 年才举办一次，囊括各个领域的数学，与会者是来自世界上几乎所有国家的数千名数学家。在如此众多的同行组成的听众面前展示自己工作的机会是不多的。1978 年夏天，国际数学家大会在赫尔辛基举行，麦吉应邀在会上作报告。他的报告是关于天体力学中碰撞奇点分析的一种新方法。



照片 3.5 理查德·麦吉。（理查德·麦吉提供）

这个重大突破始于 1970 年，当时麦吉开始研究直线三体问题中

的三体碰撞解，如上所述，在这些问题中质点沿着一条直线运动。他感到在攻克复杂的问题以前必须理解简单的情形。简单问题为孕育新方法和新观念提供了极好的试验台。直线三体问题尽管是 n 体问题 ($n > 2$) 中最简单的情形，它仍然是十分困难的，甚至今天我们还没有完全解决。

1969 年，麦吉有幸获得纽约大学柯朗研究所提供的博士后职位。尽管他出生并成长于圣迭戈，但经过在威斯康星州麦迪逊作研究生的 4 年，他已经习惯了中西部地区令人不舒服的潮湿气候。因此在纽约度过 12 个月的境遇根本无法影响他。他渴望加入到柯朗研究所著名的研究群体中。对于这个 26 岁的加利福尼亚小伙子来说，良好的研究氛围和在研究所的这段时光对他的未来将产生决定性的作用。他最初接触的重要的数学工作是由莫泽讲授的，莫泽是 KAM 理论——关于这一理论我们在第 5 章会作介绍——的共同创立者。那年，莫泽讲授(我们曾经在第 2 章中谈到的)西特尼科夫问题。他描述了阿列克谢耶夫关于混沌振荡的结果。不久以后，麦吉旁听了由莫泽的一位研究生雅各博维茨(Howard Jacobowitz)所作的报告。雅各博维茨讲述一篇关于三体问题中三体碰撞正规化(regularization)的论文，这篇论文发表在将近 30 年前的《数学年刊》上，作者是西格尔(Carl Ludwig Siegel)。

将碰撞正规化，意味着在不改变能量的情况下通过反弹在碰撞后延拓运动。二体碰撞的情形早在 20 世纪头 10 年就被一位瑞典裔芬兰人桑德曼(Karl Sundman, 1873~1949)解决，论文最后发表在 1912 年的《数学学报》上。桑德曼证明碰撞以后运动的延拓总是可能的。西格尔问如果三质点碰撞会发生什么事情。运动能否在碰撞以后以一种合理的方式延拓出去？西格尔指出在一般情况下是不可能

的。精确地讲，他证明对于几乎所有的质点的质量取值，都不存在通过三体碰撞的解析解。（解析性是一种技术性的特征，与描述解的函数是如何定义的有关，其细节我们在此不加考虑。）

麦吉决定研究西特尼科夫问题(图 2.11)。经年累月，他获得了一些重要的结果。为此，他发明了一种精巧的变换，将描述质点 C 的微分方程转化为更明显的形式。所产生的新变量在解趋于无穷时“化解奇异性”。莫泽在他 1973 年出版的《动力系统中的稳定运动和随机运动》一书中，为叙述其中的一些结果应用了麦吉变换。

麦吉真正感兴趣的还是正规化问题。西格尔的结果引起他的兴趣，但他没有发现这个结果与真正的行星运动的动力学之间的任何联系。“天体碰撞不是弹性的，”他想，“为什么要找麻烦去考虑碰撞后发生的现象呢？”他在思考怎样提出问题才能具有真正的物理意义。

天体台球

查尔斯·康利(Charles Conley, 1933 ~ 1984)是麦吉在威斯康星大学的博士论文导师。与斯梅尔和莫泽一样，康利是 20 世纪 60 和 70 年代西方动力系统理论研究中最有影响的人物之一。他非常慷慨并且毫不保留自己的思想，将许多人引入了数学领域。他的学生们继续在这些领域做出重要的贡献。康利多次鼓励其他人发表从他的想法引发出来的论文。

1970 年，康利对三体碰撞问题产生兴趣。他和麦吉继续保持着联系，当后者在纽约做博士后期间他们又在一起工作了。几次讨论以后，他们表述了一个精确的问题：发生碰撞的质点的运动是否连续依赖于初值数据？

我们曾经指出科学研究始于未知。但是人们在没有问题的情况

下无法寻求解答。表述恰当的问题经常是整个工作的一半。上述问题确实是基本的，它在行星运动的研究中也有着深刻意义。用物理语言来讲，问题是：碰撞轨线是那些接近于碰撞而又避免了碰撞的诸多轨道的极限情形吗？对于二体相遇来讲，问题的答案是肯定的。二体问题中的质点仅当它们沿着直线运动时才会发生碰撞。在其他情形中，约翰·伯努利曾经证明，质点沿着椭圆、抛物线或者双曲线轨道运行。如图 3.8 所示，弹性反弹的运动可以看作是椭圆序列的一种自然的极限，这些越来越扁平的椭圆轨道最终退化为一根直线。这一事实的严格数学证明，是由康利的另一名学生伊斯顿 (Robert Easton) 在 1971 年给出的。伊斯顿的方法是应用数学割补术，它是拓扑学中的一种技巧，建立在 20 世纪 20 年代意大利数学家列维-奇维塔 (Tullio Levi-Civita) 引进的变换上。

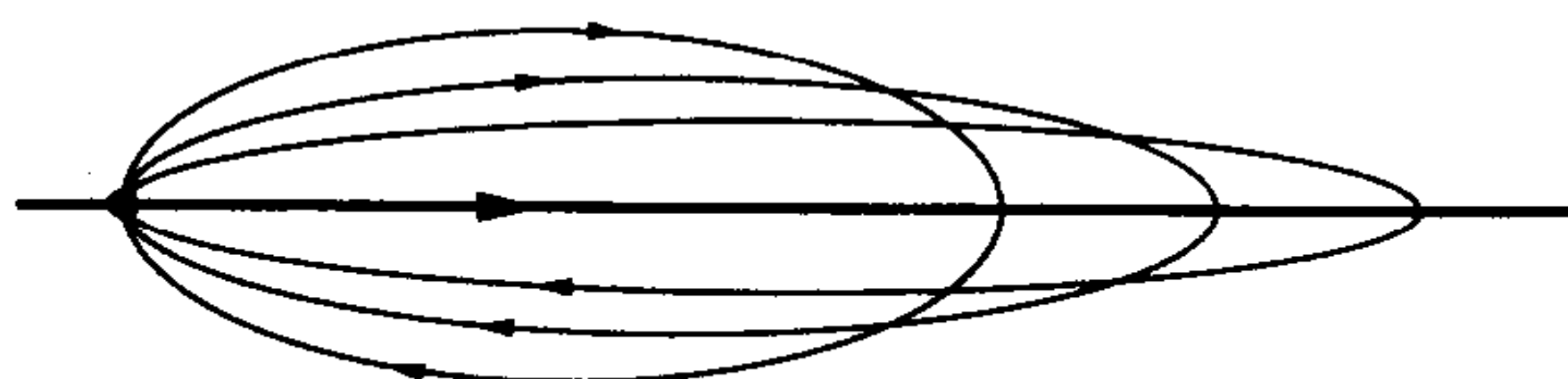


图 3.8 直线轨道是椭圆运动的一种极限情形。

这项工作表明，物理上恰当的问题不是考虑运动是否能够（解析地）延拓到碰撞以后，而是研究运动能否扩张出去使它附近的轨道与之相似。现在我们回到河流的例子，考虑河流中央的岩石附近的流。除了直接冲向岩石的一股水流将与岩石发生“碰撞”以外，所有的流线都在岩石的两侧光滑地流过。因此在天体力学中，康利和麦吉考虑奇异的三体碰撞轨道是否会在相空间中与自身所处的位置相适应，从而它们与碰撞附近的轨道能够很好地协调起来。



照片 3.6 查尔斯·康利。(凯瑟琳·A·康利提供)

伊斯顿已经研究了二体碰撞。三体碰撞会有什么样的结果呢？康利有着敏锐的洞察力。他建议比较三体问题和台球游戏。任何有经验的台球选手都懂得，一旦三个球同时发生碰撞，就很难预测它们在碰撞后的行为。但这些只是经验的结果而不是经过证明的事实，不能向我们提供所发生的现象的明确内涵。康利想要把这种直觉转化为精确的数学陈述。他设想三个球在同一条直线上，如图 3.9 所示，并且提出下面的一组思想实验(thought experiments)。

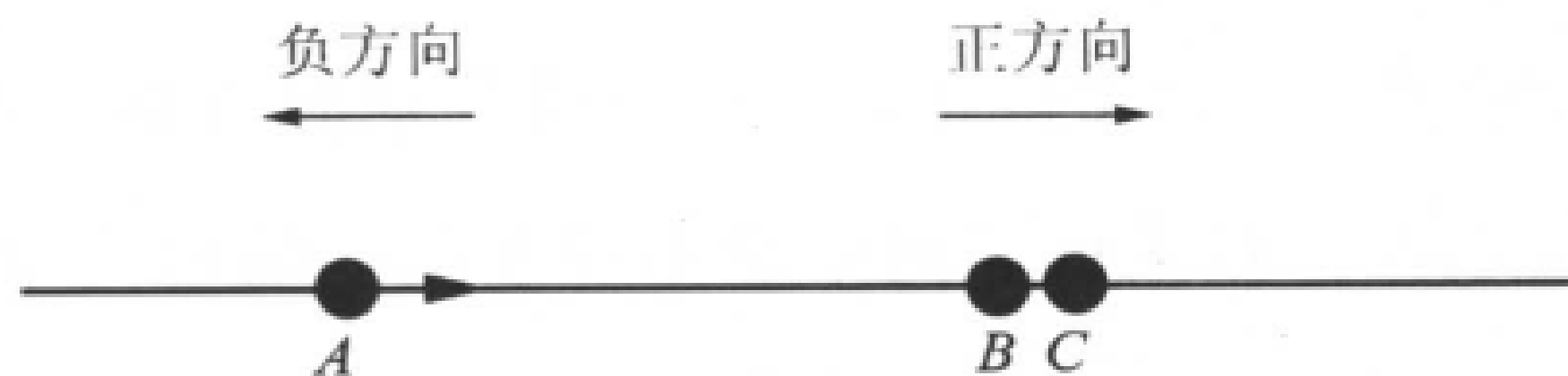


图 3.9 康利放置的台球暗示我们三体碰撞关于邻近的轨道不是可正规化的。

球 A 首先沿着正向朝静止的球 B 和球 C 运动。球 A 与球 B 碰撞后沿着负向返回，而 B 沿着正向运动与 C 发生碰撞。在第二次碰撞以后， B 返回朝 A 的方向运动， C 则沿着正向运动远离 A 和 B 。构形中发生了质变：球 B 和球 C 在开始时相互靠近，但是经过两次二体碰撞后 A 和 B 相距很近， C 却独自远离它们。最初由相近的 B 和 C 组成的一对球变成了 A 和 B 的组合。

接着康利设想将球 B 和球 C 互换，此时 C 在 B 和 A 中间。由于 B 和 C 过去和现在一直距离很近，因此初值条件几乎没有改变。但是在新的初始位置重复游戏过程， C 就会离开 B ，与 A 组成新的一对，而 B 则远离它们。

麦吉很快领悟了游戏的内涵。尽管只是稍微改变一下初值条件，但是两种情况下 B 和 C 最终的运动状态是完全不同的。（要造成小的改变， B 和 C 就必须放置得很靠近，这样两个二体碰撞才接近一个三体碰撞。）这就是解关于初值数据的敏感依赖性的明晰证明。康利还指出这可能意味着三体碰撞的不可正规化性(nonregularizability)，这是因为两个解都接近于三体碰撞——始于相空间中几乎同一个点的两个解——在它们发生三体接近之后却有着非常不同的动力行为。

直线运动的台球游戏是有建设性的。但是现在麦吉和康利不得不着手解决万有引力作用下质点的同样问题，而不是简单的弹性碰撞。他们尝试首先回答直线三体问题的可正规化性问题。麦吉将去证明当质点接近于三体碰撞时，中间的质点将离开同一系统的另一个质点而与余下的一个质点组成新的二体系统。康利则思考其余的问题。当时他们还不知道麦吉负责证明的引理不仅在他们的论文中起着关键的作用，而且在天体力学奇点理论的未来发展中起了最重要的作用。

1970 年秋天，麦吉获得在明尼那波利斯的明尼苏达大学数学学

院的终身职位。他继续研究西特尼科夫问题并开始思考关于三体碰撞正规化的引理。虽然在第一个问题上取得很大进展，但他为解决第二个问题所做的努力显示了问题的真正难度。他尝试了许多想法，希望进一步洞察这个问题，他甚至应用了 50 多年前列维-奇维塔在二体碰撞正规化研究中所采用的变换。他所有的努力都失败了，整整 1 年以后他仍未找到答案。

比康利更焦急的人，一定会对此心灰意冷的。此时，康利已经完成了论文中他那部分，正期待着麦吉给出引理的证明。他甚至草拟了这篇论文，留下一段空白等待麦吉去填补。所有的讨论都是基于这一空缺的结果展开的：没有它所有的问题都无法继续进行。现在麦吉感受到两方面的压力。一方面，他不得不发表文章：没有一所大学会向在研究工作中未取得明确进展的人提供终身职位。另一方面，令他感到不安并且尴尬的是让他过去的导师处于期待之中。尽管他在坚持不懈地努力，他还是被这个问题的错综复杂所迷惑。

人们常说幸运总是伴随着坚韧不拔的人。一天麦吉回忆起他过去工作中用过的一个技巧。1965 年，当时是研究生的麦吉对寻找限制性三体问题中庞加莱映射的截面产生兴趣(参见图 1.11)。他设法确定和分析庞加莱映射的截面，并且决定将得到的结果向一个刊物投稿。但最主要的是他希望看到自己的处女作发表。在撰写论文时，他找到一篇文献提到伯克霍夫的学生在 20 年代发表的一篇论文。原来麦吉近一年的工作都是别人预先就研究过的，因为这篇早期的论文已经解决了他研究的问题。现在 6 年过去了，麦吉认识到要是结合西特尼科夫问题中用到的方法，他过去的一些想法或许能够处理正规化问题。他通过推广自己过去的结果发现了一些新的变换。这一方法确实被证明是解决正规化问题的一把钥匙，今天人们称其为麦吉变换。

当康利阅读了麦吉手稿中的证明并理解了他的思想以后，他觉得自己对于该问题的贡献微不足道。一向慷慨地对待同事和学生的康利打电话给麦吉，请他独自发表这篇文章。该文章最终以麦吉为唯一的作者发表于1974年欧洲的《数学发明》杂志上。

麦吉的想法是引进新的坐标系，使三体碰撞的奇点“破裂”，从而将奇点去掉并在同一位置粘上一个光滑流形。更确切地讲，三体碰撞对应于相空间中的一个点，它像河流中的礁石一样阻挡了轨线的前进。使该点破裂，相当于用放大倍数无穷大的显微镜观察它。麦吉看到的是一个畸变球体，它的四个角被拉到无穷远，而角的顶端被截去。图3.10是一个略图。麦吉称此曲面为碰撞流形(collision manifold)。

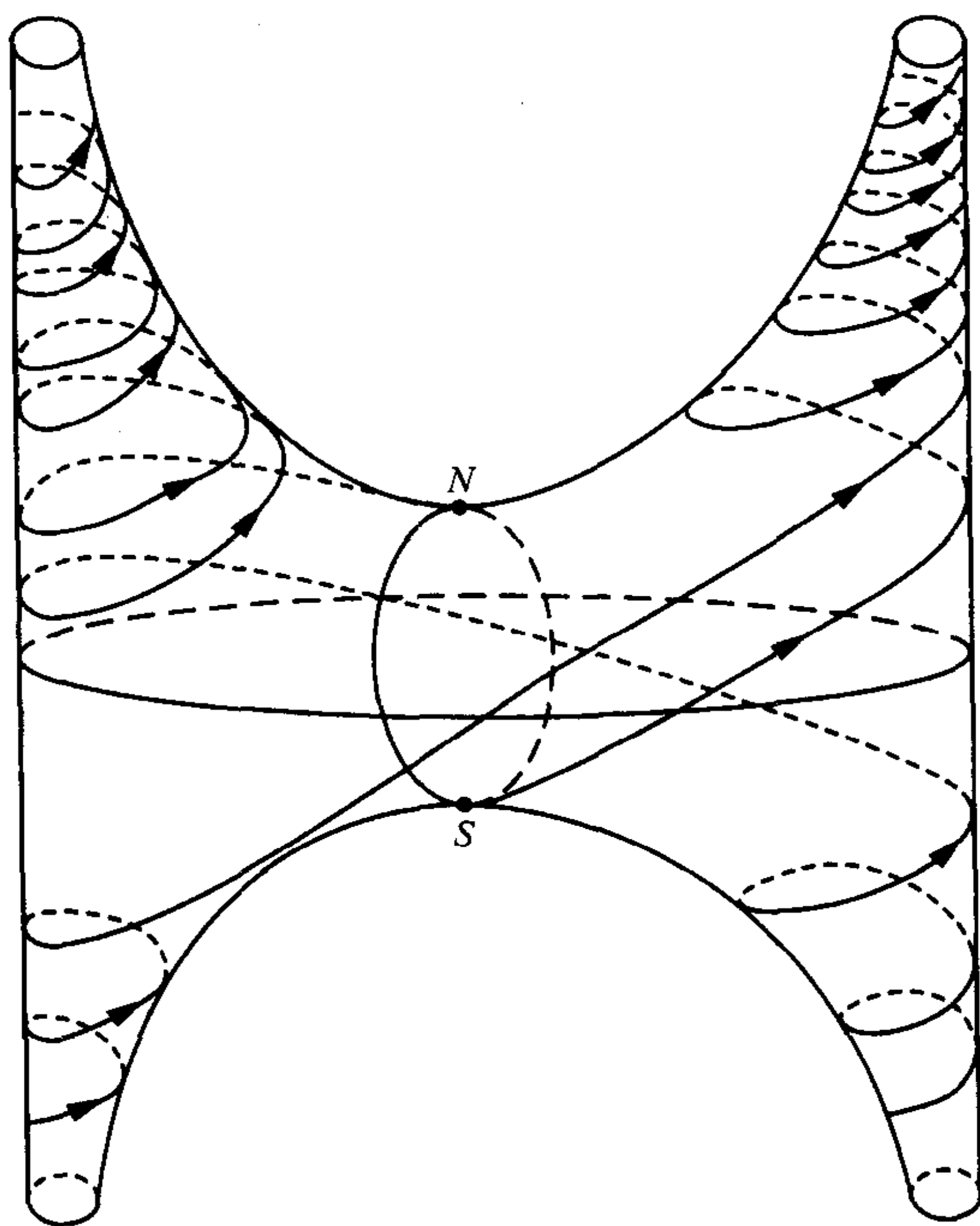


图 3.10 直线三体问题中碰撞流形上的流的一种可能构形。

麦吉继续研究碰撞流形上的流。尽管没有直接的物理意义，但是有关这种流的知识将使我们理解三体碰撞附近的解围绕带角的球面旋转的行为。这是解关于初值条件连续性的直接推论。轨道在接近这一奇怪球面时的行为一定类似于它在带角的球面上的行为，至少在一段时间内会是这样的，如同二体问题中接近弹性反弹运动的狭窄的椭圆轨道连续地变化一样。流沿着碰撞流形向上盘旋，它只有两个不动点，我们分别记其为北极点 N 和南极点 S 。三体碰撞发生于相空间中的轨道“到达” S 时，三体排斥(triple ejection)则发生于轨道“离开” N 时。

进一步，麦吉变换将奇点附近的时间和速度变慢，从而使轨道需要无限长的(虚拟)时间才能到达南极点 S 。利用无限长的时间区间和在碰撞时减慢到零的(虚拟)速度代替碰撞瞬间的时间和速度。这些畸变变量向我们提供了三体碰撞附近一张放大了的更为详实的图形。这一奇怪流形在研究碰撞及其附近的轨道时非常有用，它帮助我们理解碰撞质点的极限行为以及接近并掠过三体碰撞的轨道的结构。

借助于这一巧妙的几何观点，人们发现了许多新的性质。其中之一是关于正在接近三体碰撞的质点如何高速逃离，60 年代的数值结果曾经预测到这一点。麦吉在论文中利用碰撞流形证明，当质点的质量取一些特殊值的时候，三体碰撞不可正规化。在后来的论文中，他还证明除了零测度的集合以外，这对质量的所有取值确实都成立。这就解决了他和康利想要研究的问题。

麦吉的方法最重要的特点是它的适用性非常广泛。人们利用它找到了许多众所周知的性质的更加优美的新证明。这种方法可以推广到 n 体问题中的所有碰撞问题，以及微分方程理论中对奇点的其他许多研究。今天人们很难想像不应用麦吉变换如何去研究天体力

学中的奇点。

我们曾经指出，康利数学桃李满天下，他同自己的学生一起在动力系统领域发展了许多重要的几何和代数方法；麦吉的工作就是一个例子，而“孤立不变集”和“康利指标”是另一些例子。这些方法都是今天在证明微分方程的微妙性质时常用的，不论是常规的还是计算机辅助的证明。然而，一旦有人问起描述相图结构的最自然的语言时，据说康利总会如此这般地回答：“对我来讲，研究相图结构的最自然的语言仍然是英语。”

会议巧遇

解决潘勒韦猜想的下一个进展，是由麦吉和普林斯顿大学的马瑟(John Mather)获得的。麦吉和马瑟扩展了新的碰撞流形方法的应用。他们的合作是以一种相当不寻常的方式开展的。两位数学家都对潘勒韦猜想感兴趣，但直到1974年夏天以前他们都没有接触过，那年夏天在风景如画的西雅图附近的小城巴泰尔召开的会议使他们聚到一起。（他们在此前未曾谋面也并不奇怪，好戏在后头。）

尽管麦吉在研究三体碰撞问题时想方设法证明非碰撞奇点的存在，但最终他还是没能完成证明。马瑟却是从完全不同的途径得知这个问题的：他在1965年与同事尼尔森(Ed Nelson)的讨论中获知此问题。30年代冯·诺伊曼在普林斯顿奠定了算子理论(operator theory)的基础，在讨论一类相关的函数的特殊性质时问题产生了。为了理解这类函数，需要弄清楚其奇点构成的集合的维数；于是这个问题同非碰撞奇点是否存在联系起来。尽管各自的动机不同，马瑟和麦吉却有着一个共同的目标。

康利在巴泰尔将马瑟和麦吉互相引见给对方。他们马上就开始

谈论各自的兴趣，希望不久以后可以进行合作。但到那天晚上，他们发现各自都回答了对方提出的问题。第二天以及接下来的几天他们都在继续讨论问题。看起来就像拼图游戏中每个玩家都拿着对方需要的拼图一样。不到一周的时间他们就一起完成了论文的框架。在会议的最后一天，马瑟将他们合作的论文的初稿交给麦吉，这篇论文最后发表在巴泰尔会议的论文集中。

在那个星期中，马瑟和麦吉得到了什么结果呢？他们证明了在直线四体问题中在有限时间内达到无界的轨道的存在性。这并没有解决潘勒韦猜想，因为他们的非碰撞奇点仅仅是在经过二体碰撞后得到的。（从上述萨瑞的结果已很清楚，在直线问题中产生的第一个奇点一定是碰撞。）通过正规化过程，他们将解延拓到这些碰撞以后。从物理学的观点来看，这意味着在发生弹性反弹之后运动在继续着，没有丧失或者获得能量。在经过无穷多次此种二体碰撞以后，就产生了非碰撞奇点。

上述过程参见图 3.11。适当选取 m_1, m_2, m_3, m_4 的质量、初始位置和速度，使得 m_1 和 m_2 相互靠近，形成二体系统。质点 m_3 在质点 m_4 与二体系统之间振荡。 m_2 与 m_3 以及 m_3 与 m_4 之间的碰撞发生在相继时刻 $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ ，通过弹性反弹对它们进行正规化。在每次 m_1, m_2 和 m_3 接近三体碰撞时，质点 m_3 就被以很高的速度排斥并推向 m_4 。 m_3 在与 m_4 发生碰撞以后又被推向二体系统，如此反复地进行下去。



图 3.11 马瑟与麦吉的例子。

发生碰撞的时刻在 k 趋于无穷大时收敛到一个有限值 t^* 。在 t

趋于时刻 t^* 时, 二体系统趋于负无穷大(即趋于直线的左“端”), 而 m_4 趋于正无穷大(趋于直线的右“端”), 此时 m_3 一直在两者(二体系统和 m_4)之间往复运动。同时, m_1 与 m_2 之间的距离缩短了, 它们丧失的势能转化为 m_3 的动能。按照这种方式, m_3 的速度可以非常快地增长, 使得它往返于二体系统与 m_4 之间的时间间隔逐渐缩短。这一貌似简单的方案的构造与验证, 需要注入新的思想和相当复杂的技巧。

事实上, 潘勒韦本人曾经提出非碰撞奇点可能发生在类似于马瑟和麦吉描述的情形中。潘勒韦没有特别地讨论直线情形, 但是运动却接近于直线。在他的情形中, 二体碰撞是可以避免的, 但是如何避免呢?

1979年, 雅各博维茨的学生谢尔顿(Robert Sheldon)在他发表的一篇论文中证明, 如果四体问题的解在不发生二体碰撞时存在非碰撞奇点, 那么整个构形必定渐近趋向于直线构形。尽管许多人企图证明这样的解存在, 但至今我们还没有一个例子能够说明在四体问题中潘勒韦猜想是正确的。

从四体到五体

一个著名的悬而未决问题, 就像丰富的宝藏: 人人都想去发掘它。潘勒韦猜想就是这样的。在马瑟和麦吉得到他们的例子以后, 碰撞流形方法似乎成了解决这个猜想的钥匙。为了得到所需要的奇点, 人们相信必须利用若干个三体碰撞或多体碰撞来实现。但是谢尔顿的工作以及随之而来在四体问题中寻找非碰撞奇点的失败, 表明至少要在五体问题中才可能存在非碰撞奇点。

质点数目的增加意味着变量数目与相空间维数的增加, 从而导致

更为困难的计算。通过研究平面问题或空间问题代替直线问题，预示着变量数目的更大的增加。试图模仿直线四体问题的证明，必将遇到在处理二体碰撞时同样的困难。下一步，就是在复杂性能够得到控制的情况下考虑平面五体问题。

约瑟夫·杰弗，我们在前面谈到西蒙在伯克利授课时曾提到，他在1983年进入罗特格斯大学工作。此前，杰弗曾有一段时间在夏威夷教书，在那里他有充足的时间思考数学问题和钓鱼。杰弗经常回忆起在哥伦比亚大学作研究生时在纽约度过的一段时光，他解决了黎曼提出的一个古老的猜想。那件事的发生出人意料。一门功课的期末作业中的一道题其实是一个小把戏。班里的同学都不能解决它，但杰弗花了几个昼夜后终于找到了证明。他的导师以及系里的其他老师都被震惊了。

那些令人陶醉的日子已成为遥远的过去。现在杰弗正在研究一个更为困难的问题：潘勒韦猜想。自1970年从西蒙在伯克利的讲座中得知这个问题以来，他不时地思考它。得知杰弗对此问题感兴趣以后，西蒙写信给萨瑞谈到了这位充满活力的年轻学生，从此在萨瑞和杰弗间开始了通信交流。一天，杰弗在访问芝加哥时来到萨瑞在西北大学的办公室。他们在谈论 n 体问题中渡过了一个充实的周六。

到1984年，杰弗似乎接近解决潘勒韦猜想了，为了确立优先权，他提交了一篇论文准备发表。杰弗在文中构造了平面五体问题的一个启发式例子(heuristic example)：系统在预先不发生任何碰撞的情况下或许会产生奇点。他没有得出可供发表的证明。其论证包含一百余页的粗略计算，很难讲证明是否正确。几乎没有人会花若干星期检查繁多的文字和图形，何况文中似乎不包含新的方法和思想，证明的正确与否也不得而知。杰弗本人对他的论文的写法并不

满意，于是他排除了复杂的计算过程，而将文章限制在一些支持他的主要想法的独创的定性讨论上。

以下就是杰弗的方案：考虑平面上的五个质点，它们的质量分别为 $m_1, \dots, m_5$ ，其中 $m_3 = m_4$ ， m_2 大于具有同样数量级的 m_3 ， m_1 远小于 m_2 ，而 m_5 远小于 m_1 。如图 3.12 适当选取它们的初始位置。最初 m_1 在一条围绕 m_2 的接近圆形的轨道上， m_3 和 m_4 与它们的距离相当远。质点 m_2, m_3 和 m_4 近似地位于一个钝角三角形的顶点，该三角形在形状保持不变的情况下慢慢地扩张。同时， m_5 绕三角形快速运动，陆续接近其他四体，它的速度远大于 m_1 的速度。

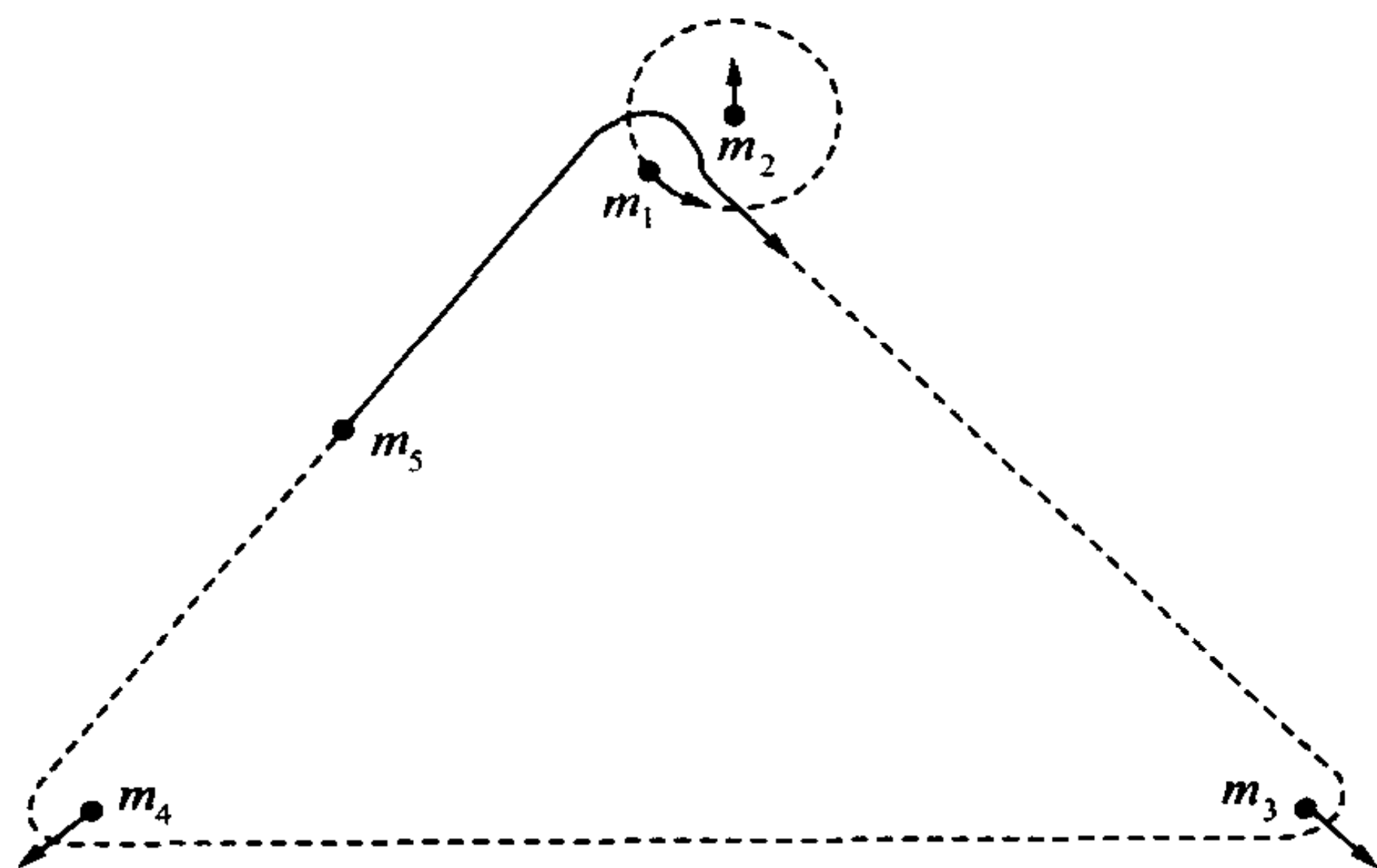


图 3.12 杰弗关于平面五体问题非碰撞奇点的启发式例子。

m_5 每次接近 m_2 时，它都会获得少量动能，从而导致 m_1 进入围绕 m_2 的更低的轨道，使得 m_1 在其轨道上的平均动能的增长与 m_5 能量的增长具有相同的倍数。 m_5 的一小部分动能被传递给 m_2, m_3 和 m_4 ，导致三角形进一步扩张， m_5 速度的增长使得它环绕三角形运动一圈的路程虽然增加了，所需的时间却缩短了。我们用时刻序列 $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ 表示 m_5 围绕三角形做环绕运动的时刻，它们收敛到一个有限值 t^* ，此前 m_5 已经围绕三角形运动了

无穷多圈。与此同时，钝角三角形也趋于无穷大(infinitely large)。三角形快速扩张的机制，是由于人们所期望的 m_1 ， m_2 和 m_5 之间重复接近三体碰撞所致。

遗憾的是，杰弗不能证明这个看似合理的方案确实能够在五体问题中发生。人们不清楚仅仅通过设置适当的初值条件， m_5 是否能够每次都以恰当的角度在恰当的位置环绕三角形一圈。还需要利用某些技巧简化大量的计算工作，但那时杰弗束手无策。

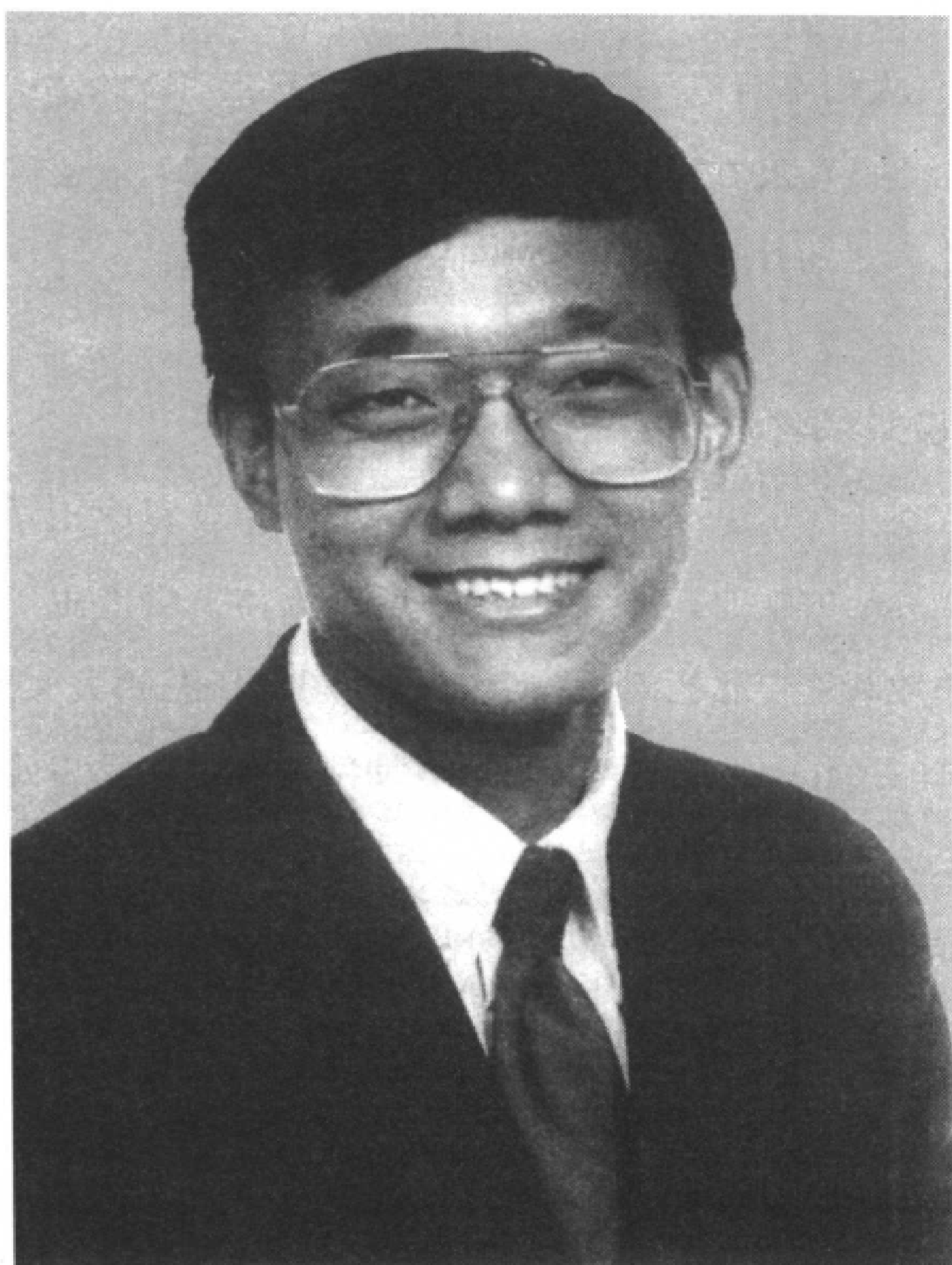
一个世纪探求的终结

夏志宏在年仅 19 岁时就从南京大学天文系获得学士学位，他希望在美国继续他的学业。他在几年前就对天体力学产生了兴趣，于是如饥似渴地阅读自己找到的关于 n 体问题的所有相关文献。他非常钦佩萨瑞的工作，因此写信给萨瑞，询问是否可以成为他在西北大学的研究生。

20 世纪 80 年代中国向西方部分地开放，如果美国科学家的工作在中国被人知晓，他们每月都会不时地收到期盼成为他们的研究生的中国学生的各种求学信件。他们不可能每信必复。夏志宏获得了在北美其他地方求学的机会，但他想师从埃文斯顿的萨瑞的愿望驱使他再次努力。这次他很幸运。萨瑞是一个温和善良的人，能够理解和关心那些需要帮助的人。他答应看看他能够做些什么。几个月后夏志宏来到西北大学，萨瑞将成为他的指导老师与朋友。

从中国到北美最后到达埃文斯顿的大学校园的旅程，对于像夏志宏这样的年轻人来讲并不容易，但是经过一段时间以后，夏志宏适应了新的环境。他让别人称呼他杰夫(Jeff)，因为对于大多数美国人来说，他的中国名字很难发音和记忆。夏志宏打算在他获得博士学位

以后返回中国。 他了解在美国找到研究职位是多么的困难。 美国的大学往往以语言障碍为由，使许多外国出生的具有博士学位的穷教师以及中国学生得到某个职位格外困难。



照片 3.7 夏志宏。（夏志宏提供）

夏志宏在美国开始了研究工作。 他十分聪明，愿意每周 7 天、每天投入 12~14 小时于研究工作。 而且现在他有了一个宏伟的数学目标：解决潘勒韦猜想。 当然是萨瑞将这一课题介绍给夏志宏的，他认为夏志宏具有攻克这个困难问题的潜质。 夏志宏最初的想法是在六体问题中寻找合适的答案。 尽管起初看起来颇有希望，但最终

由于相应的碰撞流形上轨道的横截相交导致了失败。数值工作提供的明显证据说明夏志宏正在寻找的解最终将是一个非碰撞奇点，但是解析方法行不通，萨瑞是永远不会赞成在一篇博士论文中用数值论证作为“证明”的。

那个夏天，夏志宏认识到他想要在六体问题中保持的某些性质可以在某类五体问题中保持不变。他立刻勾画了证明的草案，但是分析的细节是冗长的，需要花费几年时间去完成。

一些博士论文导师向他们的学生提出问题，然后让学生们独立去完成；另外一些导师却愿意与学生们进行紧密的合作，他们认为这是向学生们传授知识与经验的最佳途径。此种合作方式会产生特别丰硕的成果。夏志宏勇气十足，天真地想要攀登最危险的高峰。萨瑞则以他毕生的数学经验努力鼓励他自制并且防止他犯错误。一些相关的问题暴露出来，它们也在夏志宏的工作中得到了解决，其中一部分是在萨瑞的协助下完成的。他们共同完成了一篇关于直线 n 体问题中的某类渐近行为的优秀论文。自始至终，夏志宏在进行非碰撞奇点问题的研究。

在此期间，波拉德到西北大学讲学。萨瑞知道他过去的导师之一的一个梦想，就是看到潘勒韦猜想的解决。在欢迎波拉德的聚会中，萨瑞将夏志宏介绍给他。波拉德在听到这位年轻人将要完成潘勒韦猜想的证明时十分惊喜，但遗憾的是他未能在有生之年看到这篇论文。就在那次访问的几周后，波拉德的健康状况恶化了，几个月后他发生了中风，不久就去世了。

受到波拉德死讯的强烈震撼，夏志宏以更大的热情投入他的工作。攻克潘勒韦猜想，不只是他一个人的梦想，它已经成为几代数学家们的共同目标，一座已经建造了 90 余年的金字塔，而他，夏志宏，就

要安放它的最后一块石头了。还会有什么感受比这更有成就感呢？

1987年，夏志宏宣布完成了潘勒韦猜想的证明。他在普林斯顿就此问题做了一个报告，一位菲尔兹奖得主费弗曼（Charles Fefferman）鼓励他将论文提交给最权威的杂志《数学年刊》。夏志宏写了将近一百页的预印本，并将它寄给几位专家。与此同时，他听从费弗曼的建议，将文章提交发表。

除了等待别无选择。夏志宏知道自己的表达方式十分晦涩难懂。他很难表述自己的思想，也不喜欢用英文撰写论文，而英语似乎是地球上最难的语言。夏志宏在论文中对直觉认为显然的结果没有给出证明。他毫无经验，没有认识到这种写作方式会使审稿人不知所措。如果认识到这一点，他一定会花费更多的时间润色自己的论文，从而减轻审稿人的工作，也减少了自己好几个月的紧张和不安。

2年后，夏志宏收到了含糊的回答。审稿人不能确定他的证明正确与否。不管怎样，这个问题如此重要，以至于审稿人不同意按照当前的写法去发表。文中至少有一处关键性的陈述缺少令人信服的证明，还有几处陈述过于形式化，晦涩难懂。这样的论文是不可能在这种权威杂志上发表的。

这种情况在研究中是很常见的。作者深陷于技术的细节中，几乎不可能从一开始就站在读者的位置上给出一个清晰、无误的描述。这也是评审体制能够改进科学出版质量的一个原因。

其间的几年，夏志宏离开了埃文斯顿。他最初打算返回南京的老家去教书，但当哈佛大学数学系提供了本杰明·皮尔斯（Benjamin Pierce）讲师职位和助理教授的职务时，他决定接受并且留在美国。他继续修改论文并填补其中的漏洞。一些人难以相信一名学生能够解决这样著名的问题，他们开始怀疑证明的正确性，但是夏志宏仍然

十分自信。他向《数学年刊》的编辑马瑟提交了文章的修改稿。马瑟本人能够决定文章是否发表，但是他能够找到时间仔细地阅读这篇困难的论文吗？当时马瑟在普林斯顿组织了一个讨论班，他可以每周同大家一起讨论夏志宏的证明的一部分。对于他和自己的学生来讲，还有什么会比这样的讨论班更使人受益呢？马瑟清楚即使证明是错的，他的做法仍然是值得的。有时候，不吃一堑，不长一智。

讨论班贯穿了 1991 年的秋天。对普林斯顿的研究生们来讲，这是一个很好的机会，他们走进了数学创造的实验室，进入一个复杂而优美的领域。在学期结束时，马瑟递交了他的决定：证明是正确的。接受函或许是夏志宏收到的最好的礼物。论文于 1992 年夏天在《数学年刊》上发表。

当接受函最终到来时，夏志宏已经不在哈佛了。他于 1991 年前往佐治亚理工学院。他喜欢亚特兰大，这里的动力系统研究所为年仅 29 岁的他提供了优美的工作环境，他的妻子继续自己的学业而不需要像在哈佛那样支付高额的学费。这个地方很适合他们，夏志宏想要解决其他困难的问题。但是他想念埃文斯顿，1994 年秋天他返回西北大学成为终身教授。在后面的章节中我们将描述夏志宏在亚特兰大的工作。现在让我们看一下夏志宏是如何解决潘勒韦猜想的。

或许并不令人吃惊，夏志宏考虑的是空间五体问题。尽管增加了变量的数目，但他通过设定某些对称性简化了分析。选取全部具有相同质量的两对质点 $m_1, \dots, m_4$ 和具有较小质量的第五个质点 m_5 (见图 3.13)。两对质点分别以高度偏心的(椭圆)轨道在两个平行平面上运动，位置较低的一对质点沿顺时针方向运动，而位置较高

的一对质点沿逆时针方向运动，它们具有大小相等、方向相反的角速度。第五个小质点的运动被限制在与两个平面垂直并且通过公共质心的直线上，因此系统环绕这条直线的总角动量为零。

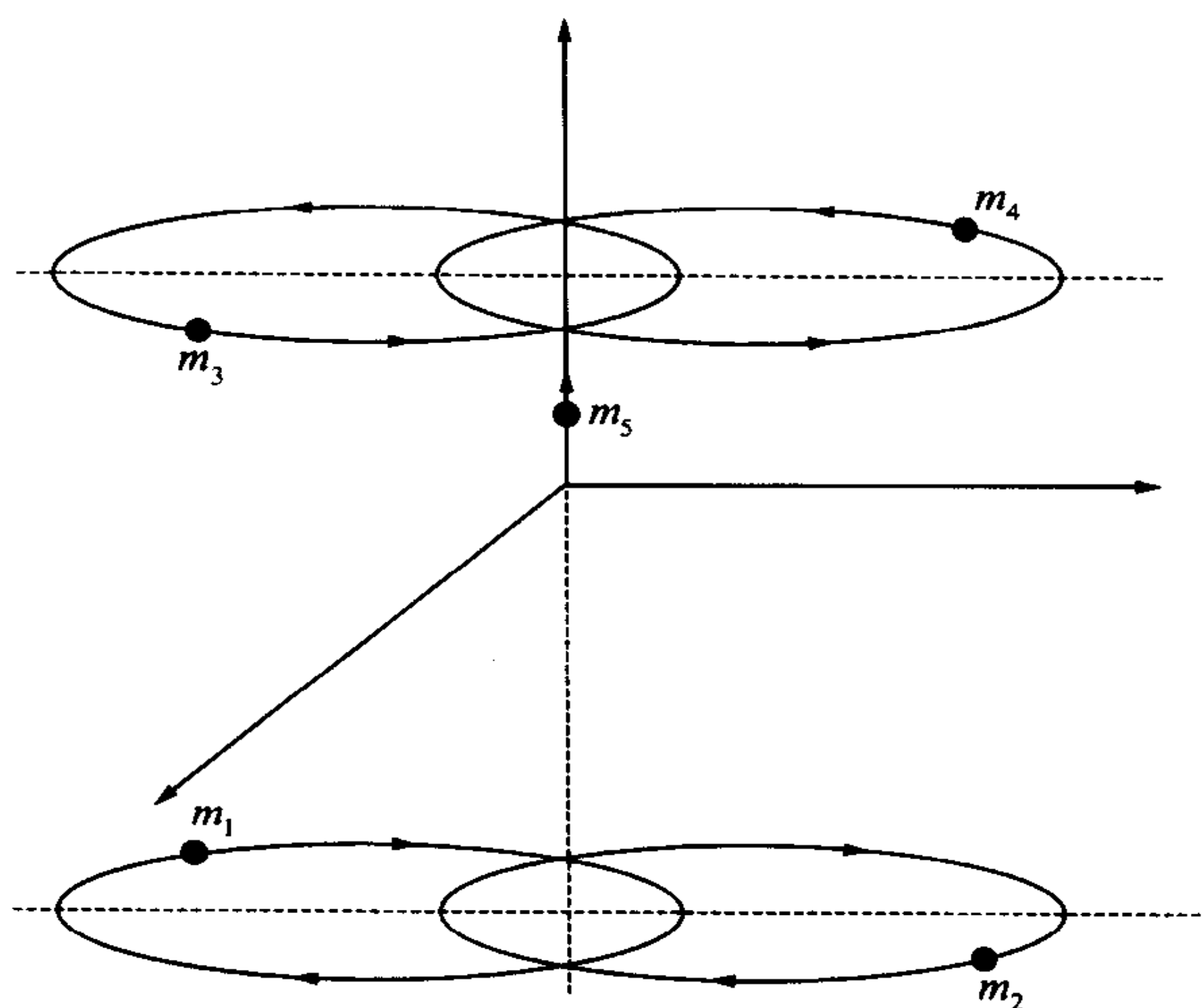


图 3.13 夏志宏构造的非碰撞奇点的例子。

小质点的运动是获得非碰撞奇点的关键，这是由于它在两个二体系统之间振荡，最终在有限的时间里产生了无界的运动。下面我们就详细地描述一下整个方案。假设质点 m_5 从下向上沿着直线运动，它经过连接 m_3 和 m_4 的直线时恰好早于这两个质点相距最近的时刻： m_3 ， m_4 和 m_5 接近于三体碰撞。 m_5 上升一段距离略高于连接 m_3 和 m_4 的直线，而 m_3 和 m_4 恰好相距最近。然后 m_5 受到强烈吸引向下运动。它再次经过连接 m_3 和 m_4 的直线时， m_3 和 m_4 开始相互分离。它们的分离减小了作用在小质点 m_5 上的力， m_5 快速向下运动接近下方的二体系统。同时，作用力和反作用力迫使质点 m_3 和 m_4 相对于位置较低的二体系统向上运动。对于较低的二

体系统 m_1 和 m_2 来讲，整个过程镜像对称地重复一遍。迭代上述步骤， m_5 每次都更加接近二体系统，并且获得更大的加速度，而两个二体系统被迫在有限的时间里达到无穷远。

这个方案听起来虽然简单，但是很难应用牛顿万有引力定律。由于运动将要在有限的时间内达到无界，因此小质点的加速度必须无限大地增加。为了达到这种所需的弹弓效应，每组二体系统的质点都必须越来越靠近，因此很难保证不发生二体碰撞。夏志宏在每一步都巧妙地运用碰撞点的稳定流形和不稳定流形结构排除“坏的”解的集合，即排除在下次相遇时将导致碰撞的解以及 m_5 在错误的时间接近二体系统的解。除了正确“瞄准” m_5 ，二体系统的角速度需要在每一步都减少一点，从而与 m_5 相遇时会更加接近。所有过程都需要非常精确的计算。在无穷多次重复相遇过程之后，留下了由解的初值条件构成的康托尔集，它们将导致非碰撞奇点。

人们怎样才能保证在移去无穷多个不合适的集合后还有所保留呢？夏志宏在每一步都需要证明有限个集合的解被保留下来。读者可以回忆一下第2章中我们在描述永远也不逃离斯梅尔马蹄的点构成的康托尔集时(图2.6)，曾经用到的类似的、但更为简单的构造。本章我们还讲述了康托尔三分集的构造(图3.7)，夏志宏正是在这种更为复杂的情况下运用了一个类似的构造。事实上，康托尔集在这个领域的应用是相当广泛的：早些时候我们描述的马瑟和麦吉关于直线运动的质点的例子中，同样存在由满足所要求的动力行为的初值条件构成的康托尔集。

利用上述方法，夏志宏证明存在一些初值条件使得系统不发生碰撞并且二体系统在有限的时间里被驱向无穷远。在证明中他需要克服大量的困难，一方面是技术性的困难，另一方面则是需要巧妙地运

用许多数学技巧。他引入了许多新的思想,但最重要的是,他的证明是融会许多科学成果的典范。夏志宏在论文中引入他所了解的关于 n 体问题的所有概念和方法,并大量应用他人过去得到的技术和成果。几乎需要一个世纪的努力才能营造起这座支撑着最终结论的大厦。夏氏定理(Xia's theorem)位于大厦的顶端,但是如果没有其他先行者安放的基石,这座大厦就不可能建成。

1993 年夏天,加拿大数学会和美国数学会在温哥华的不列颠哥伦比亚大学联合举办一次会议,同时在会上颁发第一届布卢门塔尔奖(Blumenthal Award),该奖项每 4 年颁发一次,用以奖励杰出的数学成就。评奖委员会包括伯克利的琼斯(Vaughan Jones)(他是 1990 年菲尔兹奖得主),普林斯顿高等研究院和蒙特利尔数学研究中心的朗格兰斯(Robert Langlands),耶鲁大学的马古利斯(Gregori Margulis),芝加哥大学的梅(Peter May)和哈佛大学的施密德(Wilfried Schmid)。夏志宏因给出潘勒韦猜想的证明而成为第一位获奖者。*

闲话对称性

在非碰撞奇点存在性的证明中,夏志宏考虑的一个问题就是等腰运动的情况。他的分析中的重要部分乃以质点 m_5 接近一个二体系统时的动力行为为基础。在夏志宏的解答中,由质点 m_3, m_4, m_5 以及由 m_1, m_2, m_5 构成的子系统在系统的变化中一直保持等腰三角形。这意味着三个质点位于三角形的顶点,而且三角形中有两条边的长度总是保持相等。这两条边的长度可以随着时间变化,但是

* 夏志宏,1962 年 9 月生于江苏东台,现为北京大学第一批“长江学者”特聘教授。——译者

由于 m_5 位于垂直线上，二体系统中的两个质点关于 m_5 所在的直线对称，因此两条边的长度始终相等，并且引力在水平方向的分量恰好平衡。幸运的是，夏志宏可以运用其他许多研究者已经给出的关于等腰三体问题(isosceles three-body problem)的细致分析。

存在两类等腰三体问题，一类是夏志宏用到的空间等腰三体问题，另一类则限制在平面上，三个质点皆在固定的平面上运动。平面问题在 19 世纪末曾被集中地研究，如上所述，西特尼科夫在 1961 年寻找振荡解的例子时考虑过空间等腰问题。他证明，如果两个等质量的质点沿着平面上的椭圆轨道运动，而第三个质点的质量可以忽略不计，它在与前两个质点轨道的平面相垂直的对称轴上运动，如图 2.11，那么我们可以找到适当的初值条件，使得较小质量的质点上下振荡，其运动最终趋于无界。这就是任何 n 体问题中振荡运动的第一个例子，但是同夏志宏正在寻找的解相比，它需要无限长的时间才能达到无穷远。

我们在柯朗研究所遇到过的莫泽，曾经考虑过西特尼科夫问题以及阿列克谢耶夫在更宽的语境下提出的扩充问题。他不仅寻找振荡解，还想要描述小质点的所有可能的动力行为。1973 年，莫泽出版了一本书《动力系统中的稳定运动和随机运动》。在书中，他指出了西特尼科夫问题可能的解与第 2 章中讲述的斯梅尔所用的移位映射之间的联系。莫泽将任何一个移位映射都与一个解联系起来，反之亦然。粗略地讲，这意味着只要选取适当的初值条件，对称轴上小质量的质点事实上可以按照指定的任何方式运动。如上所述，这些结果的获得需要应用符号动力学。

等腰三体问题最新的研究成果，主要是关于三体碰撞解和近三体碰撞解(near-triple-collision solutions)的。波士顿大学的德瓦尼

(Robert Devaney)在1980年和1982年研究了平面情形，明尼苏达大学的莫克尔(Richard Moeckel，康利的另一名学生)从1984年着手研究空间情形。他们都应用麦吉变换和流在碰撞流形上及其附近的定性分析。他们的论文提出，在第2章陈述的意义下，接近三体碰撞的一般三体问题中的运动是混沌的。这些结果表明，为使系统产生所要求的某种特殊的运动，人们精确选取合适的初值条件是何等困难。

得克萨斯大学的布鲁克(Roger Broucke)于1979年完成了等腰三体问题的一些数值研究。伊里戈延(Irigoyen)、拉孔巴(Lacomba)和洛斯科(Losco)于1980年，希莫(Simó)和马丁内斯(Martinez)于1988年，分别获得了进一步的解析结果。尽管在上述论文中取得了许多进展，其中一些还揭示了有趣的引人注目的性质，但是等腰问题如今还远远没有被完全认识。

晚宴时的主意

如许多会议中常见的那样，那天充满了有趣的报告，在最后一个报告以后，讨论持续了很长时间。1985年在加利福尼亚的阿纳海姆举行的美国数学会的年会，将数学各个领域的研究者们召集到一起。合作通常从这种场合开始，不同领域的研究者交流思想，讨论共同感兴趣的课题，他们回家的时候比到来时消息更加灵通、思维更加活跃。

那天晚上杰弗与其他人共进晚餐。他熟悉其中一些人，其余的人则是刚刚结识的。餐厅在烛光的掩映下幽雅宜人，食物和葡萄酒都很精美。他们无所不谈：彼此共同的朋友、学界权术(academic politics)以及(不可避免的)数学。通常提出的问题是，“你正在研

究什么？”每个人都会讲述自己的故事，讲述自己遇到的挑战、困难和取得的成就。杰弗从潘勒韦猜想开始谈起，由于所谈论的问题可以用并不复杂的术语去表达，他很快就吸引了大家的注意力。他谈到自己试图从五体问题中寻求证明并简述了他认为此方法可行的理由。

杰弗给每个人都留下了深刻的印象。一个可以简洁地表达出来并且难以解答的具有 90 年历史的问题是不常见的。桌边的一些人开始思考杰弗的故事，另一些人则继续谈论其他的事。不久，布朗 (Scott Brown) 问道，“你为什么不试着构造具有某种旋转对称性的解呢？”沉默了一会儿，杰弗的眼睛闪了一下。“是的，”他答道，“这是个好主意！我肯定要试试看。”

在返回旅馆的路上，杰弗想清楚了如何利用布朗建议的对称性改进他的五体问题的例子。那天晚上他立即开始进行一些计算。能否得到重大的结果并非显而易见，但他充满希望。杰弗渴望尽快回到家里将笔记本上的计算与早期的计算进行比较，他感觉到这个曾经困扰他 15 年的问题的答案与他的距离比以往任何时候都近。

随后的几个月，杰弗不断地尝试、尝试、再尝试，但是一直都未能成功。有几次他看起来已经得到了答案。他可以看到地平线上一束希望的曙光，但是错误的阴云总会再次掩盖它。最后他认识到自己无法在五体问题的框架内构造非碰撞奇点的例子。那是一个苦闷的时刻，他感觉自己已经筋疲力尽了。于是他决定将困扰自己的问题放到一边而去度假。

但是杰弗不会如此轻易将这个问题置之脑后。一天早晨他醒来时又有了一个新的想法。为什么坚持考虑五体问题呢？旋转对称性可以完美地应用于任何数目的质点，为什么不能增加质点的数目从而

给自己预留更多的自由空间呢？虽然需要进一步的计算，但这种方法或许可行。他重新开始，并投入大量的时间和精力。这一次他没有放弃。他再次开始向非碰撞奇点问题和自我挑战。

其后的1987年，杰弗在浏览布告时得知夏志宏将在普林斯顿讲述潘勒韦猜想的证明。这人是谁？杰弗从没听说过他，起初也不愿相信这件事，他很难接受被别人战胜的事实。沉思一会儿后他想，

“这只是一个布告，谁会知道证明是否正确呢？”杰弗决定打电话给萨瑞，他一定了解这件事。当杰弗听说夏志宏是萨瑞的学生时，他明白竞赛结束了。但是，他像与大部队隔绝的勇敢战士一样继续战斗，并尽力使自己相信什么都没有改变。他终于成功了：几个月后，他找到了另一个不同的证明。

1989年1月，杰弗将他的文章提交给《微分方程杂志》。同年11月论文被接受，并于1991年1月发表。尽管他的文章发表的时间比夏志宏的早，但是杰弗在引言中直率地承认夏志宏首先给出 n 体问题中非碰撞奇点的第一个例子的优先权。尽管如此，杰弗的工作提供了处理平面情形的第一种手段。

在天体力学中，一类特殊解存在这一赤裸裸的事实或许不如构造该解的技术细节令人感兴趣，因此我们值得描述一下杰弗的例子。他选取平面上的 $3N$ 个质点，它们的初始位置如图3.14所示。要使这个例子成立，需要选取充分大的自然数 N 。其中被分成 N 对的 $2N$ 个质点具有接近圆形的轨道，并且具有相等的质量。每个二体系统的质心都位于正多边形的顶点。另外 N 个质点都具有相等的小质量，它们快速从一对质点向另一对质点运动，如图3.14中箭头所示。当每个小质量质点接近二体系统时，它从系统获得动能并向该系统转移一些动量，迫使该系统的轨道更加紧密，同

时增加了该系统与多边形中心的距离。

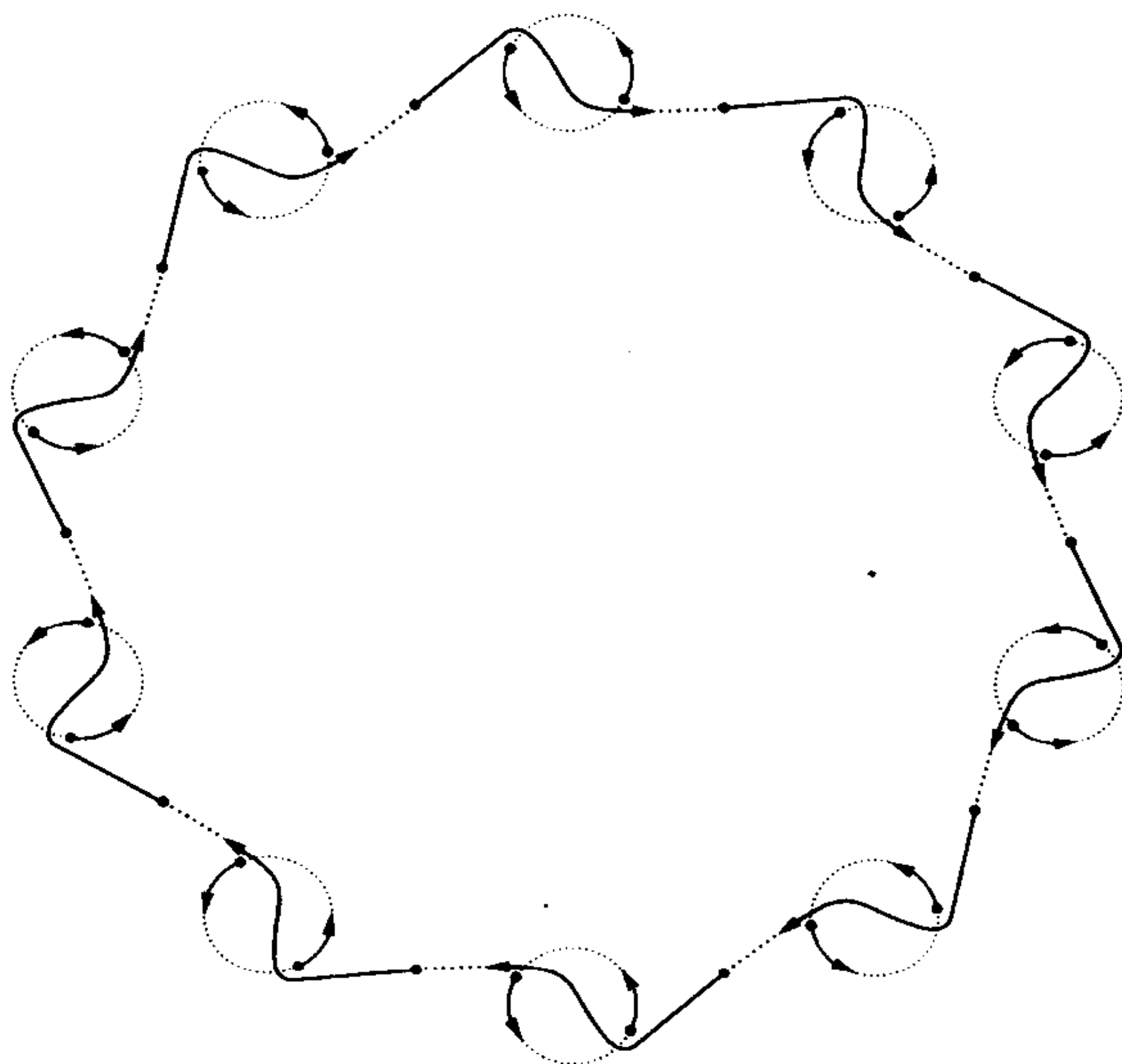


图 3.14 杰弗的平面上具有旋转对称性的例子。

对于具有充分多个质点的上述系统继续以上过程，并适当地选取质点的质量和初速度，每次当小质量质点与二体系统接近以后构形都会增大。小质量质点与二体系统的两次相遇之间需要的时间间隔的总和将会收敛到一个有限的值，系统的直径则在有限的时间达到无穷大。由此导出了非碰撞奇点的存在性。

在结束故事以前，我们应当提及从未在天体力学领域发表过一篇文章的拓扑学家和动力学家威廉姆斯(Robert F. Williams)对非碰撞奇点问题的非凡洞察力，他现在在得克萨斯大学奥斯汀分校工作。在夏志宏和杰弗给出非碰撞奇点存在性的例子以前很久，威廉姆斯曾经提出如何构造具有非碰撞奇点的解，但他从来没有实践过这个想

法。那件事发生在我们曾经谈过的一次会议上，即 1971 年在萨尔瓦多的巴黑亚大学举行的一次会议，萨尔瓦多是巴西的一座布满美丽教堂、广场和公园的古老城市。当时威廉姆斯在西北大学执教。在他的同事萨瑞作完关于非碰撞奇点的报告以后的短暂休息中，威廉姆斯建议麦吉和附近的其他人，一类类似于 20 年后夏志宏描述的解将可能导致非碰撞奇点。麦吉勉强接受了建议，但他自信这种方法不可能走得更远。几分钟后，威廉姆斯又讲起另一个例子，与杰弗最后给出的例子极其相似，但是再次没有得到众人的赞同。当时每个人都倾向于相信非碰撞奇点不存在。三体接近以后快速分开的性质还没有被发现。尽管威廉姆斯后来在另一类混沌动力系统的奇怪吸引子(strange attractor)和扭结周期轨道方面做出广为人知的工作，但是由于自己的建议没有得到热烈的回应，他没有继续思考这个问题。

很难比较夏志宏和杰弗给出的潘勒韦猜想的两种解答。两者都以各自的方式显示其价值并引起人们的兴趣。夏志宏开创了一个新的方向，他应用复杂的数学工具给天体力学领域注入新的思想。夏志宏的论文经过仔细的审查，如今无人怀疑其正确性。杰弗则在他的工作中应用 19 世纪经典的数学工具克服了这个绝妙问题中的困难。他的论述中由于包含大量的计算而使人无兴致读下去，但是杰弗完成那些计算的顽强精神令人钦佩。两个人在一个古老而困难的研究领域取得了卓越的成就，人们很难在此得到如此重大的新成果了。

时至今日，潘勒韦猜想仍然没有被完全解决。夏氏构造(Xia's construction)可以推广到任意 n 个质点($n > 5$)的情形，却不能应用于四体问题。此时非碰撞奇点存在与否，仍然是一个悬而未决的问题。另一方面，试图证明潘勒韦猜想的新方法和思想丰富了经典力学和数学的研究，并且已经有了其他许多应用。同大多数好的问题

(good questions)一起, 潘勒韦猜想在人类智慧财富的宝库中占据了一席之地, 我们应当将几代数学家共同奋斗所取得的成就视为宝贵的科学文化遗产。

注 释:

3.0 第3章的题记选自加尼耶为[Pa, 1972]写的序言。本章的一些材料, 最早出现在[Di, 1993b]中。论文[S & X, 1995]专为数学人士所写, 但相对来讲是非专业性的, 还包含一些关键性结论的描述, 这些结论能够导出3.10中给出的非碰撞奇点的夏氏证明。

3.1 一个奇人: [Pa, 1972]和[S & M, 1971]描述了国王出席潘勒韦的公开演讲。此外国王对数学研究的支持, 参考[B-G, 1994]。潘勒韦演讲中的话, 译自己已经发表的同一篇演讲[Pa, 1972], 他的手稿后来发表于[Pa, 1897], [Pa, 1972]的第一卷也刊载过。潘勒韦的生平可以在[Pa, 1972]中找到。

3.2 碰撞还是破裂: 我们没有明确的证据说明冯·塞佩尔参加过潘勒韦的公开演讲, 但假定他早期决定研究天体力学是受潘勒韦在斯德哥尔摩发表演讲的影响是合理的。冯·塞佩尔的其他资料, 选自[Mc, 1986]。有关冯·塞佩尔的非碰撞结果的历史, 参见[Win, 1941]的注记, 其他相关的文献是[Ch, 1920], [Sp, 1970]。

3.3 计算机游戏: [Re, 1987]描述了冯·诺伊曼在高等研究院建造早期程序计算机的过程中所起的作用。塞拜海伊以及其他研究小组的资料, 参见[Sz, 1967]。皮特(Jaak Peetre)在1995年2月通过电子函件向FD提供了关于梅塞尔的计算尝试的注释(梅塞尔在科学上的经历参见[Pe, 1995])。图3.4中的数值计算结果, 还可以参看[Ar, 1988]。接近三体碰撞以后产生的弹射效应(ejection effect)的一般性的证明, 参见[Mc, 1974]和[W, 1975, 1976]。

3.4 如何逮兔子: [P & S, 1968, 1970]和[S, 1971, 1973a, 1973b, 1973c]包含本节描述的研究工作。萨瑞在1972年证明的性质, 发表于[S, 1973b]。1991年春天萨瑞访问蒙特利尔的数学研究中心时提供了故事的背景资料, 当时FD正在作博士后。1993年FD通过电子函件, 以及1995年在西雅图的华盛顿大学举行的关于哈密顿系统和天体力学的数学合作研究夏季会议上从萨瑞处得知更多的细节。1993年10月在伯克利召开的献给赫希的中西部动力系统会议上, FD和西蒙讨论过相关课题。

3.5 成功的测度: 本节仍以3.4中提到的文献和[S, 1975, 1976, 1977, 1978, 1984]为基础。值得一提的是巴尔干物理学家曼内夫(Manev)(德语或法语中的拼法是Maneff)在20年代提出的引力模型[Ma, 1924, 1925, 1930a, 1930b]的最新结果, 这些结果表明, 在该模型中导致碰撞的初值条件的集合具有正的勒贝格测度(见[Di, 1993a]、[Di, 1996b])。从某种意义上讲, 曼内夫的模型是相对论的一种近似, 它与所观测到的天文现象极为一致。爱因斯坦以一种简化的形式应用它去近似相对论, 并证明水星的近日点进动可以被精确地计算出来。这意味着在宇宙中碰撞并不是不可能的。其他类型的模型, 比如穆克特(Mucket)和特莱德(Treder)在1977年提出的一个模型, 看起来其定性行为与经典的牛顿模型是一致的, 见[Ba & D, 1993]和[Di, 1996a]。萨瑞有关投票和分配名额的工作, 参见[S, 1978]、[S, 1987]和[S, 1994]。潘寇的硕士论文见[Pan, 1951]。李特尔伍德的书再版时增加了一些内容[Lit, 1986]。

3.6 将碰撞正规化: 麦吉在3.4中提到的伯克利会议期间向FD提供了本节的资料。此处提及的西格尔的论文是[Si, 1941]。桑德曼的论文是[Su, 1912]; 事实上, 该论文中的研究成果是两篇早期的论文[Su, 1907]和[Su, 1909]中的工作的改进。莫泽撰写的书是[Mos, 1973]。

3.7 天体台球: 本节仍然以3.6中谈及的与麦吉的讨论为基础。伊斯顿关于碰撞正规

化的论文是[E, 1971]。列维-奇维塔早期使用的变换,后来激发了麦吉的研究工作[Mc, 1974],发表在[Le, 1920]中。C·琼斯(Chris Jones)和C·A·康利(Catharine Anastasia Conley)在1995年5月和6月通过电子函件向FD和PH提供了有关康利的评述。有关相图的故事,是通过C·琼斯由范伯格(Marty Feinberg)提供的;他们和费尼谢尔(Neil Fenichel)都强调康利的慷慨和希望取得他人信赖的愿望。关于康利指标理论的计算机实现,参见[Mi & Mr, 1995]。

3.8 会议巧遇:1993年麦吉(同3.6)和马瑟在注释1.14中提到的奥勃瓦尔法赫会议上提供了本节的资料。马瑟和麦吉的论文是[M & M, 1975]。西尔顿的论文是[Sh, 1979]。

3.9 从四体到五体:本节以1991年3月杰弗和FD在西北大学举行的中西部动力系统会议上的讨论为基础。杰弗在1969年作研究生时证明了黎曼猜想: $\sum_{n=1}^{\infty} ((\sin n^2 x)/n^2)$ 处处不可微。FD不是从杰弗处掌握这一猜想的证明(魏尔斯特拉斯曾经尝试却没有成功),而是在1991年12月于维多利亚大学举行的加拿大数学会冬季会议期间,从蒙特利尔大学的施勒米乌科(Norbert Schlomiuk)处获悉的。杰弗的导致非碰撞奇点的启发式例子,发表在[Ge, 1984]。

3.10 一个世纪探求的终结:本节以FD同夏志宏在西北大学(同3.9)和1995年在3.4中谈到的西雅图会议上的讨论、与马瑟的讨论(同3.8),以及与萨瑞通过电子函件的交流为基础(同3.4)。夏志宏的简历登载在1993年11月第40卷《美国数学会通报》1220~1221页,文中同时宣布了布卢门塔尔奖。夏志宏的论文参见[X, 1992],也可以参看3.0中提到的解释性文章[S & X, 1995]。

3.11 闲话对称性:关于等腰问题的一些经典结果,参见[Win, 1941]。其他相关的论文和书籍是:维尔钦斯基(Wilczynski)[Wi, 1913],西特尼科夫[Sit, 1961],莫泽[Mos, 1973],德瓦尼[De, 1980, 1982],莫克尔[Mo, 1984],布鲁克[Bro, 1979],希莫[Sim, 1981],以及希莫和马丁内斯[S & M, 1988]。上面列举的文献远远不是完整的。

3.12 晚宴时的主意:[Ge, 1991]给出了杰弗的导出非碰撞奇点的平面解的例子,其中还描述了杰弗和布朗的讨论。麦吉在伯克利向FD讲述了威廉姆斯对非碰撞奇点问题的预见性(同3.6)。

4. 稳 定 性

太阳系是稳定的吗？确切地讲，答案还不知道，但是由这个问题已经引出了许多深刻的结果，它们可能比对初始问题的解答更为重要。

——莫 泽

看起来是个很平常的夜晚。晚饭后，让·勒龙(Jean le Rond)习惯地阅读他收到的信件，如果时间允许，他还会回复其中一些向他提出各种请求的信件。当仆人手托放着名片和信件的银盘走进房间时，他正坐在桌旁写回信。

“噢，不，不要再来了，”主人拆开信后大声嚷着，“又是一封上层人物推荐一位‘年轻的天才’的介绍信，”他转向仆人，“请解释一下我不能接见他。”

让·勒龙·达朗贝尔(Jean le Rond d'Alembert, 1717~1783)是一位伟大的数学家，一位性情孤僻的人。他讨厌奉承并且无法忍受

与那些只是富有或者地位显赫的人相处。作为一名贵族的私生子，他深深地懂得贵族阶层在精神上并不一定富有。在出生后不久，他的母亲就把他抛弃在巴黎让·勒龙小教堂的台阶上。他的养父母为他取名让·勒龙，后来他把达朗贝尔加到自己的名字中。

那天收到的介绍信是为来自诺曼底的伯蒙特恩奥格的一位18岁的年轻人而写的。信中一些有影响的人物称赞这位年轻人有数学天赋，请求达朗贝尔接见并帮助他。他们或许对这位著名数学家的性格不大了解，否则就不会寄这样的推荐信了。让·勒龙不会在意这些非正常渠道的评价。后来发生的一件事更好地反映了他的个性。

腓特烈大帝(Frederick the Great)向达朗贝尔提供了当时一个科学家所能想到的最显赫的职位：柏林科学院院长。除了达朗贝尔以外，任何人都会欣然接受。在拒绝信中，让·勒龙提到他最初也像其他许多人一样，渴望得到荣誉和财富，但最终还是放弃了。取而代之的是，他拥有健康的体魄和平和的心情，他相信这些才是一位哲学家期望得到的回报。

关于这位天才的青年，达朗贝尔很快就遗忘了。然而几天后收到的一本关于力学的一般原理的长篇论著，给他留下深刻的印象。他似曾看到过作者的名字：皮埃尔·西蒙。还未放下书，几秒钟后他就意识到作者正是那些有影响的人物推荐的那个年轻人。“这个人不需要任何推荐！”他想着，笑了，“他完全懂得如何引荐自己。”达朗贝尔毫不迟疑地给了答复，提出第二天约见他。

渴望有序

每个人都会不时地表达对永恒的渴望。不管这看起来多么荒谬，我们仍然努力尽可能地延长自己的生命。人类的第一种需求就

是安全，确信我们的世界并不危险。 我们希望自己居住的城市、乡镇保持安宁，我们的国家不卷入战争。 我们希望自己的孩子在平安与幸福中成长。 更基本地，我们还希望自然环境不会发生剧变。

自从人类认识到他们的家园在巨大的太阳系中只是一颗渺小的脆弱的行星，科学家就提出了地球能否持续存在的问题。 我们完全依赖于太阳的能量；地球到太阳的距离被证明是生命产生与进化的理想距离。 假如这一距离过长或者过短，那么如同我们所知道的那样，在这个蓝色星球上可能永远也不会出现生命。

很久以前，天文学家发现地球与其他行星的运动不是完全规则和周期的。 这促使他们提出地球是否将一直保持它围绕太阳运行的轨道的问题。 或许地球会离开它现在的邻居漂移到太阳系深处，或者更糟糕的是，与其他较大的星体(如小行星或彗星)发生碰撞？今天我们有充足的证据说明地球在过去曾经与不大的天体发生碰撞，引起了气候和天气的变化，也可能发生了更严重的碰撞从而导致恐龙的灭绝。 1994 年夏天，苏梅克-列维彗星的碎片曾经撞击木星。 天文学家最近发现了木星邻近的斯威夫特-塔特彗星，以它的轨道根数 (orbital elements) 估计进行的初步计算表明，这颗彗星在 22 世纪有 1 : 40 的概率与地球相撞。 我们对于未来还能期望什么呢？

在人们发现这些特殊证据以前的几个世纪，诸如此类的问题使数学家引进了自然界研究中的一个基本概念——稳定性。 原则上讲，稳定性是有关扰动现象 (perturbation phenomena) 的。 如果一个动力系统中发生轻微的变化，这个系统还会保持它的运动状态吗？然而，存在若干个稳定性的定义，每一个定义根据不同的语境都有不同的含义。 这些定义中很多是相互关联的：其中一些蕴含另一些，或被其他定义所蕴含。 在第 2 章末我们提到的庞加莱回复定理就是一

种弱形式的稳定性，它仅要求系统不时地重复其动力行为。几页以后我们将回到这一点上。在第1章的图1.6中我们曾经描绘了稳定和不稳定平衡点的相图，并且在垂下的摆或者向上倒立的摆运动语境中阐述了严格的而且更为直接的稳定性的定义。现在我们考虑在物理概念上最容易掌握的一种稳定性，但或许在数学上是最难处理的：在围绕太阳的轨道上运转的行星的稳定性。

如果太阳系中的星体不发生碰撞并且其中的行星不能从太阳系中逃逸出去，那么太阳系就被称作是稳定的。用 n 体问题的语言来讲，这意味着不存在任何类型的奇点，甚至在遥远的过去或将来也不存在离开系统的质点。（一旦我们离开物理太阳系去谈论数学世界中的 n 体问题，我们就忘记了地球仅有40~50亿年的历史。轨道上的质点可以在微分方程的理想化世界中永远运行。）这是稳定性的一个相当弱的定义，它仅仅要求有界性（boundedness）和保持性（permanence）。不可能发生灾变，但是没有说明行星应当从多大程度上保持当前的轨道。（ n 体问题也不讨论太阳最终将消耗掉自身的核能并膨胀为一颗红巨星，在此期间将地球焚毁。）

数学上精确地解决上述问题的唯一方法，是列出和研究描述太阳系的牛顿模型的方程：包含一个质量大的质点——太阳——和九个质量小的质点的十体问题。我们会发现行星以几乎椭圆的轨道围绕太阳运转着。为什么这些轨道不恰好是椭圆呢？在牛顿模型中的解释是：每颗行星的轨道都会受到其他行星运动的轻微影响，因此它的运动轨道不可能是完全的椭圆，而只能与椭圆相近。这种类型的 n 体问题很自然地被称为行星问题。

因此，很明显在牛顿以前不可能对太阳系的稳定性进行严格的研究。事实上，在《原理》出版将近一个世纪以后才出现第一批相关

的结果。尽管如此，与太阳系无关的一般的稳定性问题在很早以前的古代就产生了。

希腊自然哲学家亚里士多德(Aristotle, 公元前 384(3)? ~ 前 322)和阿基米德(Archimedes, 公元前 287? ~ 前 212)从两种不同的观点探讨这个问题。前者从运动学观点观察问题。选取平面上平衡的杠杆和重物作为实例，他猜想力将破坏平衡状态而产生运动。相反，阿基米德采用几何学观点。他对漂浮物体的研究证明物体的形状与重心的位置的重要性。相比之下，人们可以认为亚里士多德采取实验的观点(尽管他从来没有做过实际的实验)，而阿基米德构造了一个数学模型。当时还没有稳定性这个概念，显然是拉丁诗人卢克莱修(Lucretius)在《物性论》(《论自然》)一诗中首先使用“stabilitas (稳定性)”，他在诗中的一节评述了轻物和重物的稳定性。

希腊人和罗马人生活在由摩擦统治的物理世界里。人们普遍认为力是保持物体运动的原因。直到伽利略在《关于两种新科学的对话》(1638)中才引进光滑、无摩擦的物体的理想化运动。伽利略还可能是进行周密实验的第一位“物理学家”。他关于球体从倾斜的平面上滚下的工作促成了牛顿运动定律的提出。大约在同一时期，人们澄清了平衡和稳定性的概念并将它们区分开来。气压计的发明人托里拆利(Torricelli, 1608 ~ 1647)是伽利略同时代的年轻人，他显然是第一个清晰地描述不稳定平衡的人。到此为止，焦点在于静平衡。后来，惠更斯(Huygens, 1629 ~ 1695)对摆钟产生兴趣，并引进动力学的思想，但是所有这些早期的探索者都明显地认为稳定性是与有限量扰动相关的。在现代稳定性研究中极为重要的无穷小扰动，直到 17 世纪末微积分发明以后才出现。

在第 1 章我们已经看到，庞加莱关于混沌的发现产生于他试图证

明刚好相反的方面：稳定性。如在数学与其他科学中经常发生的那样，新事物常常在人们寻找其他事物时出现。稳定性概念不仅由于其自身而显得重要，而且在科学的发展中起催化剂的作用。从这种意义上，人们可以说稳定性的观念激发并导致了混沌革命(revolution of chaos)。

现在我们将要讲述人们早期试图证明 n 体问题稳定性的故事。

侯爵与皇帝

皮埃尔·西蒙(Pierre Simon)在向法国科学院提交第一篇论文时年仅 24 岁。论文中包括关于行星问题的一个著名结果，因为在其中他宣称太阳系是稳定的。



照片 4.1 皮埃尔·西蒙·拉普拉斯。(巴黎，戈捷-维拉尔提供)

1749年，皮埃尔·西蒙在诺曼底卡尔瓦多斯省的伯蒙特恩奥格出生于一个农民家庭，他很快在数学方面显露头角，作为旁听生在伯蒙特陆军军官学校学习一些课程，似乎有一段时间他还在那所学校讲授数学。在此期间皮埃尔结识了一些富人，他们欣赏他在科学中罕见的才能并予以庇护。在达朗贝尔的推荐和影响下，皮埃尔在18岁时成为巴黎军事学校的教授，后来在有名的高等师范学校获得了一个教授职位。他生活在大革命与拿破仑统治的年代，在君主制复辟以后成为路易十八(Louis XVIII)时代的拉普拉斯侯爵(Marquis de Laplace)。拉普拉斯在18世纪法国科学界的声望只有拉格朗日才能与之相提并论。

与达朗贝尔不同，拉普拉斯个性复杂而难以理解。一方面，他整个一生都在隐瞒自己卑微的出身，但另一方面，他帮助许多想进入数学界的穷困的年轻人。在研究中他坚韧不拔，但在社会生活中意志薄弱，喜欢接受自己不应得的荣誉和头衔，并一直不愿意承认别人的帮助，包括拉格朗日，随后我们就会提到他的工作。

1785年，拉普拉斯成为法国科学院正式院士。那年发生的一件特别的事件改变了他的生活，使他投身于政治。在履行正常学术职责过程中他曾考查一位从一开始就留下了深刻印象的16岁的应试者。这位年轻人的名字是拿破仑·波拿巴(Napoleon Bonaparte, 1769~1821)。后来，在拿破仑掌权以后，部分由于这个原因，拉普拉斯成为富有而且有影响之士。尽管拉普拉斯进入了上层社会，但他毕生都以年轻时的热情从事数学研究并取得了成功。

皮埃尔·西蒙的兴趣非常广泛。他在概率论方面的基本工作收录在他的巨著《概率的分析理论》中，他还偶然地写下了一篇关于机遇法则的富于情趣的文章。与本书相关的是他的五卷本著作《天体

力学》。经过26年的工作，拉普拉斯评述了自牛顿以来该领域的所有重要贡献，其中包括许多新的思想和结果。实际上正是拉普拉斯首先引入“天体力学”这一术语。对于那些无法领悟这部巨著的细节与抽象理论的读者，他后来撰写的《宇宙体系论》被证明是一部有史以来最成功的通俗读物。

波拿巴皇帝本人也称得上是一位有实力的数学家；至今一些初等几何的结果仍然沿用他的名字。在《天体力学》面世不久，皇帝就召见拉普拉斯讨论书中的思想。《天体力学》的主要目的是利用牛顿万有引力解释整个太阳系的存在与现象。拉普拉斯是一位无神论者，因此他像伽利略和开普勒等人在几乎所有早期探讨这一主题的论文与著作中所做的那样，从不提及上帝的名字。拿破仑是一位常胜将军，拥有至高无上的权力和震慑力，他认为自己高于一切。这次他想胜过拉普拉斯，于是提出了挑战：“你已经写完了这本关于宇宙体系的巨著，却从未提过宇宙的创造者(Author of the Universe)！”

拉普拉斯在社会生活中态度暧昧，在谈论科学问题时却直率坦诚，从不否认自己的立场。他的著作仅以一个公理为基础：天体作为质点遵循万有引力定律相互吸引。在这一假设下他能够解释一切现象。然而，这种场合下完全的坦诚却可能给他招来严重祸患。虽然意识到危险，拉普拉斯还是给出一个直接而真实的回答：“陛下，我不需要那个假设。”

拿破仑凝视着拉普拉斯的眼睛，这位老学者以骄傲而自信的眼神与皇帝对视着。此时此刻，世界上没有任何事物能够令皮埃尔·西蒙屈服。经过尴尬的沉默以后，波拿巴转移了话题。（后来，据说当皇帝谈及同样的话题时，拉格朗日是这样回答的：“但那是一个优美的假设；它可以解释许多东西。”）

拉普拉斯的第一个重大贡献是 1773 年发表的关于稳定性的论文。论文中的主要定理包括以下陈述：在离心率的一次幂级数逼近中，行星的长轴不含有久期项。这些专业术语意味着什么呢？行星的长轴定义为图 4.1 中的线段 AB ，它是连接行星的椭圆轨道上两点的最长线段。我们曾经指出，在多于两个天体的问题中，长轴的长度一般会随着时间发生改变，行星运行的轨道也是一个大小会发生变化的不固定的椭圆。如果椭圆的变化过大，行星的轨道就可能成为无界。

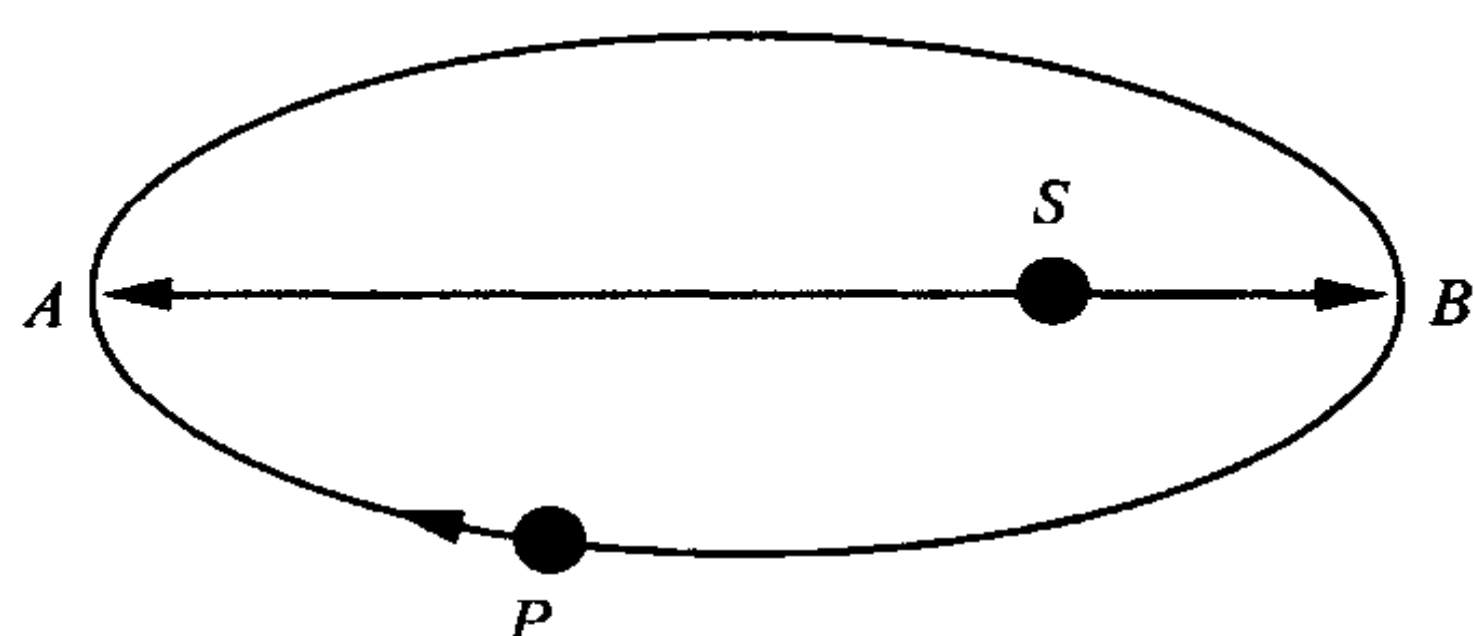


图 4.1 行星 P 的长轴 AB 是 P 围绕太阳 S 运转的椭圆轨道的长轴。

长轴测量椭圆的大小，而离心率刻画了椭圆的形状；它描述椭圆与圆周相近或不相近的程度。较大的离心率对应于长而扁平的椭圆。选取一次幂级数逼近意味着给出离心率一个粗略的估计，二次幂级数逼近一般可以给出比一次幂逼近更好的估计，但不如三次逼近精确，依此类推。这种手法被称为扰动理论(perturbation theory)，人们选取简单而类似的问题的已知解，通过不断修正它来更好地逼近不能确切计算出来的真实的解。为了应用扰动方法，我们需要一个小参量(small parameter)，以它展开级数。这里的离心率——与圆周轨道的微小偏差——就是小参量的自然的选择。回顾第 1 章中描述的庞加莱的许多工作，它们都是处理级数逼近及其收敛性的。

久期项(secular terms)表示在相应的级数表达式中时间变量的线性(或者有时更快的)增长。由于我们关心的是时间趋于无穷大时系

统的行为，因此含有久期项的级数表达式很可能不保持有界。如果在精确的计算式而不是在幂级数逼近中不含有久期项，那么就能够得出稳定性的结论，这是因为刻画(受扰)椭圆轨道的量都是常数。如果确实出现久期项，稳定性和不稳定性都有可能产生。更精确地讲，如果久期项以某种方式相互抵消，使得最后的表达式保持有界，那么我们就得到稳定性；否则系统就是不稳定的。两种情形中仅仅通过逼近估计进行的计算都不能最终解决问题。

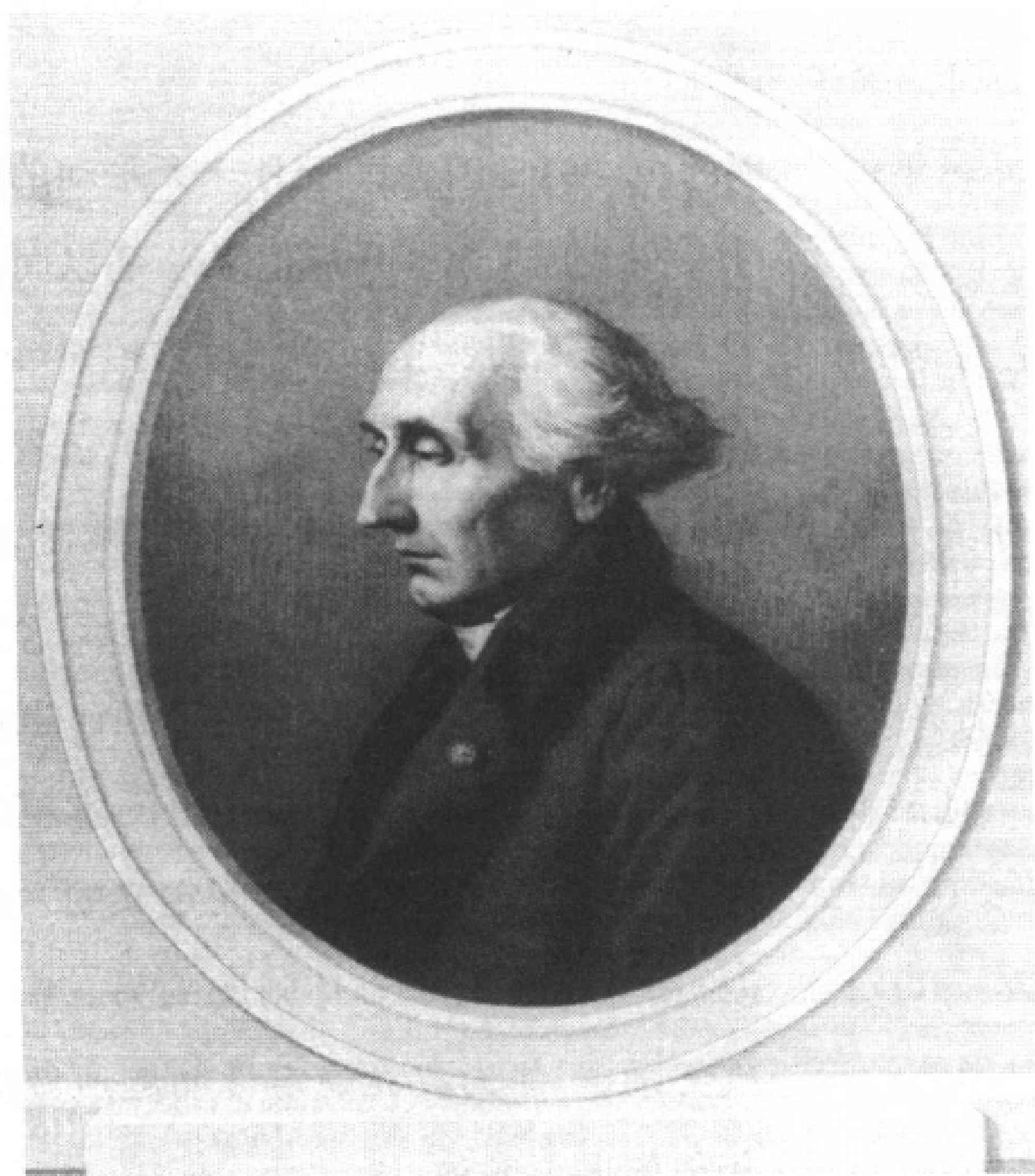
现在拉普拉斯的结果的地位是显而易见的。通过证明在一次逼近中不出现久期项，他无法证明数学模型的解的稳定性，就像他不能证明不稳定性一样。而且，即使证明了稳定性，它指的也是 n 体问题而不直接针对太阳系本身。

虽然如此，它仍是天体力学中的开创性结果。直到此时，科学界还没有给出关于稳定性的明确观点。牛顿、欧拉和其他人在试图理解月球的轨道时碰到许多严重的问题。他们相信行星的运动会引起更困难的问题，因此并没有尝试关于稳定性本身的重大问题。拉普拉斯周密的分析与他引进的一般方法的雏形使之成为可能。因而他发展的扰动方法具有极为重要的历史意义：为后人指明了一条前进的道路。或许这一方法最引人注目的应用，是 19 世纪中叶根据亚当斯(Adams, 1819~1892)和勒威耶(Le Verrier, 1811~1877)的预测发现了海王星。

天体的旋律

不久关于稳定性问题的下一个贡献意外地出现了。这是由约瑟夫·路易·康特·德·拉格朗日(Joseph Louis Comte de Lagrange)在 1774 年做出的。他在 1736 年出生于都灵，是意大利人与法国人的后

裔，比拉普拉斯年长 13 岁，他与后者有着惊人相似的经历。他的父亲在几次不明智的金融投资后破产了，因此年轻的约瑟夫·路易不得不出外做工。16 岁时，拉格朗日成为都灵炮兵学校的几何学教授。4 年中他曾经给欧拉寄去一篇关于等周性质（边界等长的两个或多个几何图形的性质）的论文。在论文中他引入一些思想，以后发展为变分法（calculus of variations）的基础。今天变分学已发展成为数学中的一个独立领域。后来拉格朗日担任柏林皇家研究院科学部主任，最终被选入法兰西学院，其前身是法国科学院。



照片 4.2 约瑟夫·路易·拉格朗日。（巴黎，戈捷-维拉尔提供）

拉格朗日的生活和事业像比他年轻的拉普拉斯一样成功。但重要的是，无论是朋友还是陌生人，每一个人都对约瑟夫·路易有极好

的口碑。他会帮助许多需要帮助的人而不考虑自己的处境。他并不抱怨拉普拉斯否认其贡献中有自己的功劳。对数学以外的许多事物他都感兴趣，并具有一个思想家的博学，努力从整体的观点理解世界。他没有不喜欢的人，他的心胸与学识一样宽广。

在早期的研究生涯中，约瑟夫·路易被天体力学中的问题所吸引。他是一位分析学家，是将分析语言引进力学研究的第一个人，这种方法与牛顿在《原理》中应用的源于古希腊人的几何方法形成了对照。拉格朗日在不同的时期研究三体问题，本章末我们会发现许多平衡解至今仍沿用他的名字。他为研究这个问题与天体力学中的其他问题而付出多年的心血。

1764年，年仅28岁的拉格朗日因为关于月球天平动的论文而赢得巴黎科学院的大奖。从地球上观察，月球似乎总是以同一个表面朝向地球；月球的暗面只能在第一批太空探测器对它拍照后才被人们看到。实际上，轻微的向左和向右旋转会使月球暴露它表面略多于一半的部分：大约表面的60%。月球的这种振动被称为天平动(libration)。拉格朗日能够利用牛顿万有引力定律解释这个现象。

拉格朗日在1766年因为解决一个更加困难的问题而赢得第二次科学院奖。他解释了由太阳、木星以及当时所知道的木星的四个最大的卫星(木卫一、木卫二、木卫三和木卫四)共同定义的六体问题中的某些差数。1772年拉格朗日由于有关三体问题的另一篇论文，而获得巴黎科学院的又一次奖励。他为攻克稳定性问题所做的基础工作都已准备就绪，1774年他取得了成功。

每当遇到困难问题的时候，拉格朗日都尽量使自己能够连续地思考。这是相当困难的，由于所处的职位，不可避免的琐事和职责经常会打扰他所需要的宁静。在由腓特烈大帝举办的一次大型招待会

上，约瑟夫·路易像通常一样心不在焉。几周以来他的思想都集中在稳定性问题上，但是他无法克服一些技术性的困难。在那间华丽的烛光映照的大厅里，许多人向他问候并想与他交谈；出于礼貌，他不能拒绝任何人。他本想集中精力思考问题，遗憾的是这显然不是适宜的场合。最后，一位侍从宣布音乐会即将开始，拉格朗日笑了，他一直在等待这一时刻。

一位朋友看到他脸上流露出满意的表情时问道：“你真的那么非常喜欢音乐吗？”约瑟夫·路易忍不住大笑起来。“是的，我确实喜欢，”他回答道，“我喜欢音乐，因为它可以使我独处。听了乐曲的前三小节，第四小节就没有什么区别了。我任由自己去思考其他问题，没有什么能够干扰我，这样就解决了不止一个困难的问题。”

对于拉格朗日来讲，那个夜晚毫不例外。他沉浸于音乐带来的宁静之中，在自己的内心世界任意遨游，不受任何干扰地沉浸在个人发现过程之中。他回想起问题中未解决的细节部分并步步深入，越来越接近于问题的答案。音乐会结束时他已经向前迈出了重要的一步，他急于回到家进行最后的计算。

1774~1776年，拉格朗日在以下意义上推广了拉普拉斯关于稳定性的结果。他证明对于椭圆轨道（给定的行星的轨道）离心率的所有阶逼近，轨道平面相互倾角的正弦的所有阶逼近，以及关于质量的一阶扰动，太阳系在不存在久期项的意义下是稳定的。这一陈述比拉普拉斯的结果更复杂、更具有专业性，我们不想完全解释它。其本质就是离心率的所有阶逼近包含在其他更加精细的估计中，并且所有的估计都是对于扰动体质量得到的一阶逼近而做的。拉格朗日的级数逼近使用三个小参量：离心率，轨道平面的倾角，以及行星质量与更加巨大的太阳质量之比。

这一新的进展推广了拉普拉斯的结果，他采用比那位侯爵更精细、更好的逼近，但是并没有完全解决稳定性问题：拉格朗日的估计，提供了物理实在的一个改进的但仍不完美的模型。尽管如此，这仍是一个非同寻常的结果，它表明太阳系本身可能是稳定的。

拉格朗日整个一生都对天体力学保持着浓厚的兴趣。新近取得的成就，鼓舞他去研究月球的运动和彗星的摄动 (cometary perturbations)。他撰写了一些更深层次的论文，为此赢得了其他的奖励。另外，拉格朗日继续在更普遍的意义下发展力学研究中的分析方法，1788 年出版了一本巨著《分析力学》。他在 19 岁时就决定写这本书，书中首次引进力学是四维几何系统的思想：三个空间坐标和一个时间坐标。这种独到的见解自然而然因爱因斯坦在此基础上建立了相对论而变得有名。拉格朗日还发展了拉普拉斯曾用于稳定性计算的扰动方法，并使之得到广泛的应用。实际上，他阐述的思想比许多现代教科书更加清晰。德国物理学家马赫 (Ernst Mach) 将《分析力学》描述为“对于我们思维经济学的一个伟大贡献”，我们在下一章将要谈到的哈密顿 (William Rowan Hamilton, 1805 ~ 1865) 称它为“科学的诗篇”。虽然如此，从本书主题的观点来看，具有讽刺意味的是拉格朗日对自己将力学简化为纯粹分析的一部分感到自豪，在他的大作中竟然不含一幅图形。

简要地讲，扰动方法是这样应用的。假定我们得到一个能够完全求解的微分方程，可以给出解作为时间的函数的显式表达式 (见第 1 章)。我们希望求解在以下意义上与它“接近”的另一个方程：其向量场与原方程的向量场有很小的差别。我们自然期望未知方程的解与所得到的已知方程的解同样地接近。未知方程的每个解都含有参量，参量的个数与相空间的维数相同，参量由问题中特定解的初值

条件决定。对于原先的方程来讲，所有的参量都是常数；本质上，它们说明了基本解的适当组合对于解满足给定的初值条件是必要的。

拉格朗日的扰动方法允许这些参量随时间变化，其中关键的假定是由于新问题与初始问题的差别非常小，从而参量的变化非常缓慢。（因此这种方法有时被似是而非地称作常数变易法！）于是我们可以将方程的解表示为快速振荡与缓慢漂移相结合的产物，从而通过平均由快速振荡产生的累积扰动，导出关于慢变项的方程。这些平均方程通常比原方程简单，我们能够求解，它们的解可以对“真正的解的动力行为”提供比初始未受扰解更好的逼近。在天体力学中，快速振荡可以是行星每年围绕太阳公转，而缓慢漂移，即椭圆轨道的进动（缓慢的旋转）在二体宇宙中保持不变。

像拉普拉斯一样，拉格朗日的科学才能也得到拿破仑·波拿巴的赏识。这位皇帝认为约瑟夫·路易站在“数学科学高耸的金字塔上”。拉格朗日被任命为上议员、法兰西第一帝国的伯爵，最后获得一级荣誉勋位。由于许多杰出的成就，拉格朗日不仅在科学界而且在整个社会上得到完全的认可。不幸的是，他的个人生活并不总是幸福的。他的第一位妻子英年早逝，约瑟夫·路易不想再婚。他在以后的20年中长期抑郁消沉，或许从未间断的工作使他度过了那段时光。接着奇迹出现了。天文学家勒莫尼耶(Lemonnier)年少的女儿被拉格朗日的不幸深深打动，因而向他求婚。约瑟夫·路易当时56岁，他清楚这一婚姻以及这位少女将要做出的牺牲的分量，但是最后他接受了。与所有的预期相反，这桩婚事极成功，它改变了拉格朗日20年余生的生活。

尽管震惊于法国大革命带来的极度恐怖，拉格朗日仍然积极尝试

改良法国的大学教育。1794年他创立了闻名遐迩的综合工科学学校。他还在高等师范学校任教，拉普拉斯是他的助手。

1813年春天，拉格朗日病倒了。感觉到死期将至，他召集最亲密的朋友做诀别。他平静地诉说了自己感觉到体力和智力已逐渐衰退，并将毫无痛苦和遗憾地离去。“死亡不过是身体的完全休息，”他说，“我期待着死亡；是的，我期待着死亡并感受到其中的快乐，但我的妻子不希望这样。此时此刻，我宁愿妻子不那么贤惠，不那么渴求重新唤起我生命的活力，这会让我轻松地离开。我已经完成了自己的事业；我在数学上赢得了声誉。我从未憎恨任何人，我没有做过坏事，我将从容地离开人世……”

两天后，1813年4月10日清晨，约瑟夫·路易·拉格朗日永远合上了双眼。他的众多朋友、法兰西以及整个科学界都在为他哀悼。他的遗体被安葬在先贤祠，与法国伟大的政治家和军事家葬在一起。然而拉格朗日的思想宇宙永存。

永恒回归

关于太阳系稳定性的探索，并未因拉格朗日的去世而终止。1809年，另一位法国数学家泊松（Siméon Denis Poisson, 1781 ~ 1842）又向前迈进了一步。他证明行星的长轴关于质量的二阶扰动不包含纯粹的久期项。泊松给出了比拉格朗日稍好的逼近，并引用更多的论据支持稳定性，但是他也没有完全解决这个问题。

泊松属于新一代的法国数学家，他们将成为19世纪分析中的巨大成就的引路人。在得到稳定性结果时，泊松年仅28岁，他已经做好准备成为微分方程理论的学术领袖。像他的前辈拉普拉斯和拉格朗日一样，他对数学研究的兴趣与在物理学中的同等天分相结合。

他在数学物理学、流体动力学、静电学、磁学、弹道学和弹性力学等领域都做出了贡献。用于恒星动力学研究的一个著名的偏微分方程至今仍然沿用他的名字。如果在这个方程中改变某个常数的符号，我们就得到等离子物理学中的一个模型。[这一发现归功于俄国数学家弗拉索夫(A. K. Vlasov)，在第5章我们将会了解到他是柯尔莫哥洛夫的老师之一。]上面的同一个方程在弹性理论和流体力学中也常常出现，这充分证明了数学的统一力。



照片 4.3 西梅翁·丹尼斯·泊松。(柏林的斯普林格-费尔拉格档案处提供)

泊松还提出了与拉普拉斯和拉格朗日不同的新的稳定性定义。他的前辈曾经要求椭圆的长轴保持在某个极限范围之内。泊松却有不同的想法。他认为如果质点系统的构形反复地回到初始位置附近，那么系统的运动就是稳定的。虽然图 1.6b 和图 1.6d 中的平衡

点在这种意义下明显是稳定的，但是泊松的定义更为广泛，包括了其他并不显然的稳定运动。第2章末提到的庞加莱回复定理，就是从泊松的稳定性定义引出的。

在离开法国数学前往东欧继续我们的叙述之前，我们讲述一下泊松稳定性。第1章曾经提到过，《天体力学新方法》一书最后一卷的第一部分讨论稳定性，其中庞加莱阐述的一个主要结果就是他的回复定理，它在《数学学报》刊登的庞加莱的获奖论文中已经出现过。对于三体问题，结论是这样的：假设三个受引力作用的质点在给定时刻处于某个初始位置。假定不发生碰撞并且所有质点的运动都保持有界，那么在充分长的一段时间以后，这些质点即使没有完全回归初始位置，也会极其靠近它们。然而只要这些质点回归它们的初始位置附近一次，我们就可以应用同样的讨论得出质点必然无穷多次回归初始位置附近的结论。庞加莱证明这一性质对于除一个可以忽略的集合以外的所有初值条件都成立，即勒贝格测度为零的集合除外。

这个重要结果还被用于气体动理学理论，后来导致数学的一个分支——遍历理论(ergodic theory)——的诞生，伯克霍夫曾为此做出重要的贡献。如上所述，庞加莱的三卷本巨著中几乎一半内容都是关于这一主题的。尽管如此，隐藏在回复定理证明背后的思想还是相当容易理解的，我们将简要描述它。

考虑装满水的容器，如图4.2所示，假设其中的液体做连续的运动。记 V_0 为某一初始时刻 t_0 时容器中包含水的一部分区域。在其后的某一时刻 t_1 ， V_0 中的水分子将运动到新的区域 V_1 。现在 V_1 可能具有与 V_0 非常不同的形状，但由于水是不可压缩流体，两个区域中水的体积必须相等。在其后的时刻 $t_2, t_3, \dots, t_n, \dots$ ，水分子占据的区域分别为 $V_2, V_3, \dots, V_n, \dots$ 。我们断言在某

一(有限)时刻 t_m , 水分子所占的相应区域 V_m 与初始区域 V_0 重叠或相交。若不然, 所有的区域 $V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n, \dots$ 必须是相互分开的(数学上称为两两不相交的), 因此我们所跟踪的流体的区域占有的体积的总和将不断增加, 最终超过容器的体积。(这就是反证法——数学中常用的一种技巧。)

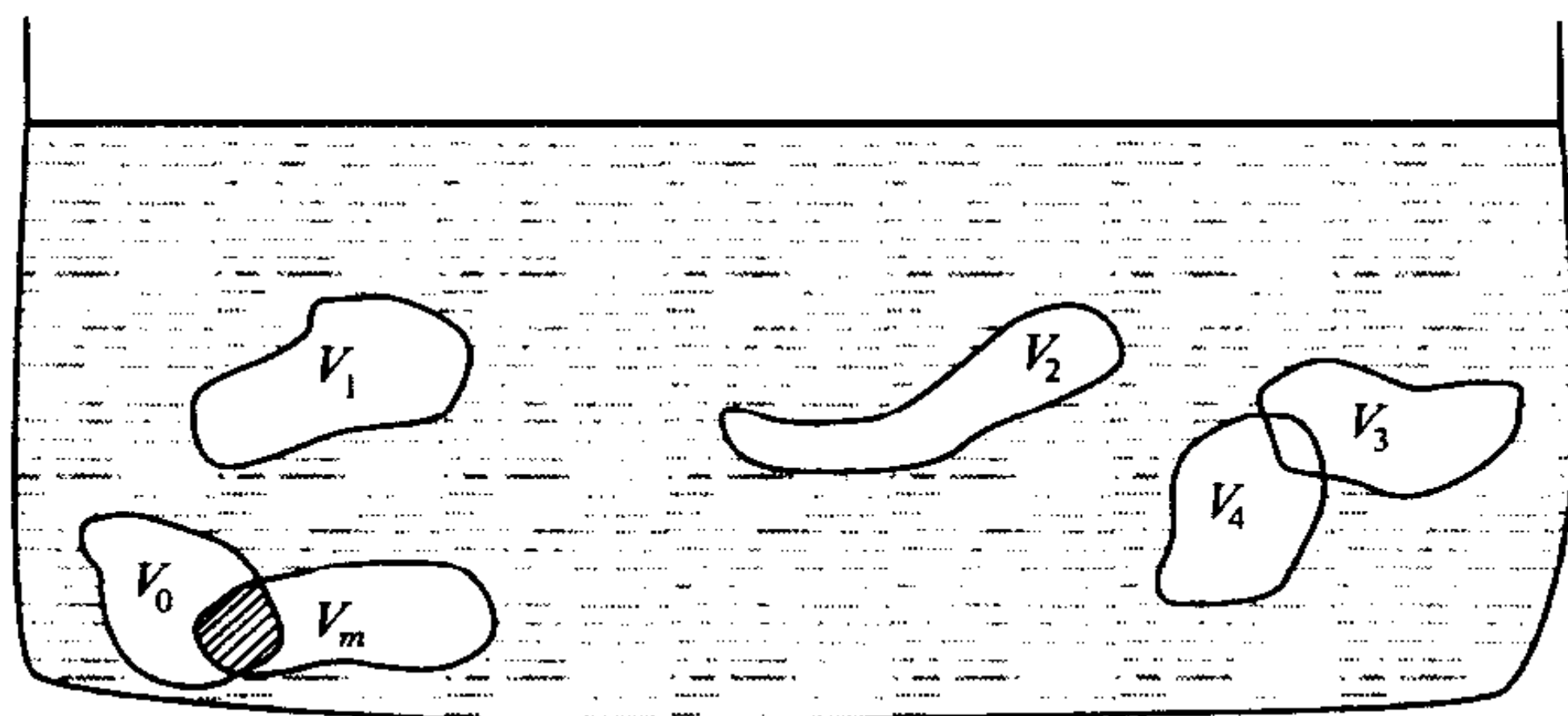


图 4.2 回复定理的证明。

鉴于以上推理, 我们根本没有必要考虑所选取的初始区域 V_0 的实际测度, 因此可以随心所欲选取更大或更小的测度。如果 V_0 很小, 那么 V_m 与 V_0 有公共点意味着某些分子必须非常近地回归它们的初始位置, 尽管这么做可能需要很长的时间。这就是回复定理阐述的结论。在我们的“证明”中, 用装水的三维容器代表相空间, 但是所作的讨论可以用同样的方式应用于任何动力系统的 n 维相空间, 只要微分方程的流或者映射的迭代保持 n 维空间中类似的体积。我们已经指出, 由于按照牛顿力学中的许多守恒律, 天体系统和力学系统中相空间的体积一般都是保持不变的。

我们饶有兴趣地发现, 庞加莱在他修改后的《数学学报》获奖论文中, 应用回复定理从一条同宿轨道推导出存在无穷多条同宿轨道。这个定理在他的获奖论文及修改后的论文中都出现过。

还会有另一个重要的发现。我们必须假设 V_0 的体积是正的。如果它的勒贝格测度为零，那么上述推理就失败了，因为我们所跟踪的区域的体积总是零，它不会增长。实际上，我们将水分子理想化为一些质点，那么可能存在某些水分子永远也不回归其初始位置的领域中。因此，回复定理的正确陈述中必须排除勒贝格测度为零的初值条件的集合。当然，这并不降低定理本身的价值，因为所排除的集合的大小是可以忽略不计的。

用现代的术语来讲，我们称回复性是通有的(generic)，它意味着几乎所有的解都满足回复性。这是庞加莱独创的另一种观点，直到他那个时代人们普遍认为只要存在一个反例，就否证了通则。庞加莱不同意这种观点。即便存在无穷多个反例，只要它们在实际中出现的机会很少，庞加莱仍然可以泰然处之。如果这些反例同系统无限的可能性相比，测度是可以忽略的，并且除此以外系统的所有解都满足通则，那么还有谁在乎这些反例呢？动力系统理论如今关注的中心，就是在相空间中找到某些数学对象与事件的此种通有性质(generic properties)。

当我们认识到测度的概念在那个时代还没有被定义，庞加莱的洞察力就更为引人注目了。他对此有着明显的直觉并在《天体力学新方法》一书中付诸应用。按照康德(Immanuel Kant, 1724 ~ 1804)的观点，没有直觉的理念是空洞的，而没有理念的直觉是盲目的。如果我们相信这位德国哲学家的话，那么庞加莱一定是闭着眼睛作出他的发现的。但是他的洞察是多么的透彻呀！

扰动世界

战争在持续着。经历了几个世纪的奥斯曼封建统治之后，罗马尼亚

宣布独立了。那是一个严冬，但是在多瑙河南岸巴尔干半岛前线的战事频频向国内报捷。毫无疑问，罗马尼亚军队将要赢得最后的胜利。

1878年1月31日清晨，看起来与往日没有什么不同。布加勒斯特的市民们排着队等候购买报纸，盼望着了解这场战争中新的胜利以保卫他们年轻而脆弱的自由。但令他们大为吃惊的是，头版头条并没有涉及到这场战争。取而代之的是大字标题宣布了一个文化领域的胜利：哈雷特(Spiru Haretu, 1851~1912)在巴黎获得数学博士学位，成为罗马尼亚第一位获得博士学位的数学家。这位年轻人在前一天顺利通过了论文答辩。这样的事件在那个年代是很罕见的；所有领域具有博士学位的人数都是很少的。作为数学领域的第一位，这件事引起特别的关注并被视为一个民族的骄傲是很自然的。事实上在第二天，《罗马努尔报》就将哈雷特的成就与罗马尼亚军队在普列文取得的新胜利相提并论。

今天组成罗马尼亚的三个公国为保卫中西欧，抵御来自亚洲及奥斯曼帝国的人侵，已奋战了1000多年。罗马尼亚人为获得在自己土地上生存的权利而进行着不懈斗争。看起来这种局面终于要结束了。

当罗马尼亚守卫着通向东方的大门时，中西欧在文化和教育方面已经繁荣了。最初的高等教育机构早在11世纪的波洛尼亚和12世纪的巴黎和牛津就已经建立。相比之下，罗马尼亚最早的大学于19世纪才建立起来。在遭遇为生存而奋战的重重困难之下，罗马尼亚人崇尚文化并将文化看成是民族的首要利益。（一句古老的罗马尼亚谚语讲“Ai carte, ai parte”，意思是，“只要你学习，生活就会变好”。）民族自豪感从这里萌芽，其重要性与此国家在数学上获得的第一个博士学位联系起来。

目前，在美国和加拿大每年授予1000多个数学博士学位，大概

相当于整个欧洲的数目，因此我们很难想像哈雷特的成就怎样激起其全民族的喜悦。罗马尼亚人仅仅因为这件事而高兴，有谁知道他的论文是研究什么课题的呢？普通人只需要知道这个消息，而不是它的内容。但是那天一些看了报纸的人认识到哈雷特还震惊了科学界。他是第一个就太阳系的稳定性提出严重置疑的人。

26岁时，哈雷特向索邦大学提交了一篇论文“论行星轨道长轴的不变性”。尽管这篇有影响的论文题目枯燥而含蓄，但其结果比泊松的论文更前进了一步。哈雷特证明行星轨道长轴的值关于质量的三次幂级数逼近中确实出现久期项，从而明确地得出与拉普拉斯、拉格朗日和泊松相反的结论。哈雷特的计算表明行星轨道的长轴在时间变化时不一定是有限的。



照片 4.4 斯皮鲁·哈雷特。(F·迪亚库的收藏)

我们曾经提示过，这一陈述不能立即推出不稳定性，因为不清楚轨道长轴的变化究竟有多大。然而，它使人们明确了，随着时间的推移，行星的轨道可能会发生形状和大小的变化。

哈雷特通过考虑比泊松所采用的更好的逼近而得出他的结果。别人当然也试过这一步，但遇到了看起来无法逾越的技术困难。直到 1878 年，进展才由刘维尔 (Liouville, 1809 ~ 1882) 和皮瑟 (Puisseux, 1820 ~ 1883) 在 1841 年以及蒂斯朗 (Tisserand, 1845 ~ 1896) 在 1876 年做出，他们显著简化了泊松冗长的证明。蒂斯朗曾经运用雅可比在有关结点的约化 (reduction of nodes) 的一篇著名论文中的想法，这篇论文已向理解三体问题迈出了重要的一步。

这位罗马尼亚数学家还应用这些技巧将原有问题转化为更简单的问题。用现代的数学术语来讲，他应用运动常数来减少需要求解的独立方程的数目，从而完成对具有对称性的哈密顿系统的约化。在第 1 章我们讨论流形时曾提到，这样做降低了相空间的维数，使他能够将计算推进到三次逼近。在第 5 章我们会更多地讲述这一技巧。从这一步出发，哈雷特发现在描述行星长轴的公式中确实会出现久期项。在前人失败之处，他成功了。

随后哈雷特得到格勒诺布尔大学提供的教授职位。但是，他觉得罗马尼亚更需要他，他的爱国精神以及为属于这样一个新近独立的胜利国家的自豪感激励他返回了布加勒斯特——“小巴黎”，第二次世界大战以前欧洲给这座美丽的城市的赞誉。哈雷特成为布加勒斯特大学的一名教员，为建立那所大学的良好声誉起了决定性的作用。他影响了许多学生的职业生涯，并为所有实力的数学学院的建立打下了基础。但这只是他为公众事业所做的一个方面。

哈雷特在回到祖国后进入政界，20 年后取得了像潘勒韦在法国

一样的成功。作为自由党的一员，他在年轻时就被任命为教育部长，并多次在不同的政府担任这一职务，在职期间他建立了国家基础教育体制。他许诺在每一个乡村建立一所学校，使所有的孩子都能够接受教育，选拔和奖励有才华的学生，并使政治家和投资者确信良好的教育体制是经济繁荣的前提。哈雷特还将法国模式应用于罗马尼亚的社会现实，改革初等和高等教育机构。由于其影响和个人交往关系，他向那些将来在巴黎获得博士学位的年轻学者敞开了大门。哈雷特利用 20 世纪初罗马尼亚和法国之间有利的政治气候促进了两国之间丰富的文化交流。

作为部长，哈雷特非常平易近人，他抽出时间走访边远乡村的学校，与教师们谈心，力求在教育方法和资金方面努力给予帮助，从而特别受民众的欢迎。为了如实了解乡村教育的实际情况，他会更像一位朋友而不是一名政府官员那样布衣私访。

由于专心于公众事业，哈雷特没有时间和精力继续他早期的科研工作。虽然他一直研究数学，但做出的结果不再那么深刻。尽管如此，1910 年他出版了一本有趣的、有独到见解的著作《社会力学》。这本书通过将力学中的方法运用到社会的数学模型中，试图将他的数学知识和深刻的社会经验结合起来。从这种观点来讲，他可以被看作是社会学一个分支的先驱。

哈雷特的数学工作有一段时间几乎被遗忘了。他的细致的扰动计算包含在关于稳定性问题的最后一批工作中。他的不完整的结果表明幂级数逼近不会提供明确的答案，而且就像我们所见到的，其后不久庞加莱就开辟了定性方法。尽管这样，庞加莱在《天体力学教程》第一卷中称赞了哈雷特的贡献。而且，由于与小分母问题 (small denominators problem) 的联系，哈雷特定理 (Haretu's theorem) 可以

认为是我们在第 5 章将要叙述的 KAM 理论大厦中的一块基石。1958 年，蒙彼利埃的力学教授让·梅弗雷(Jean Meffroy)重新考虑了哈雷特的想法，他应用更新的方法不仅证明三阶久期扰动项的存在性，而且发现了它们的解析表达式。

哈雷特在 61 岁时与庞加莱在同一年去世，他留下一个健全的教育体系，并成为其他罗马尼亚知识分子引以为荣的楷模。为表彰他在天体力学领域做出的贡献，国际天文学联合会以他的名字命名了月球上的一座环形山。在布加勒斯特市中心的大学广场上，矗立着一座手拿学位证书的人物塑像。这座塑像在经历一次世界大战的炮火以及两次革命的洗礼后幸存下来。在塑像的基座上人们可以看到这个名字：斯皮鲁·C·哈雷特。

如何稳定才算稳定？

1898 年，庞加莱在一篇论文中概括了 19 世纪末关于太阳系稳定性问题的研究进展。尽管文中存在一些历史性的小错误，但它对于非专业人士来讲仍然是一篇有价值的综述文章。“对天体力学的发展感兴趣但只能粗浅了解的人们，在发现太阳系的稳定性已被多次证明时必定会感到吃惊，”庞加莱写道，

拉格朗日首先证明了稳定性，泊松再次给出证明，过去已经给出许多种证明，以后还会有更多的证明。难道原有的证明不充分，还是新的证明是多余的？也许有一天，当这些人听说一位数学家通过严密的论证证明太阳系是不稳定的，毫无疑问他们会惊讶不已。这确实可能会发生，没有与之相矛盾的事实，并且原有的证明仍然是有价值的。事实上它们只是逐次逼近，因此它们并

不试图将诸轨道根数严格地限制在狭窄的范围内使之无法逃脱。

在做出这一慎重而适当的评估以后，庞加莱不再试图通过过分强调数学在实践中应用的重要性来愚弄科学界和他本人。他深知所有这些工作只是由牛顿提出的理想化数学模型引出的。此模型在多大程度上表达了实在(reality)，是一个更困难的问题。1891年，在另一篇关于三体问题的通俗文章中，庞加莱写道：“研究者们最专注的问题之一是太阳系的稳定性。说实话，这与其说是物理问题倒不如说是数学问题。即使找到了精确的一般性的证明，人们还是不能下定论：太阳系是永恒的。实际上，它可能受牛顿的万有引力以外的其他力量的影响。”像在其他许多著述中一样，庞加莱是先知者：大约四分之一个世纪以后，爱因斯坦提出了广义相对论。

定性的时代

哈雷特的论文大约产生于一个数学时代的终结。定量方法(quantitative methods)在两个世纪中的统治地位正在削弱。布伦斯关于 n 体问题首次积分的工作预示着定量时代的结束。几年后，庞加莱的获奖论文标志着定性方法(qualitative approaches)时代的开端。定性研究始于微分方程，并最终导致动力系统几何理论(geometric theory of dynamical systems)的产生，但它很快就进入数学的其他领域。在科学的各个分支中旧的方法和观念似乎都已经发挥到了极限，对进步和发展已经失去其中心作用。新的观念生逢其时。

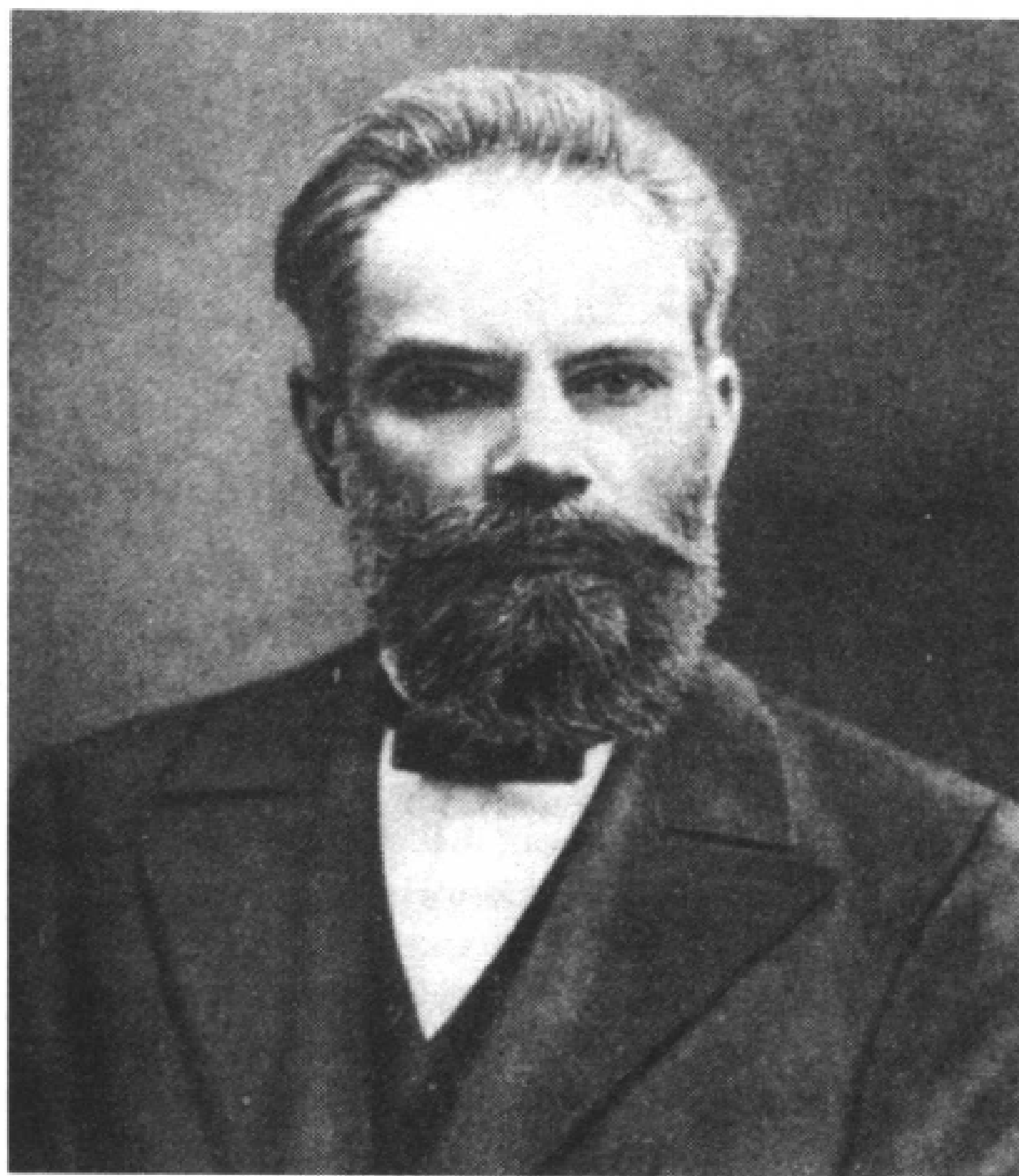
直到19世纪的最后10年，人们的目标仍然是获得精确的结果，寻找可以产生精确的数值预测的公式，对方程进行积分从而得到完整的解。数学家们，比如克罗内克，都相信上帝是用整数创造了世

界，最终一切事物都能够简化为整数。在某种意义上，这是由希腊的毕达哥拉斯哲学学派提出的思想的扩展，毕达哥拉斯学派寻求利用正多面体，即五种完美的立体解释一切事物。事实上，一旦我们拥有了一种语言、一套工具，那么试图让整个世界迁就我们的方法就相当具有诱惑力。然而，大自然并不像我们确信的这些系统一样简单，动力学也不例外。能够“完全”解决的问题实在是太少了。物理现象一般是非线性的，有时甚至是混沌的。现在我们认识到除了微不足道的一类以外，大多数微分方程都不可能显式地求解。但是随着庞加莱的进一步发现，数学家们意识到即使他们自己不能找到精确解，他们仍旧能够研究解的许多性质。这就是定性方法的本质。

稳定性是一个典型的例子。如果人们不能用显式的公式表达微分方程的解，或者甚至不能给出一个合理的近似估计，他们仍然能够试着确定我们已知其存在却未精确地描述的某类轨道是否稳定。我们经常能够回答这样的问题，而且动力系统定性理论的目的就是寻找一些方法和结果以帮助解决类似的问题。

尽管为解决太阳系的稳定性问题，人们已经付出了 200 年的努力，但直到 19 世纪末，一位俄国数学家李雅普诺夫才首次试图建立关于稳定性的完整一般的数学理论。看起来很奇怪，人们在没有必要的工具甚至对所讨论的概念没有统一的定义的情况下就试图解决科学中的问题，但是科学中的发现就像生活中的其他部分一样，经常是杂乱无章的。虽然我们的教科书没有这样叙述，但是严密的数学论断通常都是在经过多次失败以及在提出和解决一些特殊情形中取得部分成功以后才完善起来的。直到 1892 年李雅普诺夫在哈尔科夫完成博士论文并在 1 年后发表，常微分方程的解的稳定性的一般概念才被定义。他的长篇论文在 1907 年被译成法文出版，论文

中的一些观点长期以来被人们广泛引用，而英译本于 1992 年才在《国际控制杂志》上刊出。



照片 4.5 亚历山大·米哈伊洛维奇·李雅普诺夫。（莫斯科，科学出版社提供）

数学方面的资质通常在很年轻的时候就会表现出来，最有创造性的数学家最迟也在 30 岁以前获得了博士学位。李雅普诺夫却是个例外，他直到 35 岁时才完成学位论文，但在论文出版后不久，他就被认为是当时最杰出的数学家之一。

李雅普诺夫于 1857 年 5 月 26 日生于雅罗斯拉夫。1880 年他毕业于圣彼得堡大学，导师是切比雪夫 [Pafnuti Chebyshev (1821 ~ 1894)，今天在流体流动的计算机模拟中被广泛应用的切比雪夫多项式就是以他的名字命名的一类函数]。在完成了博士论文以后，李雅普诺夫立刻就被任命为乌克兰的哈尔科夫大学的教授，10 年后他成

为圣彼得堡科学院的正式院士。李雅普诺夫的著作并不很多，但他所有的成果都开创了新的研究方向。李雅普诺夫喜欢独居，在成为科学院院士后被免除了教学任务，他将几乎全部的时间都用于研究工作。仅有的几次在大学外面的公众场合露面是参加他哥哥瑟吉(Sergei)的音乐会。瑟吉是一位作曲家和民歌收集者，一段时间曾是圣彼得堡皇家合唱团的指挥。李雅普诺夫的死出人意料并且充满悲剧色彩。1918年他的妻子死于结核病，李雅普诺夫无法忍受失去爱妻的痛苦，在同一天饮弹自杀。所有抢救他生命的努力都失败了，3天后他离开了人世。

李雅普诺夫的博士论文开创了现代稳定性理论。他对这一基本概念给出的定义既简单又强有力。考虑微分方程和它在相空间中的一个特解，比如图 4.3 中由曲线 C 表示的解。如果同一方程由 C 附近出发的其他所有解曲线都永远与 C 保持接近，我们就称这个特解 C 是稳定的。换句话说，在相空间中存在包含 C 的(狭窄的)带子，使得含有带子中的点的每一条解曲线都永远保留在带子中。这个概念极大地推广了第 1 章中引进的不动点或者平衡解的稳定性定义，因为李雅普诺夫的定义可以应用于任何种类的解：定常的、周期的或更为奇异的解。

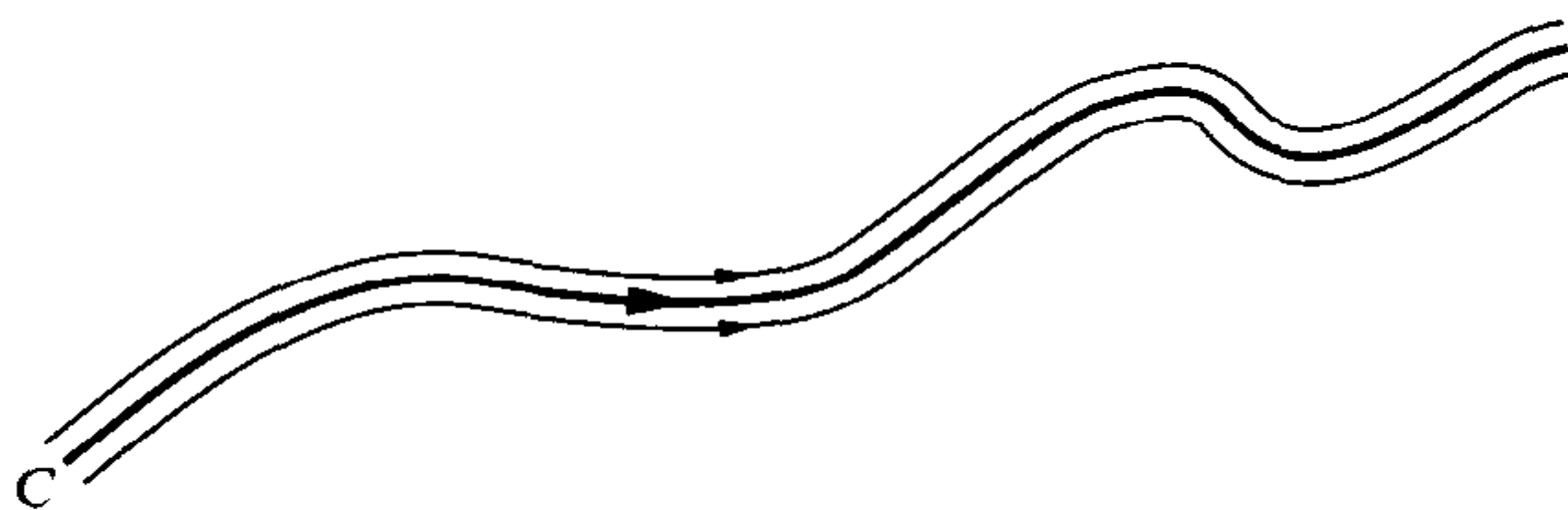


图 4.3 轨道 C 在李雅普诺夫意义下的稳定性。

这一上述定义看起来类似于流关于初值条件的连续依赖性。但

是它们有着严格的区别。连续依赖性仅仅要求方程的解在一段时间内相互接近。两个解在起始点越接近，它们在一起相处的时间就越长，但这通常只能在一段有限的时间区间内成立。稳定性要求在某一时刻接近稳定轨道的所有解永远接近这条稳定轨道。这个定义比泊松的稳定性定义更为严格，由于泊松稳定性仅要求解不时地回归，但并不排除解在两次回归之间处于游荡的情形。

在李雅普诺夫的意义下称一个解是不稳定的，意味着不存在上述的狭窄带子。不管另一条轨道与 C 多么地接近，在一段时间以后它都会离开 C 附近的任何邻域(即任何狭窄的带子)。在图 4.4 所示的例子中，一些轨道离开了狭窄的带子。然而，为了得到不稳定性的结论，找到一条这样的轨道就足够了。

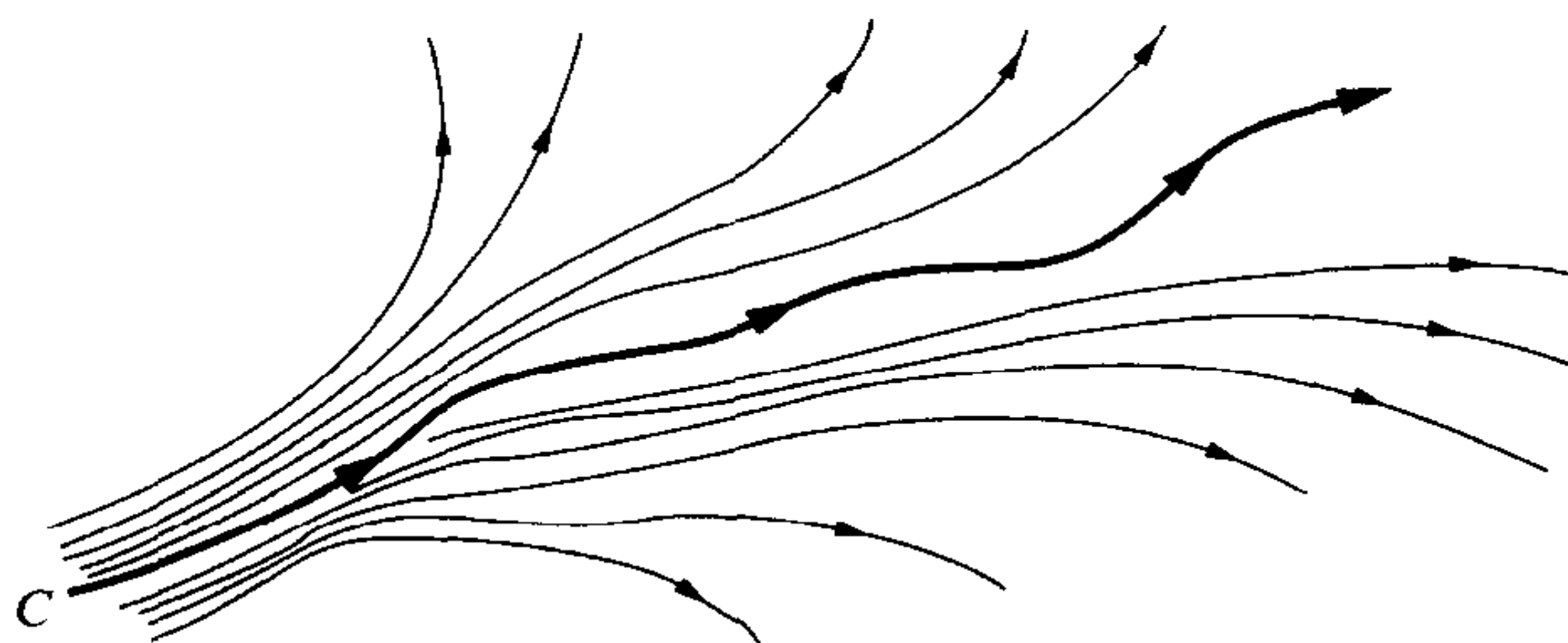


图 4.4 轨道 C 在李雅普诺夫意义下的不稳定性。

稳定性是微分方程的解的一种较少见的性质，即使存在稳定的解，通常要证明其存在性也是相当困难的。李雅普诺夫意义下的稳定性从某种角度来讲是一个“好的”性质，因为它蕴含了相应的解所描述的物理现象的鲁棒性(robustness)。

非平衡解 x 的稳定性研究，通常需要考察另外一个微分方程，而不是 x 作为解的初始方程。看起来似乎令人感到奇怪，但事实上是十分自然的。通过从初始的微分方程定义的量中减去 $x(t)$ ，我们得

到第二个微分方程，其中时变函数 $x(t)$ 成为一个平衡解。考察平衡解的邻域中解的行为，比在依赖于时间的可能复杂的解曲线附近研究解的行为更为容易。这种简单的技巧说明，研究给定微分方程任意解的稳定性，可以简化为研究相关的微分方程平衡解的稳定性。这样，稳定性问题就被简化为研究平衡解的稳定性理论。

这一招所以管用，是因为我们仅仅将注意力集中在单个解上，从而使工作变得简单。为弄懂这一点，我们评述在新的语境中李雅普诺夫稳定性的定义。由于平衡解 E 附近出发的所有解将永远与 E 保持接近，如图4.5所示，在新的方程中，轨道 C 周围的狭窄带子成为围绕 E 的小圆盘或球。现在，这些受扰解本身一般不是平衡解，因此它们会在 E 周围游荡，尽管保持接近 E 。这些解在某些情形中随着时间的推移可能更加接近平衡解，此时我们称之为渐近稳定性(asymptotic stability)。渐近稳定性蕴含(李雅普诺夫)稳定性，反之则不然。在图1.6b和图4.5a中，轨道永远在不动点周围盘旋，但不接近不动点。

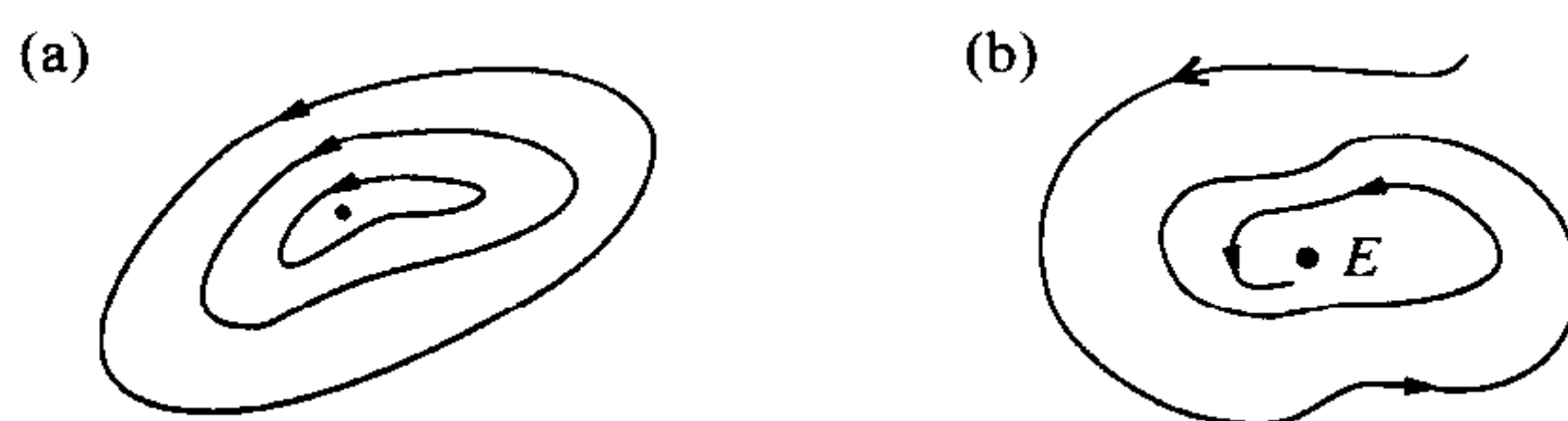


图4.5 (a)李雅普诺夫稳定性，(b)平衡解的渐近稳定性。

稳定性条件——解一直保留在平衡解的小邻域中——在渐近稳定性的定义中是绝对必要的。图4.6给出的例子表明，即使每个解最终都接近平衡解 E ， E 仍然可以是不稳定的。考虑 E 的某个小邻域，我们发现某些解离开该邻域；尽管它们后来会返回小邻域，但并不像李雅普诺夫稳定性定义所要求的那样——能够一直保留在平衡解

的小邻域中。在这个例子中，平衡解 E 不是渐近稳定的，因为它甚至不是稳定的。这表明稳定性的定义有着很好的物理意义：举例来讲，假如考察的量是化学反应的温度，我们不大可能会安心于得知反应温度最终会冷却下来，要是温度最初会超过容器的熔点的话。

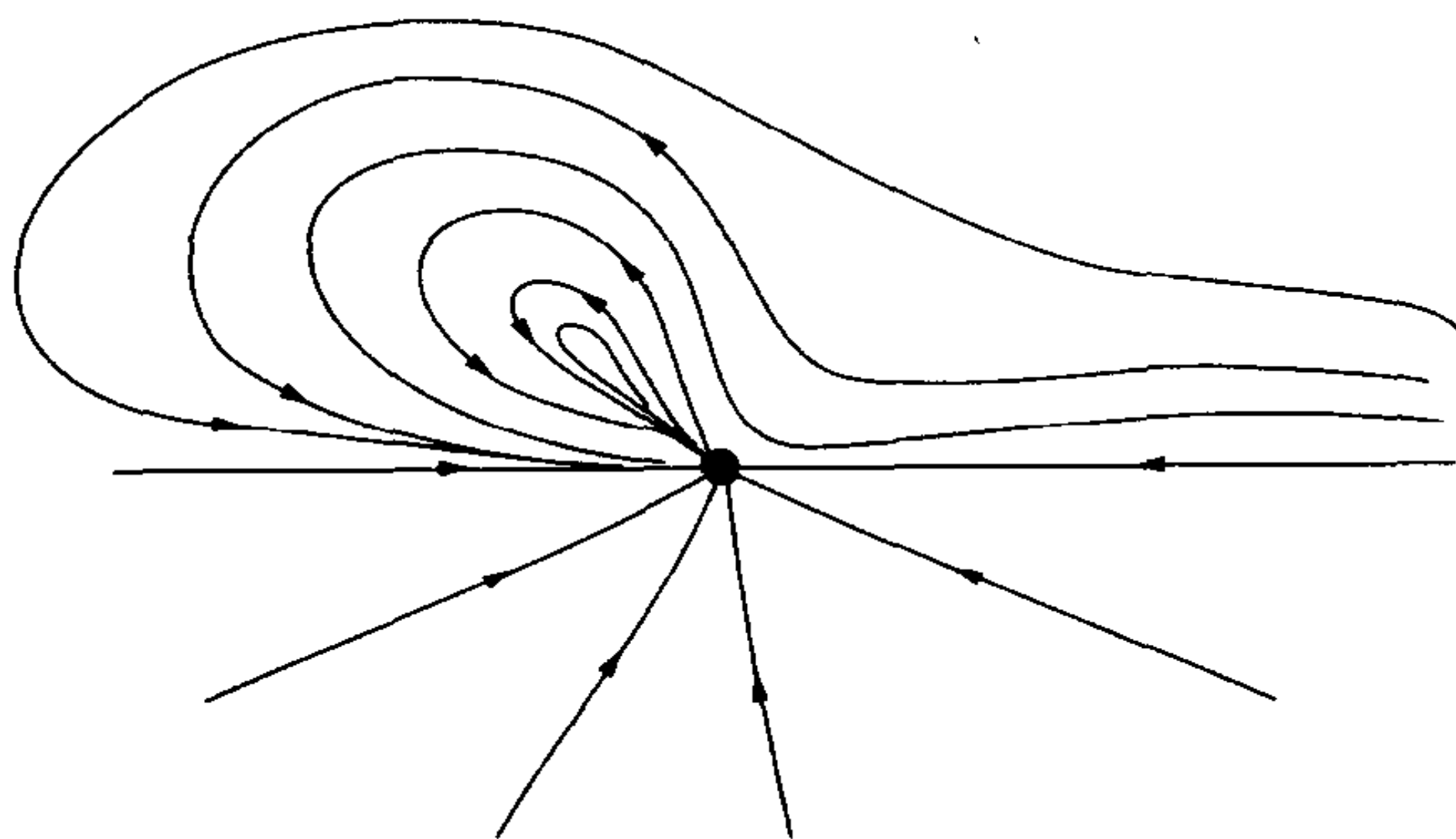


图 4.6 所有解都趋向于不稳定平衡解的例子。

线性化及其局限性

人们很自然地研究最简单的一类微分方程——线性方程——的平衡解的稳定性入手。这些方程是由线性函数定义的。线性 (linearity) 是数学模型中一种既优美又极具诱惑力的性质：其优美表现在它本身容易理解而且易于处理，其诱惑力则在于它允许我们将一切都建模为一个线性过程，因此可以容易地求解所得到的方程。

如第 2 章所述，映射或者函数是一种规则：它给每一个“输入”指定唯一的“输出”。假设输入是一个实数，那么给定的规则可能是：乘以 6 (将 x 变成 $6x$)，除以 4 (将 x 变成 $x/4$)，或者取倒数 (将 x 变成 $1/x$)。粗略地讲，如果将输入加倍，那么输出也加倍的函数就是线性的。上面给出的前两个例子都是线性函数，而最后一个例子则不是。当线性函数具有常系数时 (即系数不随时间发生改变)，相

应的微分方程就能够完全求解，可以用充分认识的函数写出所有解的显式表达式。

(二维)线性系统的平衡解，主要有三种情形：

(1) 渐近稳定性，此时平衡解吸引其邻域内的所有轨道(见图 4.7a和 b)；

(2) 稳定性，为与(1)区别有时也称为中性稳定性，此时平衡解被周期轨道所包围(见图 4.7c)；

(3) 不稳定性，此时至少有一条轨道远离平衡解(见图4.7d, e和 f)。

除零测度的集合以外，所有的二维线性系统都属于这三种情形中的一种。

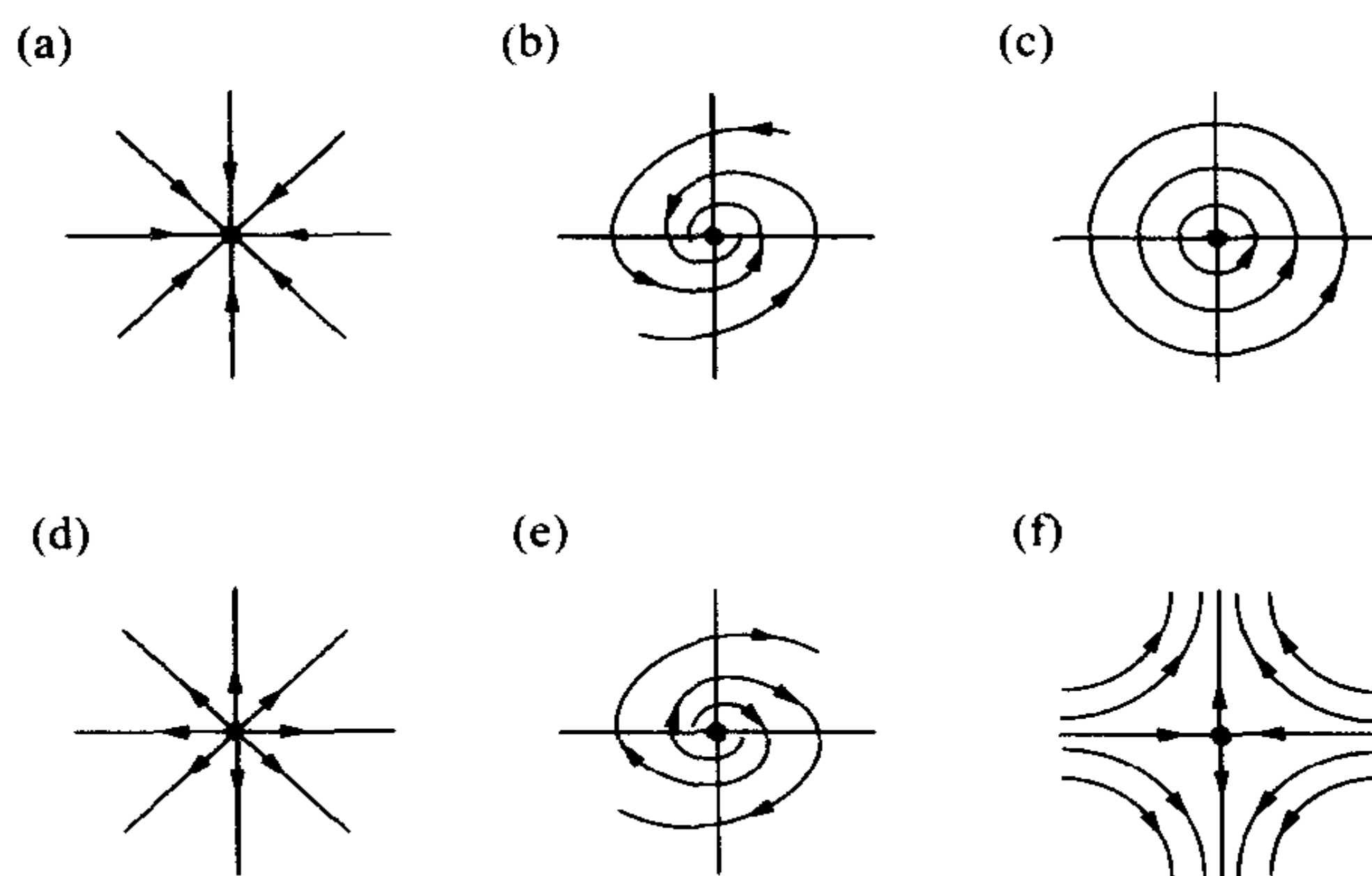


图 4.7 二维线性系统在平衡解附近的全部(动力学)行为：(a)和(b)是渐近稳定的情形；(c)是中性稳定的情形；(d)，(e)和(f)是不稳定的情形。

这是微分方程理论的一个基本结果，或许有人会简单地认为线性系统过于特殊而不重视它，他们认为大多数物理现象都需要用非线性方程来描述从而线性系统是无关紧要的。这是一个错误。在 20 世纪 50 年代末和 1960 年，俄罗斯数学家格罗布曼(D. M. Grobman)和

美国数学家哈特曼(Philip Hartman)各自独立地证明,除中性稳定性的情形(2)以外,其余情形中非线性系统在平衡解附近具有与其相应的线性化同样的定性行为。这意味着什么呢?我们将简要给出一种几何解释,但是首先需要解释一下非线性函数、映射或微分方程的线性化(linearization)的含义。

为此考虑一个单变量函数,如图 4.8 我们画出它的图像。此时“输入”为水平轴上的数,“输出”则是垂直轴上对应的数:函数图像从几何上看相当于店员用以将销售税加到购买价格上的表格。销售税(与收入税不同)是一个线性函数:如果某人花费两倍的钱用于购买时他就要缴纳两倍的销售税。在图 4.8 中,对照线性函数,我们选取表示电子放大器的响应的非线性函数。在输入处于较低的水平时,放大倍数比较小;在输入处于中间的范围时,放大倍数随着输入的增加而增大,并最终达到饱和,趋近一个极限值。相应的图像最初增长缓慢,随后增长较快,最终趋于平坦。这仅仅是非线性函数的一个例子:只要对于每个输入值都给出唯一的输出值(即它的图像不允许“折回”),非线性函数几乎可以具有任意形式。线性函数可以严格地表示为一条直线,因此能够用线性函数和微分方程描述的自然现象是很少的,我们需要应用非线性模型和方法去研究自然界的许多现象。

但是现在假设我们只对某个相关的点 x_0 附近小范围内输入值的行为感兴趣,或许它们正是系统中可以控制的条件。如果函数图像不发生强烈的弯曲或振荡,那么就可以在 x_0 处用与函数图像相切的直线段逼近函数本身。图 4.8 描绘了函数 f 的这种线性化。如果输入值保持在 x_1 与 x_2 之间,与 x_0 相差较小,那么线性化函数就为“真正的”非线性函数提供了一个相当好的逼近。

我们可以利用这一方法在平衡点附近研究非线性微分方程。在平衡解处把原方程的向量场线性化，我们就得到如图 4.7 所分类的线性方程。哈特曼和格罗布曼证明，对于完全非线性的系统，图 4.7a, b, d, e 和 f 中平衡解附近的结构并不发生改变。我们感兴趣的定性性质保持不变。轨道的弯曲或许有所不同，但在情形(1)中(图 4.7a 和 b)，轨道会保留趋向于平衡解的性质，或者在情形(3)中(图 4.7d, e 和 f)存在至少一条轨道远离平衡解。

尽管庞加莱曾经提出将这一思想作为提取非线性系统定性信息的系统方法，但直到格罗布曼和哈特曼才给出严格的证明。这种方法看起来是十分自然的，因为线性系统与非线性系统在平衡解附近的差别与图 4.8 中直线与曲线的差别一样，都很小。小变化不能彻底改变图 4.7a, b, d, e 和 f 的鲁棒结构(robust structure)。当然，在图 4.7d, e 和 f 所示的不稳定的情形中，一旦方程的解离开了平衡解的邻域，线性化方程就不再起作用，我们需要返回到初始的完全非线性系统。线性化只是提供了一个好的局部逼近。

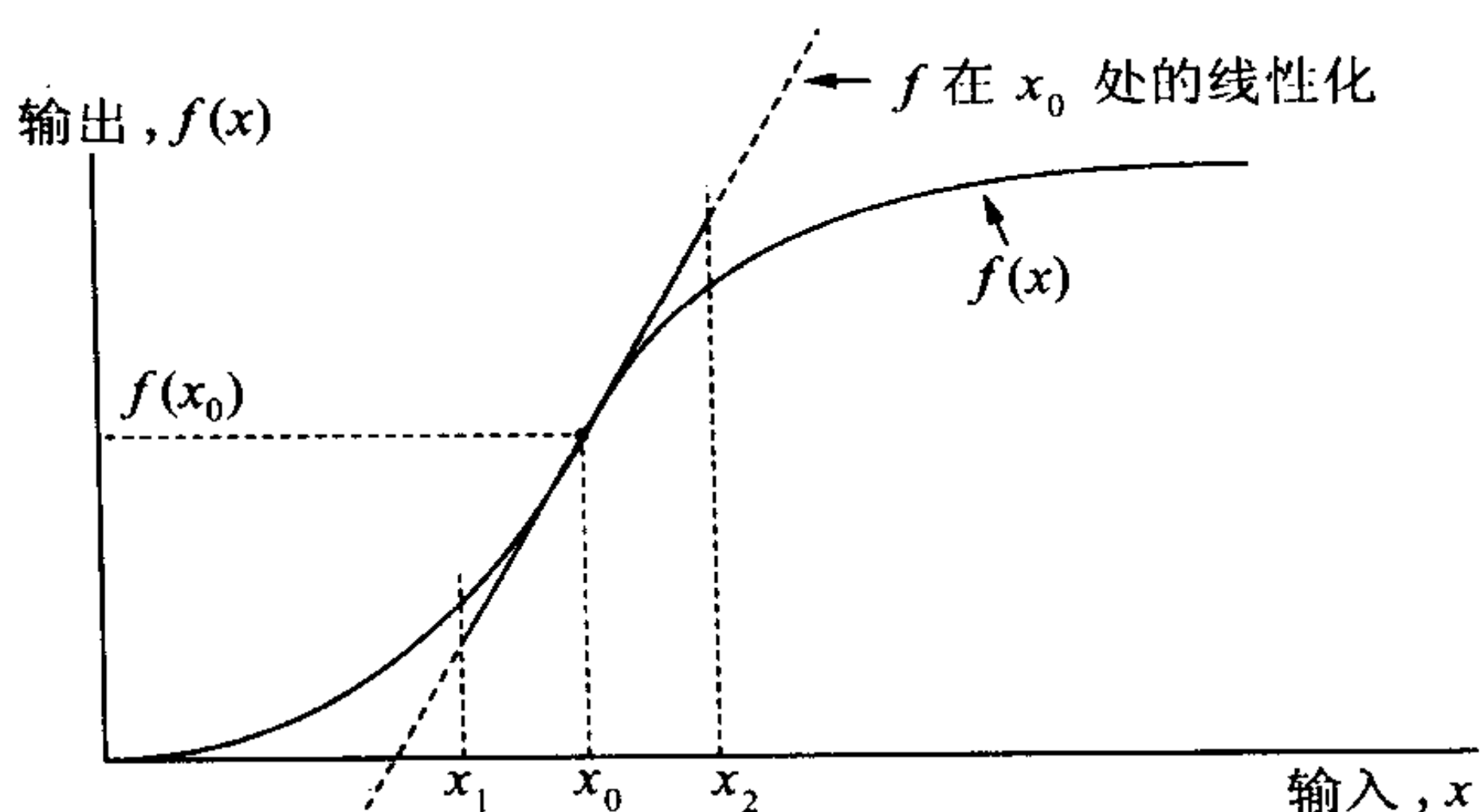


图 4.8 非线性函数及其在 x_0 点的线性化。

然而情形(2)中的局面却完全不同。即使微分方程在最小的扰动之下，轨道也不能封闭，图 4.7c 中的定性结构可以被图 4.7b 或图

4.7e所代替。最初既不扩张又不收缩的环形轨道仍然盘绕在平衡解周围，但是现在它们可能逐渐向内或者向外盘旋。依赖于我们如何在系统中附加扰动，两种局面中的任何一种都可能发生，稳定性可以变成渐近稳定性或者不稳定性。在这种情形中，我们说线性化不能决定非线性方程的动力行为；实际上，没有极其简单的算法能够确定系统在这种微妙局面中所发生的变化。

李雅普诺夫确实提出一种确定稳定性和不稳定性的方法，但该方法需要寻找与初始微分方程协调一致的具有一定性质的函数。这个函数帮助我们考察方程的流在经过包围平衡解的小球时的方向是向内还是向外。前一种情况对应于平衡解的稳定性，而后一种情况则对应于不稳定性。遗憾的是，这种几何上十分简单的想法很难实施：没有简单可行的方法找到李雅普诺夫函数(Liapunov functions)，因此有时应用这种方法比用其他方法证明稳定性和不稳定性更为困难。尽管如此，目前人们尚未知道有“其他方法”能够比目前已知的李雅普诺夫方法更具一般性。

李雅普诺夫的工作的另一个重要贡献是定义了函数(特别是微分方程的解)的特征数，今天被称为李雅普诺夫指数(Liapunov exponents)。这些指数用数量表示线性化方程的解在相空间的各个方向的增长或衰减速率，它推广了庞加莱在获奖论文中引进的周期解的特征指数。李雅普诺夫指数在当前的研究中倍受关注，不仅因为它能够决定个体解的稳定性(如果能够计算出来)，还因为表示增长的正的指数提供了混沌存在的证据。

李雅普诺夫的论文开辟了一个新的研究领域，将稳定性问题从太阳系的特定研究中分离出来，使之成为微分方程理论的一部分，而完全与它的起源无关。这一新方法的优点在于它可以应用于所有的微

分方程。因此它在科学的许多分支中引出了各式各样的问题。现在可以严格证明第 1 章所讨论的摆的两个平衡解(见图 1.7)分别是稳定和不稳定的,更多复杂的问题也被解决了,而且稳定性理论(theory of stability)以其自身的价值已经成为一门分支学科。

李雅普诺夫的博士论文发表以来的一个世纪里,他的原创思想已被极大地扩展,从而产生许多新的概念和方法。今天它们不仅在力学、物理学、化学、理论生物学,实际上还在应用科学和工程学的所有领域得到应用。最初的太阳系稳定性问题,已经发展成为一门涉及最边缘知识的、丰富的交叉科学。它还为混沌的生根发芽提供了沃土。

模型的稳定性

李雅普诺夫稳定性考虑的是单个解及其邻域内的一束解。这些解都是某个给定的微分方程的解,只是它们的初值条件不同。为了理解微分方程的流整体上在定义微分方程的函数受到外部扰动时是否具有稳定性,我们需要引入新的思想。它们产生于 20 世纪 30 年代两位俄罗斯数学家安德罗诺夫(A. A. Andronov)和庞特里雅金(L. S. Pontryagin)的工作。这就是作为分岔理论(bifurcation theory)一部分的结构稳定性(structural stability),其根源也在庞加莱关于限制性三体问题的研究中。在一些俄文文献的译文中,结构稳定的系统被称为“粗壮的”(rough)系统(*systèmes grossieres*),而它的补集,结构不稳定或者分岔系统则被称为“娇弱的”(fine)系统。

为了理解两个互补的概念——结构稳定性和分岔,我们再次求助于将河流的表面作为流的比喻,这次想像流依赖于一个外部参量,即表示来自于系统外部的变化的量。人们可以想像在河流的源头远处的群山上正在下雨,或者风吹在河面上,从而影响了水流的模式和水

流。为简单起见，我们选取风速作为唯一的外部参量。

粗略地讲，如果流的结构不依赖于风速的微小变化，其定性性质始终保持不变，则称流是结构稳定的。如果流的结构发生了变化，那么在這些变化发生处的风速值被称为分岔值。下面我们举两个例子。

图 4.9a 中的流(比如空气静止的情况下)是由平行直线构成的。当起风时，图中的直线发生轻微的弯曲，但是整个图形没有改变其定性结构(图 4.9b)。这是指没有出现新的定性性质，比如漩涡等。如果对于任何小的参量变化，系统的定性性质都保持不变，那么我们称流在参量的初始值处是结构稳定的：上述例子中，参量的初始值指的是风速为零。

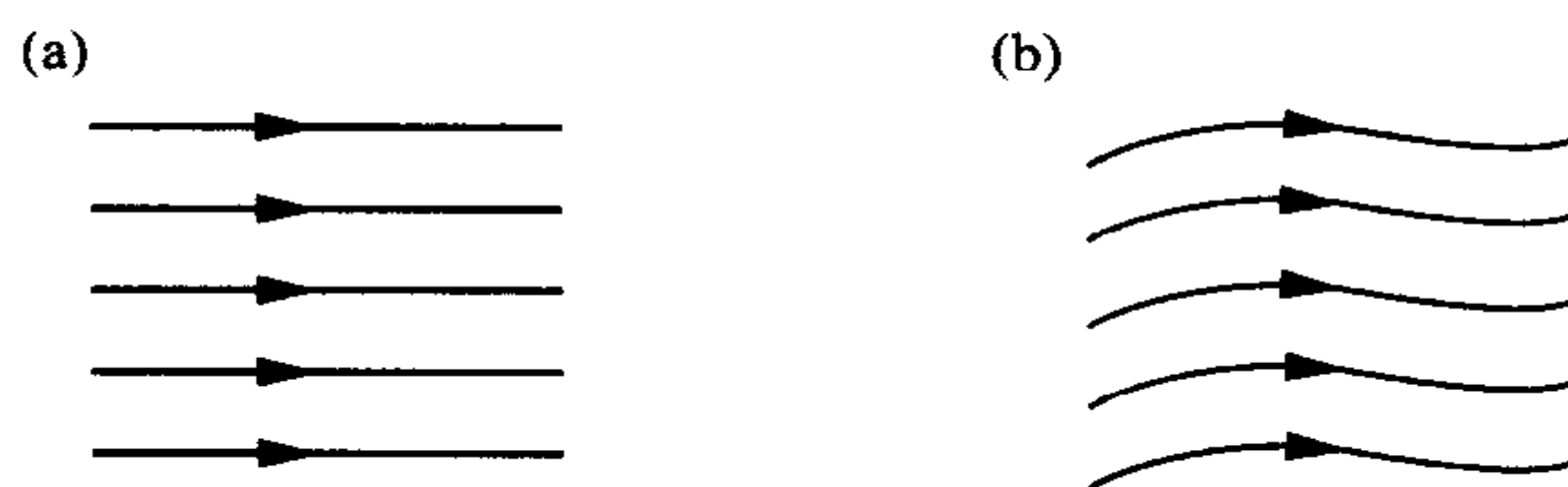


图 4.9 结构稳定的流，(a)扰动前的情形，(b)扰动后的情形。流的行为没有发生定性的变化。

现在我们可以想像相空间中各种类型的可能图形。例如，假设对于负的参量值，流包含一个稳定平衡点，其附近所有的轨道都螺旋状地趋于它，参见图 4.10a。对于正的参量值，平衡点成为不稳定的，其邻域内的轨道螺旋状地远离它并趋于一条(小的)包围平衡点的闭曲线，参见图 4.10b。然而从平衡点外面的远处观察，轨道仍然向内盘旋。大范围的图形基本保持不变，所发生的变化是局部的。将两张相图分开的边界线情形或者分岔点(bifurcation point)是结构不稳定的。

很显然图中发生了定性的变化：在图 4.10 中，情形(a)在时间增加时振荡逐渐消失了，而在情形(b)中产生了一条小周期轨道。对应于参量取零时的分岔点，平衡点是退化的：它的线性化与图 4.7c 所示的图形十分相似，但是非线性项导致了弱稳定的盘绕行为。随着参量的变化，周期轨道逐渐变大。这个特定的分岔，以一位德国数学家霍普夫(Eberhard Hopf)的名字命名。事实上，二维系统的部分理论首先是由庞加莱发展的，后来安德罗诺夫和他的合作者们继续进行研究。1942 年，霍普夫将上述理论推广到任意高维的微分方程中。许多种类系统的模型中都发生霍普夫分岔(Hopf bifurcations)。两个无关联的例子是，电子和声学回路中导致音频放大器的反馈中产生令人讨厌的尖叫声的自发振动，以及飞机着陆装置中“前轮的不正常晃动”。

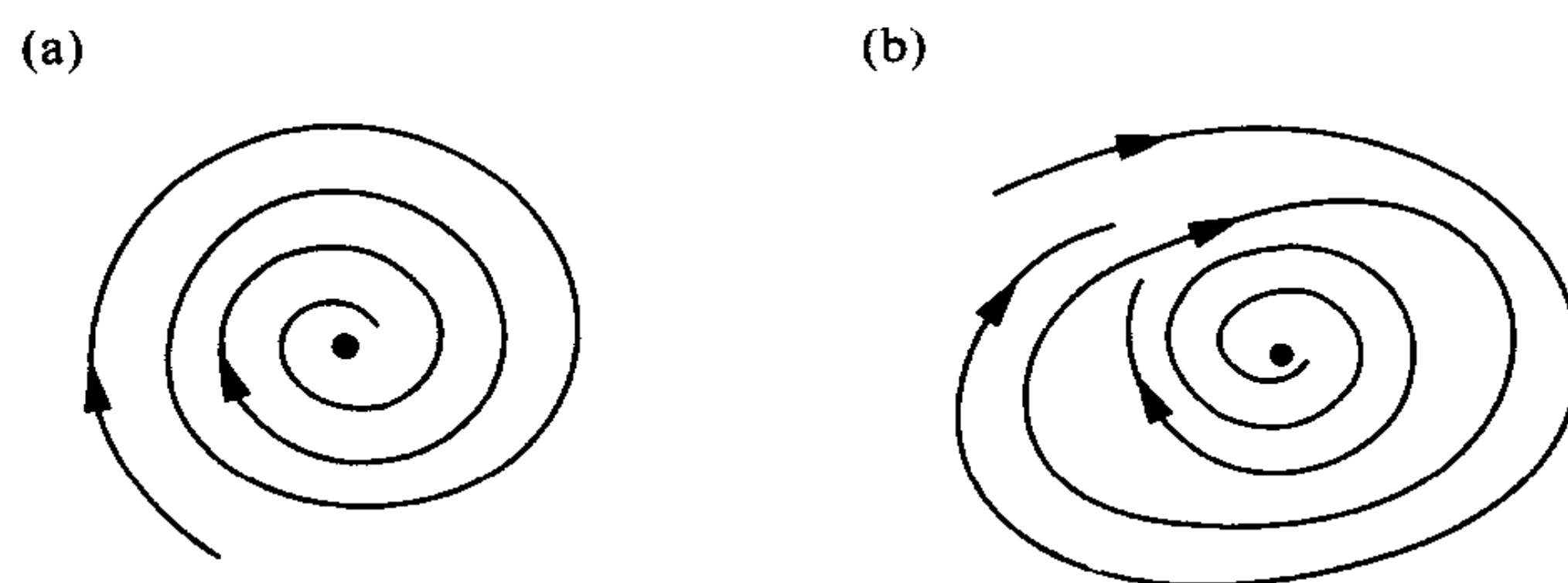


图 4.10 霍普夫分岔，(a)产生极限环以前的相图，(b)产生极限环以后的相图。

结构稳定性的概念如此重要有其实用的原因。结构稳定的流是鲁棒的，外部参量的微小变化不可能过分影响它们。如果结构稳定的流描述了某个自然现象，那么这个现象就能够适应并经受环境的改变。面对环境的变化，所有解的集合能够灵活地适应，只发生轻微的变化而不破坏其本质特征。

结构稳定的流，为它们描述的数学模型赋予了相应的鲁棒性。测量永远也不会是绝对精确的，数据中总会含有误差。如果在已经

测量的值处产生分岔，我们就无法说出物理情形对应于何种行为。如果流是结构稳定的，我们就能够保证在所测量的数据附近系统的定性性质是准确无误的。

突变论是一个相当年轻的数学分支，在它早期的发展中曾引起大量的争议和期刊上的争论，突变论按照自己的目的采纳了结构稳定性的概念。在这种情形里，人们关心的仍然是函数的定性特征如何依赖于外部参量。

结构稳定性和分岔始终是动力系统理论的中心课题，它们还在数学以外有重要的应用。人们已经发现了它们在心脏病学、胚胎学、语言学、光学、心理学、流体动力学、经济学、基本粒子物理学、地质学以及其他许多领域中的应用。

平衡的行星

天体力学中与稳定性问题相关联的一个重要概念是中心构形 (central configuration)。1767 年，60 岁的欧拉发表了一篇关于三体问题研究的论文。文中他明确地指出了一大类周期解。他证明，如果三个任意 (有限的) 质量的质点起初被放置在一条直线上，如图 4.11，使得 AB/BC 的值通过依赖于质点的质量的复杂公式所给出，并且给定每个质点适当的初始速度，那么它们将在椭圆上周期地运动，并永远保持共线构形 (collinear configuration)。而且，沿着旋转

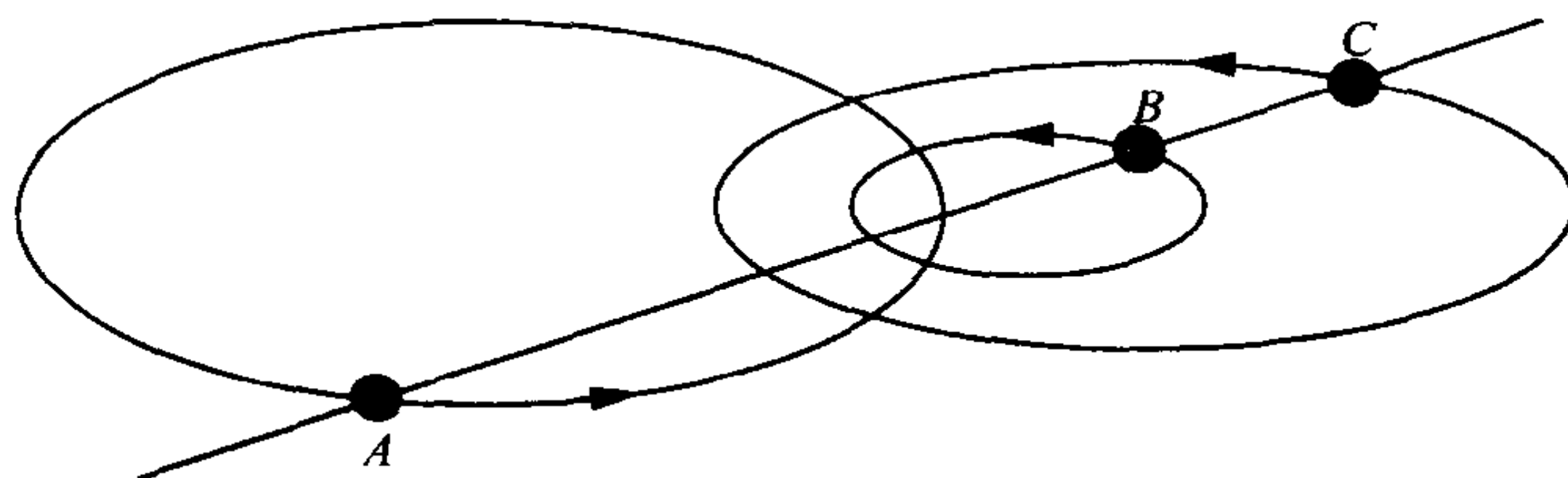


图 4.11 三体问题的欧拉解。

线 AC 测得的 AB/BC 的值在质点的运动过程中始终保持不变。这一结果是相当令人吃惊的，正如我们所指出的，在二体问题中加入第三体通常会扰动椭圆开普勒轨道，甚至导致混沌。

1772 年，拉格朗日重新发现了三体问题的欧拉解 (Eulerian solutions)，并找到第二类重要的轨道。他证明，在初始时刻三个质点位于等边三角形 (三条边相等的三角形) 的顶点，如果再次具有适当的初始速度，那么质点将沿着椭圆轨道作周期运动，如图 4.12，并且它们始终保持等边构形。三角形的大小和方向随着质点在轨道上运动发生变化，但自始至终它都是等边三角形。毫不奇怪，这些解被称为拉格朗日解 (Lagrangian solutions)。

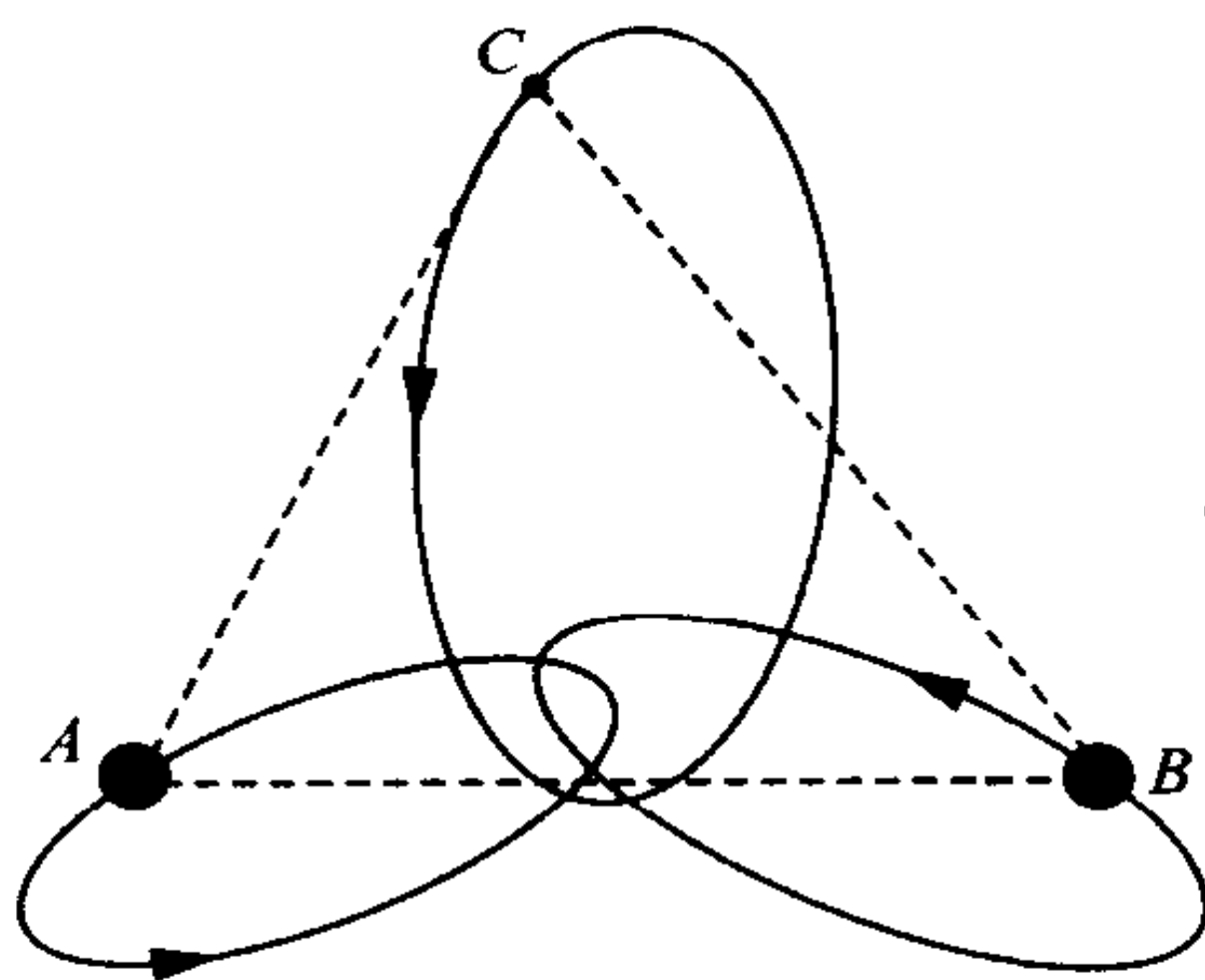


图 4.12 三体问题的拉格朗日解。

对应于三个质点在直线上的不同顺序，共有三种共线解；而对应于三角形的两个不同的方向，则有两种等边解。在这两种情形中，如果质点被安放为共线构形或者等边构形，并且初始速度皆设为零，那么质点将朝它们的公共质心运动，在有限的时间内，它们在那一点同时发生三体碰撞。这就是椭圆轨道退化为线段的极限情形，此时方程的解不再是周期的。

在这些特殊的解中，所有的质点都在跳同样的舞，因此九个自由

度就可以描述这些三体问题，运动发生在第1章引进的那类低维不变子流形上。当时我们曾经指出，不变流形为我们理解相空间的整体提供了基本的框架。第3章我们还看到了夏志宏和杰弗如何应用这样的对称性去构造他们关于非碰撞奇点的例子。

为了发现稳定性与三体问题这几类特殊的解——欧拉解和拉格朗日解——之间的联系，我们假设质点在圆形轨道上运动，并用旋转坐标的方法研究这些轨道。这里我们将自己限制在同直线或者三角形一样旋转的参考系中，我们察觉不到质点的运动，就像驾驶汽车并观察在平行的道路上以同样速度行驶的火车一样。我们观察到三个有定常位置的质点。在上述两种情形中，它们都表示新坐标系下的平衡位置，因此我们能够研究这些平衡解的稳定性。事实上，对于适当选取的(更加复杂的)坐标系，即使轨道是椭圆而不是圆，也可以将解看作是平衡解。每一种情形中的此种平衡解，都被称为中心构形。

还有另外一种考察这些解的方法。考虑二体问题(例如地球围绕太阳所作的椭圆运动)，假设第三个小质量物体(太空飞船)在这两个大质量物体的引力场中运动。小物体不影响大物体的运动，但它自身的运动由另两个物体共同决定。这就是我们曾经多次遇到的那类限制性三体问题。小物体可以在大物体运动所确定的椭圆轨道平面上占据五个特定的位置，我们称作称动点(libration point)，记为 L_1 ， L_2 ， L_3 ， L_4 和 L_5 (见图4.13)。这种记法是经典的，字母 L 用以纪念拉格朗日。“libration”一词源于拉丁语 *libratio*，意思是平衡。它在天文学中有两种不同的含义。这里表示一个物体在称动点处是平衡的，即在旋转参考系中固定不动，两个大物体作用在它上面的离心力和曳引力相互抵消。“equilibrium”一词有同样的起源。它的另一种含义是指月球的天平动，描述的是拉格朗日曾经研究过的

振荡运动，即本章前面曾经提到的经天平动(libration in longitude)，它交替地显露和隐藏月球可见的一面的东西部边界。

如果考虑两个大物体并将小物体放在它们的某个称动点上，我们就会重新得到欧拉构形和拉格朗日构形。此时研究称动点的稳定性比研究欧拉-拉格朗日解的稳定性更为容易，当然这只适用于第三个物体具有小质量的情况。今天我们知道在什么情况下称动点是稳定的，这一性质与两个大物体质量的相对值有关。特洛伊小行星群给出了太阳系天文学中稳定称动点的例子，一群小行星在近似于木星的轨道上围绕太阳运动并且与这两个大得多的天体总是形成等边三角形时，就成为稳定称动点。而且，关于地球-月球系统中的拉格朗日点，天文学家已经发现了成堆的宇宙尘，它预示着这些点的稳定性也许可以用于将其附近的区域作为未来太空站的停泊处或者建造宇宙殖民地的基地。

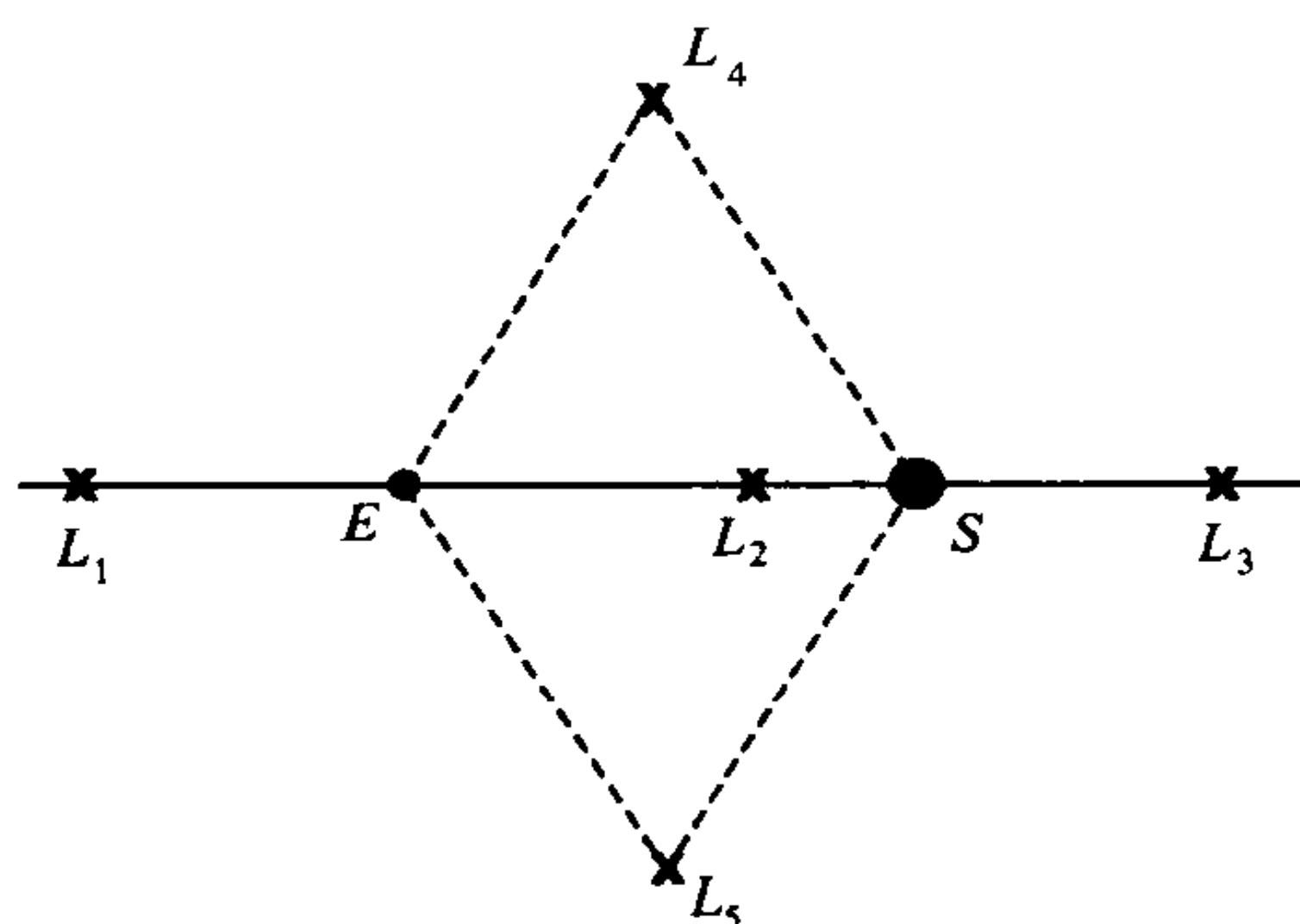


图 4.13 五个称动点。

如图 4.13 所示，三体问题中存在五类中心构形：两类等边情形（分别对应于不同方向的等边三角形，三个质点位于等边三角形的顶点）和三类共线情形（分别对应于直线上不同排列顺序的三个质点）。令人惊奇的是，当 n 大于 3 时，人们不清楚 n 体问题的中心构形的

类别数目。我们甚至不知道这个数目是有限的还是无穷多的，如果是无穷多的，我们也不清楚它们是由孤立点(任意两点间都有正的距离)组成的集合还是连续统(相空间中一块连续的部分)。许多人在这个领域开展工作，有兴趣的读者可以在第5章后面的注释一节中找到他们的名字。

1912年，桑德曼发现三体问题中一个有趣的性质。他证明，如果三个质点将同时发生碰撞，那么它们必定趋近一种中心构形。换句话说，碰撞前的三个质点会非常接近于形成等边三角形或者欧拉型的共线构形。这样上文提到的不变流形就提供了导致三体碰撞的一条捷径。在 n 体问题中，这个性质在下述意义下也被证明是对的， k 个质点的任何子集同时发生碰撞，会趋近由 k 个质点形成的中心构形集合。遗憾的是，由于中心构形的集合可能是一个连续统，我们仍然不清楚碰撞轨道会趋近某个特定的中心构形还是会在一些中心构形之间振荡，而不选定其中任何一个。

萨瑞在1983年进一步证明， n 体问题中的一大类分散到无穷远的解，是由质点彼此分开趋近中心构形而产生的。(例如，要是三个未发生碰撞的质点分散到无穷远，它们相距越远，就越接近于一个等边三角形的三个顶点。)这个结果使我们看到了解决星系运动的宇宙学问题的一线希望。尽管中心构形的概念表面上很特殊，但它是当代天体力学的一个重要课题。

在本章以及前面几章中，我们追溯了动力系统理论的两个基本概念——混沌与稳定性——的起源与一些衍生的结果。我们还领会了庞加莱如何在寻求稳定性时发现了混沌。第2章描述的斯梅尔的符号动力学分析，揭示出确定性混沌(deterministic chaos)与真正的随

机过程(truly random process)在许多方面是无法区分的。混沌的本质特征是关于初值条件的敏感依赖性：混沌轨道实际上是不可长期预测的。相反，上面引进的李雅普诺夫稳定性通常蕴含着轨道行为是不变的或者是一种规则的可预测的重复。现在读者似乎会觉得，这两种性质即使不是完全对立的，也是相互排斥的。如果混沌只是偶然出现在寻找稳定性的过程中，那么为什么我们还要在本书的副标题中将它们联系在一起呢？确实，我们将要证明这两种性质在一类动力系统——天体力学中的近可积哈密顿系统——中以一种十分美妙的方式紧密交织在一起。本书最后一章，将回答这些问题。我们会遇到柯尔莫哥洛夫、阿诺德和莫泽三杰，这三位数学家共同开创了将混沌与稳定性相联系的理论。

注 释：

4.0 第4章的题记选自[Mos, 1978]。

4.1 渴望有序：[Be, 1937]和[Nm, 1960]描述了本节介绍性的故事：拉普拉斯在达朗贝尔家里多次无益的请求以及随后他们就拉普拉斯关于力学的一般原理的著作的讨论。我们假想了达朗贝尔家里的场景。[Sz, 1984]回顾了天体力学中用到的许多不同的稳定性概念。[M, 1959]论述了亚里士多德和阿基米德的贡献。

4.2 侯爵与皇帝：参见[Be, 1937]。[V, 1984]记载了扰动和平均方法的简要的历史发展。其主要思想载于拉普拉斯的《天体力学》中[Lap, 1799~1825]，但是像4.3节所描述的那样，关于这些思想的最早的清晰论述在拉格朗日的《分析力学》[Lag, 1788]中已经出现。亚当斯和勒威耶的故事，参见[Pet, 1993]。拉普拉斯的文章“论概率”的译文，参见[Nm, 1960]的第二卷，其中还包括描写拉普拉斯生平的短文，我们从中选取了拉普拉斯生活的一些细节。拉格朗日有关上帝的言论也取自该处。

4.3 天体的旋律：本节主要参考[Co, 1990]、[Cal, 1982]、[Nm, 1960]和[Be, 1937]，也参考了[V, 1984]、[Koe, 1986]和以上注释中提到的文献。拉格朗日临终前的话，据说是讲给他的朋友蒙日(Monge)、拉塞佩德(Lacépède)和沙普塔尔(Chaptal)听的。在德朗布尔(M. Delambre)的传记文章[Lag, 1867~1992]第一卷的第xliv~xlv页，选取了[Koe, 1986]的注记中记述的拉格朗日的话，并进行了重新的组织。

4.4 永恒回归：本节的材料来源于[Co, 1990]、[Be, 1937]和[Po, 1993]。回复定理参见[Po, 1890]中第8节的定理I。

4.5 扰动世界：有关哈雷特的罗马尼亚语书籍，参见[Ba, 1972]、[Din, 1970]和[Or, 1976]等。两篇新近的文章[R, 1985]和[Pa, 1991]，分析了他对天体力学的贡献。庞加莱在[Po, 1905]中赞扬了哈雷特的博士论文。实际上，哈雷特不仅是在巴黎获得数学博士学位的第一位罗马尼亚人，而且是第一个外国人，正如科学院院长写给罗马尼亚教育部长基采亚(Gheorge Chițe)的信中所指出的那样。哈雷特的《社会力学》参见[Har,

1910], 梅弗雷的研究参见[Me, 1958]。

4.6 如何稳定才算稳定? : 庞加莱的论述, 参见[Po, 1898]。其英译本, 参见戈罗夫为[Po, 1993]所作的序。

4.7 定性的时代: 布伦斯的重要论文, 见[Bru, 1887]。在西方的文献中, 李雅普诺夫的名字至少有五种不同的拼法: Liapunov、Lyapunov、Liapunoff、Lyapunoff 和 Ljapunow。本书采用了第一种。这里提到的李雅普诺夫的论文的英译本和法译本, 参见[Li, 1947]、[Li, 1966]和[Li, 1992]。[Smi, 1992]和[B, 1992]记载了李雅普诺夫的生平和其工作的文献目录。威尔森(Wilson)在[Wi, 1994]的注记中描述了围绕李雅普诺夫之死所发生的一系列事件。

4.8 线性化及其局限性: 格罗布曼和哈特曼的论文, 见[Gr, 1959, 1962]和[Ha, 1960, 1963](事实上, 早在 1879 年庞加莱就证明了哈特曼-格罗布曼定理的解析情形, 见[Po, 1951~1956])。大多数微分方程定性理论的经典教材, 都包含李雅普诺夫发展的稳定性理论的主要结果, 参见[H & S, 1974], 例如, [O, 1968]第一次证明了任意解的李雅普诺夫指数的合理性, 在[G & H, 1983]中可以找到这一工作的介绍。

4.9 模型的稳定性: 结构稳定性的介绍性描述, 参见[H & S, 1974]和[G & H, 1983]。

4.10 平衡的行星: 欧拉和拉格朗日的论文, 见[Eu, 1767]和[L, 1873]。关于中心构形数目问题的细节, 可以参看[Win, 1941]。包括德乔贝克(Dziobek)和莫尔顿在内的许多人在世纪之交研究过这个问题, 最近阿尔布伊(Alain Albouy)、巴克(Greg Buck)、卡萨萨亚斯(Josefina Casasayas)、尚西内、费萨尔(Nelly Faycal)、哈尔(G. R. Hall)、利博(Jaume Llibre)、麦科德(Chris McCord)、迈耶(Ken Meyer)、莫克尔、纽内斯(Ana Nunes)、帕塞拉(Filomena Pacella)、帕尔默(Julian Palmore)、萨瑞、施密特(Dieter Schmidt)、希莫、斯梅尔、蒂耶尼(Nick Tien)和夏志宏也研究过该问题, 他们的论文是: [Al, 1995]、[Bu, 1990, 1991]、[CLN, 1994]、[Dz, 1900]、[Li, 1991]、[Mo, 1985, 1990]、[Mou, 1910]、[P, 1986, 1987]、[Pal, 1974, 1975a, 1975b, 1982]、[Sim, 1977]、[X, 1991]。桑德曼的论文, 见[Su, 1912]。萨瑞的论文, 参见[S, 1980]。有关同一主题更完整的参考文献, 见[Li, 1991]。研究中心构形的一种新方法, 最初出现在斯梅尔的论文中[Sm, 1970a, 1970b]。

5. KAM 理论

我们可以这样阐述动力系统的目的：利用系统的定性性质完整地刻画动力系统运动的整体。

——伯克霍夫

1954 年，阿姆斯特丹。国际数学家大会最后一天的日程即将结束，仅余下最后一个特邀报告。作闭幕演讲的荣誉归于“概率论中的欧几里得”，为赌博问题和机遇游戏建立了公理化的基础，并将这些问题与测度论联系起来的那个人：俄罗斯数学家安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫。

报告的主题是大家始料不及的。柯尔莫哥洛夫没有讨论概率，在会议日程表中宣布的题目是“论动力系统一般理论与经典力学”。听众中几乎没有人知道柯尔莫哥洛夫早在过去的几年就已经开始从事这一领域的研究。

柯尔莫哥洛夫被介绍给听众后，大家鼓掌表示欢迎。“我感到

很意外，”他开始讲道，

在大会的最后阶段我能在这间大厅宣讲一篇论文，据我所知这间大厅是供门格尔伯格(Mengelberg)指挥世界上一些盛大音乐会的场所。我没有想到，自己准备的关于一类相当特殊的问题的报告，能够在会议的日程中占据这样一个荣幸的位置。我的目的是阐明一些方法，它们能够将现代动力系统的测度论及谱理论中的基本概念和结果，应用于经典力学中保守动力系统的研究。然而，看起来我所选择的主题可能令更多的人感兴趣，它作为一个例子，显示了经典数学和现代数学不同分支之间新的、出乎意料的以及深层次的关系。

希尔伯特在1900年国际数学家大会上所作的著名演讲中，论述了数学的统一性以及这门科学依其本性分化出独立的分支的不可能性。在数学发展的每一步，新焦点的出现是上述思想正确性的最令人信服的证据，在解答一些相当特殊的问题时，来自不同数学领域的概念和方法是必要的，并且产生了新的相互关系。

柯尔莫哥洛夫是一位思想家，他在数学的不同分支间建造桥梁并发现前所未见的关系。他具有科学的全局观，但也清楚如何处理所研究问题的最本质的细节。柯尔莫哥洛夫在报告的引言中阐述了自己主要的数学观点，同时为20世纪杰出数学成就之一的KAM理论创造了条件。KAM是柯尔莫哥洛夫、阿诺德和莫泽的名字的缩写，这三位数学家在1954~1963年建立了这一理论的基础，本章将叙述他们的工作。

简化与求解

安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫 1903 年 4 月 25 日出生于俄国的坦波夫。他的父亲尼古拉·马蒂维奇·卡塔耶夫(Nikolai Mateevich Kataev)，一位牧师的儿子，是一名农艺学家。他的母亲玛丽亚·雅科夫列夫娜·柯尔莫哥洛娃(Maria Yakovlevna Kolmogorova)是雅科夫·斯捷潘诺维奇·柯尔莫哥洛夫(Yakov Stepanovich Kolmogorov)元帅的女儿，死于难产，她的姐姐维拉(Vera)抚养了年幼的柯尔莫哥洛夫。安德烈 6 岁时与姨妈迁往莫斯科，在那里柯尔莫哥洛夫开始接受学校教育，除了短暂的几次中断，他在莫斯科度过了自己的一生。

柯尔莫哥洛夫的青少年生活十分艰难。第一次世界大战以及布尔什维克革命后的流血冲突，内战的恐怖和随之而来的饥荒，苏联红军与白军争夺政权所带来的许多惨痛等等，所有这一切他青年时代都遭遇过。1919~1920 年革命刚刚结束以后的一段时间，柯尔莫哥洛夫在铁路上做工以维持生计。尽管遭遇到这些困难并且中断了正规的学校教育，安德烈·尼古拉耶维奇还是在 1920 年设法进入莫斯科大学的物理学—数学系，开始学术研究工作。

成为学生的第一年，三位俄国著名数学家给他留下深刻的印象：他参加由卢津(N. N. Luzin)和弗拉索夫开设的函数论和射影几何课程，以及斯捷潘诺夫(V. V. Stepanov)主持的三角级数讨论班。在发现柯尔莫哥洛夫的才能以后，卢津主动接近这位新来的学生并提议开展合作研究。

柯尔莫哥洛夫对数学有天然的直觉，他的数学技能在这个研究环境中发展得很快。在第一年，即 18 岁时他完成了一项关于三角级数方面的研究，一年后发表了有关描述集合论的第二篇论文。作于

1922年6月2日的第三篇论文，真正为他赢得了科学上的认可。在论文中他构造了几乎处处发散的三角级数的第一个例子，从而解决了一个与傅里叶级数(Fourier series)密切相关的重要问题，傅里叶级数广泛应用于纯粹分析与许多应用数学领域。事实上，各类函数的傅里叶级数展开式和它们的收敛速率，将在40年后的KAM理论中起至关重要的作用。1925年毕业后，柯尔莫哥洛夫开始从事概率论研究，仅仅几年他就为自己赢得了声誉。



照片 5.1 安德烈·尼古拉耶维奇·柯尔莫哥洛夫。(莫斯科，科学出版社提供)

柯尔莫哥洛夫的学术兴趣和成就并不仅限于数学。他在研究精密科学以前曾经写过一篇关于中世纪俄罗斯诺夫哥罗德封建共和国的历史研究文章。稍后，在得知教授们要求用若干条论据支持每一条

论点时，他认为数学更容易，因为一条定理只需要一个证明。然而，他并未抛弃自己的其他许多兴趣；非但如此，兴趣还扩展到许多学术领域，包括遗传学、诗学（诗的理论和实践）与地层学（地质学的一个分支，研究层状或带状岩石在地层中的分布）。在数学研究中，很明显他也有着广泛的兴趣。他不仅在概率论、经典力学和天体力学等领域，还在一些表面上毫无联系的数学分支，如拓扑学、数理逻辑和算法复杂性理论中做出卓越的贡献。柯尔莫哥洛夫的三卷本选集的题目是：《数学与力学》、《概率论与数理统计》和《信息论与算法理论》。一个人有如此广泛的才能，是很少见的。

为了理解柯尔莫哥洛夫在阿姆斯特丹的报告中引入的革命性思想，我们必须首先叙述一些他提出的以及将要在我们的描述中用到的基本概念。第一个概念，是微分方程中的哈密顿系统（Hamiltonian system），或者动力学方程（equations of dynamics），如同庞加莱在获奖论文和《天体力学新方法》中称谓的那样。

在通常的动力学与力学的研究中，哈密顿系统是一个基本概念，像具有更广泛应用的其他概念一样，它在三体问题的研究中也有其根源。实际上，“哈密顿系统”这个称呼从历史上看是不公正的，因为在哈密顿以前的许多年拉格朗日和泊松已经研究过同样形式的方程。〔特鲁斯德尔（Clifford Truesdell）曾经就这类事件作过如下评论：现在我们知道第一个写下相同形式的“牛顿方程”的人不是牛顿，而是欧拉。〕虽然如此，为纪念爱尔兰数学家哈密顿在力学上的贡献，人们至今仍然采用这个术语。或者更确切地讲，似乎只有数学家和物理学家才采用这个术语，其他领域的科学家在研究中偶尔用到同一类型的方程时，仍然使用旧称动力学方程。大多数数学家了解哈密顿，是因为他发明了四元数（quaternions）——复数思想的扩

展——以及他在代数学中的贡献，他还用变分法建立了一套统一的方法处理几何光学和动力学中的问题。

哈密顿力学的精髓在于它利用所谓的哈密顿函数(的偏导数)，将运动方程表述为一种完美的对称形式。在牛顿的初始表达式中，主要的状态变量是物体的位置坐标。在第1章中我们知道，为了描述完整的运动状态，速度也是需要的，但它被定义为“第二位”的，是位置的变化率。而在哈密顿方程中，速度被动量所代替：动量是物体速度与质量的乘积。位置和动量具有相同的地位，它们同时出现在哈密顿函数中，有时简称为哈密顿量(Hamiltonian)，一般情况下它指的是所研究的力学系统的总能量。这样哈密顿量给出了微分方程中变量之间的关系，有助于我们后面减少相空间的维数。不同问题对应着不同的哈密顿量。一个哈密顿量描述 n 体问题，另一个可能描述摆的运动，第三个则相应于“理想”的(非黏性)流体动力学，等等。一旦人们得到关于任意哈密顿量的一般理论，所得到的结论就适用于这一理论包含的所有特定的问题：动力学问题。

数学的一个基本宗旨就是经常试图提出高度抽象化的概念。为了理解其中的原因，我们提出下面简单的问题。哪一个问题更容易计算：2个苹果加上3个苹果是5个苹果；2把椅子加上3把椅子是5把椅子；或者仅仅是 $2 + 3 = 5$ ？答案是显然的。一旦采用了抽象化的形式，纯粹的数值表达式就更容易处理，人们可以抛开多余的信息(苹果熟了吗？椅子有腿吗？)。算式 $2 + 3 = 5$ 适用于任何人能够想到的所有可能的对象。符号运算就是以高度抽象化的方式完成的。我们如此习惯于用数字进行运算，以至于不再注意抽象化过程的重要性和益处。但是人类需要数十万年的时间才认识到这一步。

语言学中的历史研究表明，原始人一般将一棵树作为一个概念，两棵树是不同的概念，三棵或更多的树是第三个概念。在那个阶段，人们还没有认清数字的概念。他们没有理解树以及水果、石头或其他物体具有能够被分组为一、二、三或更多的共同性质。叶子的概念也是这样的。一些当代土著人对于每种特殊类型的叶子都冠以不同的称谓，但是缺少叶子本身作为总称的概念。从实际的观点来看，他们是完全正确的。自然界中不存在抽象的叶子；只能找到特定种类的叶子——栎树叶、榆树叶、桦树叶、桤树叶等。叶子是人类智慧的一个发明：一种抽象化。

上述例子说明了抽象化在我们思考问题时的重要作用。博尔赫斯(Jorge Luis Borges, 1899~1986)讲述过一位有着完美记忆力的青年法尼斯(Funes)的故事。对于法尼斯来讲，抽象化是未知的也是不必要的，因为他能够准确地回忆起某一天黎明时分天空中以及云朵里呈现的全部景象的细节，或者几年前品尝过的水果的独特气味与口感。最后他年纪轻轻就死去了，完全被记忆的负荷压垮了。抛弃那些丰富多彩的无关的细节，只保留并驾驭本质的概念是很容易的。人们可以说进步，至少科学上的进步，依赖于辨别然后像患上创造性的健忘症一样忽略无关信息的能力。同样的手段在数学上被不断地成功应用着，哈密顿方程仅代表大量例子中的一个。当然，我们不能将这样的简化和理想化同完全领悟相混淆，读者应当记住我们关心的只是构造并分析物理现象的数学模型。无论模型怎样帮助我们获得最初想要理解的事实，模型并不是实在(the model is not reality)。

一旦人们有了一个概括性的、抽象的概念，比如叶子，那么进一步分门别类是非常有用的，或许在这个例子中可以分为常青叶和

落叶。回到哈密顿系统，传统上我们将其分为可积的（也称为完全可积的）和不可积的情形。可积系统在这种意义下是“可解的”：它们的一般解能够用已知函数的公式显式地表示出来。人们在实践中已经认清了第1章中牛顿的字谜“流能够被确定”是用来描述可积系统的。虽然存在无穷多个这种类型的系统，但它们仍然非常少见，因为在所有哈密顿系统组成的空间中它们所占的测度是零。这些系统代表了例外的情形。尽管如此，在教科书中描述的几乎所有系统却都是可积的，因为它们是唯一容易解释并且可以作为习题的系统。不可积系统是无法利用标准方法进行求解的。虽然教科书中都很乐观，但是几乎所有的哈密顿系统都属于后者难以解决的那种类型。

柯尔莫哥洛夫在阿姆斯特丹讲述的主要问题是：当与哈密顿结构有关的小扰动使原方程发生轻微的改变时，可积系统的解会发生什么变化？他将这个问题与一类特殊的轨道行为联系起来，这类轨道行为，即所谓的拟周期解（quasi-periodic solutions），困扰了狄利克雷、魏尔斯特拉斯和庞加莱一个多世纪。为了理解什么是拟周期解并更好地描述 KAM 理论所讨论的问题及其解答，我们将再次回到太阳系动力学。

拟周期运动*

开普勒第一定律陈述，行星以椭圆轨道围绕太阳运转。这位德国数学家是通过多年的观测、计算和比较得出以上结论的。而严格地讲，他却犯了一个错误。他的仪器过于粗糙，不可能提供充分精确的估计，所发现的也只是火星轨道的一阶近似，而他的大部分数据都是通过观测这颗行星得到的。有关水星和金星的观测，将更容易

说明它们的轨道实际上是缓慢进动的椭圆：其轨道的形状在运行一周后与椭圆几乎没有偏差，但是轨道的性态随时间逐渐发生变化。图 5.1 说明了这一点。

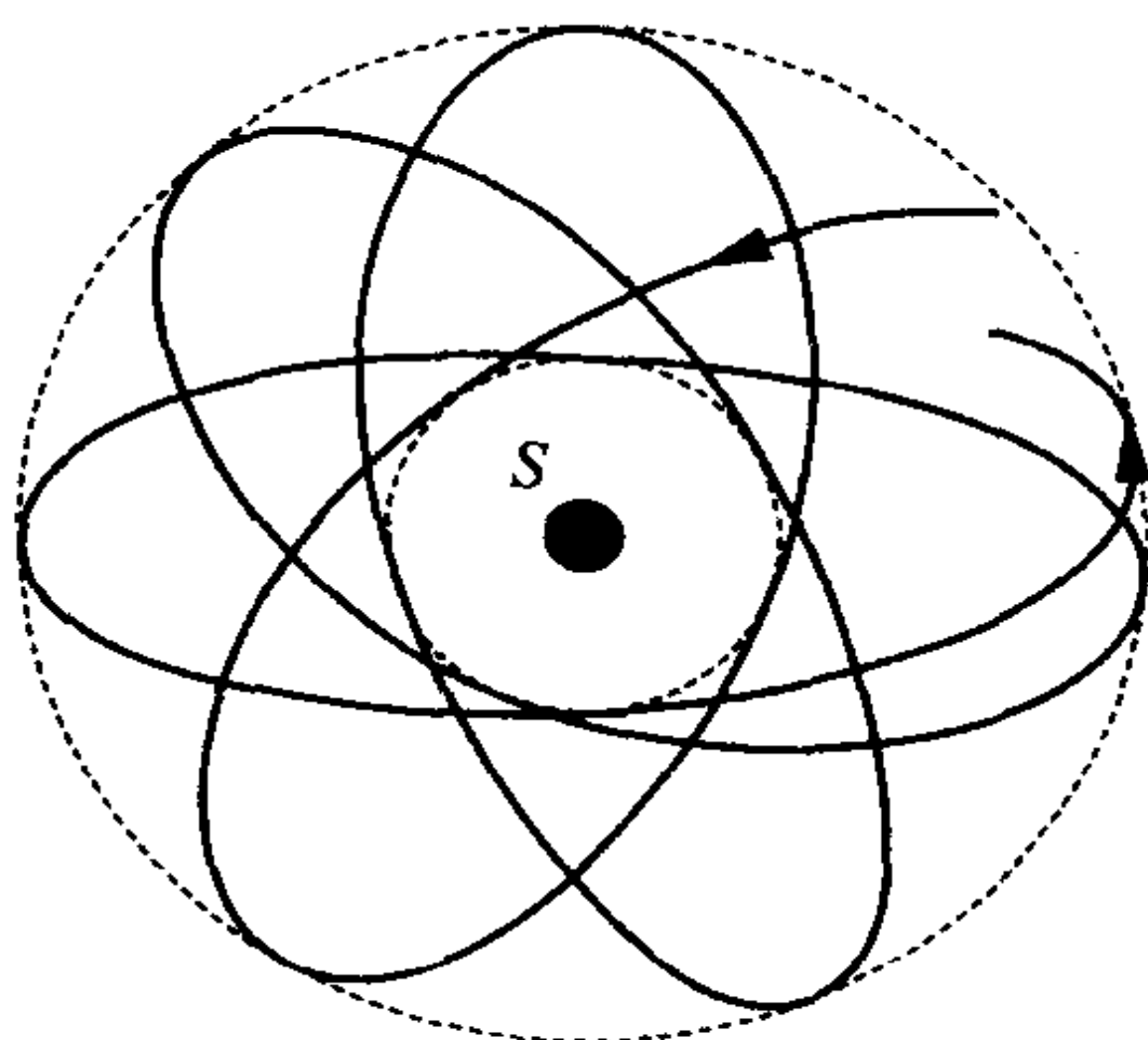


图 5.1 行星围绕太阳运转的轨道，其中轨道进动被夸大了。

利用第 1 章阐述的牛顿万有引力定律，我们可以证明在忽略其他行星的影响时，围绕太阳运行的单一行星的轨道确实是椭圆。但是其他行星的影响是不能忽视的，它们产生的摄动 (perturbation) 导致了进动的椭圆。从这种观点来看，开普勒缺少精密的仪器反而是幸运的。假使他发现了行星运动真正的复杂性，就不会得出如此简单的定律，牛顿力学中唯一完全可解的 n 体问题也就缺乏这样一个美妙的例证了。幸好观测精度是与扰动理论共同发展的，第 4 章我们曾经在拉普拉斯和拉格朗日的工作中描述了扰动理论的创立。正如彼得森在《牛顿的时钟》一书中所指出的，幸运的是太阳系足够简单以至于一阶近似能够很好地逼近行星的轨道，同时太阳系又足够复杂能够吸引我们进一步探索其中的奥秘。

在太阳系中，行星轨道与椭圆的偏差是非常小的。土星轨道的进动值最大：每世纪约 2960 弧秒。这意味着经过数十圈围绕太阳的运转，该行星的近日点 (天体运行轨道上距太阳最近的点) 进动的偏差

小于 1 弧度。^{*} 正是由于如此小的偏差，才使得扰动理论在行星研究中成为强有力的工具。本章我们将会看到，柯尔莫哥洛夫、阿诺德和莫泽如何追随拉普拉斯和庞加莱，通过扰动可积系统以探究其附近的不可解的不可积系统的动力学。

进动的椭圆轨道存在两种情形，其中一种如图 5.1 所示：要么轨道是封闭的，即在一段时间以后回到其初始位置，实际上轨道是周期的，尽管周期可能是许多“年”；要么轨道永远也不封闭。在后一种情形中，轨道在由虚线圆周界定的圆环内稠密地缠绕起来。如第 2 章所述，稠密性意味着如果足够长时间跟随轨道前进，那么我们可以任意接近圆环内的每一个点。描述这种稠密运动的轨道被称为拟周期的。拟周期轨道不能成为周期轨道，它无限小地接近其过去某圈开始前的位置，但是轨道本身实际上永不重复。这就为第 2 章谈到的问题提供了稠密曲线的例子。

在本节的其余部分以及下一节，我们将描述不变环面的结构和围绕它们的解，这些内容又是相当专业性的。读者可以在初次阅读时略过它们，而在“信件，失去的解答和政治”一节中继续阅读本故事。

现在，我们想像一下拟周期轨道是如何在相空间的环境中产生，而不是在物理构形空间——这里是行星运动的平面——中产生的。相空间的维数通常都是很高的，因为如第 1 章所述，它除了包含系统中所有物体的位置坐标以外，还包含它们的速度或者动量。但是，与前面曾经做过的一样，我们可以选取拟周期运动在其上存在的流形并且单独研究它。在最简单的情形中，流形是一个二维环面：硬面

^{*} 原著英文版此处的叙述为：“水星轨道的进动值最大：每世纪仅 43 弧秒。这意味着经过数百圈围绕太阳的运转，该行星的近日点（天体运行轨道上距太阳最近的点）进动的偏差小于 1 弧分。”中文版出版者应作者的要求做了改动。——编者

包圈或炸面圈的表面。我们将利用环面上选取的类似于图 5.2 中的坐标来描述此种运动。在每点处，轨道都是以给定的两个数的比值 ω_2/ω_1 为斜率的直线。 ω_2/ω_1 的物理意义在于，它表示将行星运动中的两个周期——基本的公转轨道的周期与近日点缓慢进动的周期——关联起来的频率比值(frequency ratio)。如果这个比值是有理数(分数)，那么轨道是封闭的，即周期的；否则轨道在环面上永远盘绕并且稠密地填满整个环面。

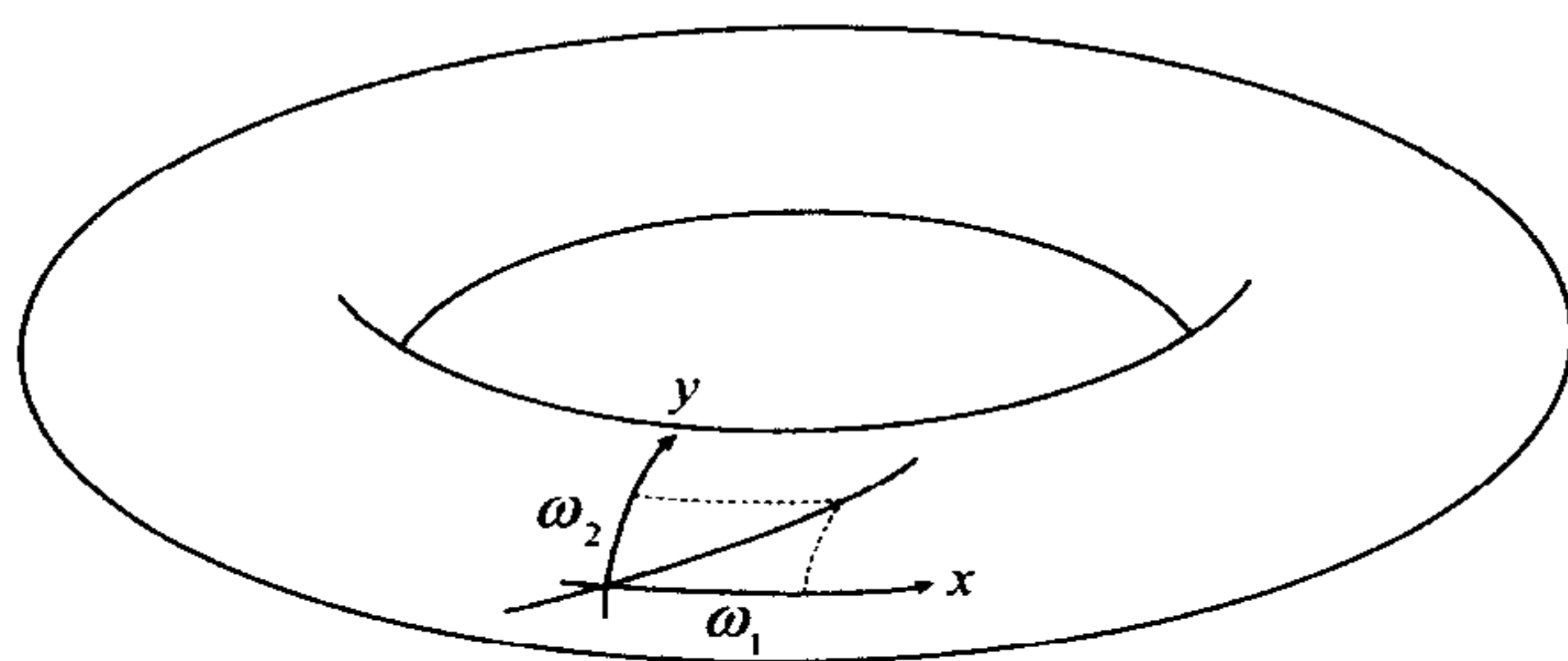


图 5.2 环面上的拟周期轨稠密地填满了整个曲面。我们在环面上选取的坐标是 x 和 y 。

为了弄清这一点，我们必须首先理解平面上由斜率为 ω_2/ω_1 的平行直线给出的流如何与正方形中的流等同起来，以及正方形中的流如何与环面上的流等同起来。图 5.3 说明了第一步，图 5.4 则说明了第二步。现在我们细说一下其中的想法。

在平面上定义一个流，它的所有轨道都平行于 XY ：斜率为 ω_2/ω_1 的直线，见图 5.3a。这是一种均匀的平移——定常的平行流，像理想化的笔直的河流一样。假设 ω_2/ω_1 的值是 $2/1$ 。一条斜率为 2 的特殊轨道 XY 将正方形的网格切开，如图所示切割点是 $\dots, O_{-2}, O_{-1}, O_0, O_1, O_2, \dots$ 。现在我们把这条无限长的轨道 XY (图中只画出其中的一部分) “压缩”到单位长度的单个正方形中，比如图 5.3b 中有阴影的正方形。 XY 穿过正方形，交线

为线段 O_0O_1 ，从正方形下边界的左端点到上边界的中心穿出。 XY 沿线段 O_1O_2 穿过下一个正方形，从正方形下边界的中心到上边界的右端点。 XY 与下一个正方形的交线 O_2O_3 恰好重复通过阴影正方形中的路径 O_0O_1 (从下边界的左端点到上边界的中心)，而在接下去的一步中， O_3O_4 重复第二个正方形中的路径 O_1O_2 。如果我们靠近观察轨道 XY 穿过的所有正方形，就会发现只有这两类交替变换的行为。因此可以在这单个阴影正方形中表示整条轨道而不必将整个平面都描绘出来：我们只需将第二个正方形盖住第一个(阴影的)正方形，然后拷贝正方形中的路径；这样做就可以获得问题中的全部信息。图 5.3b 说明了如何在阴影正方形中表示轨道 XY ，我们将第二条轨道线段的“端”记为 A 和 B 。

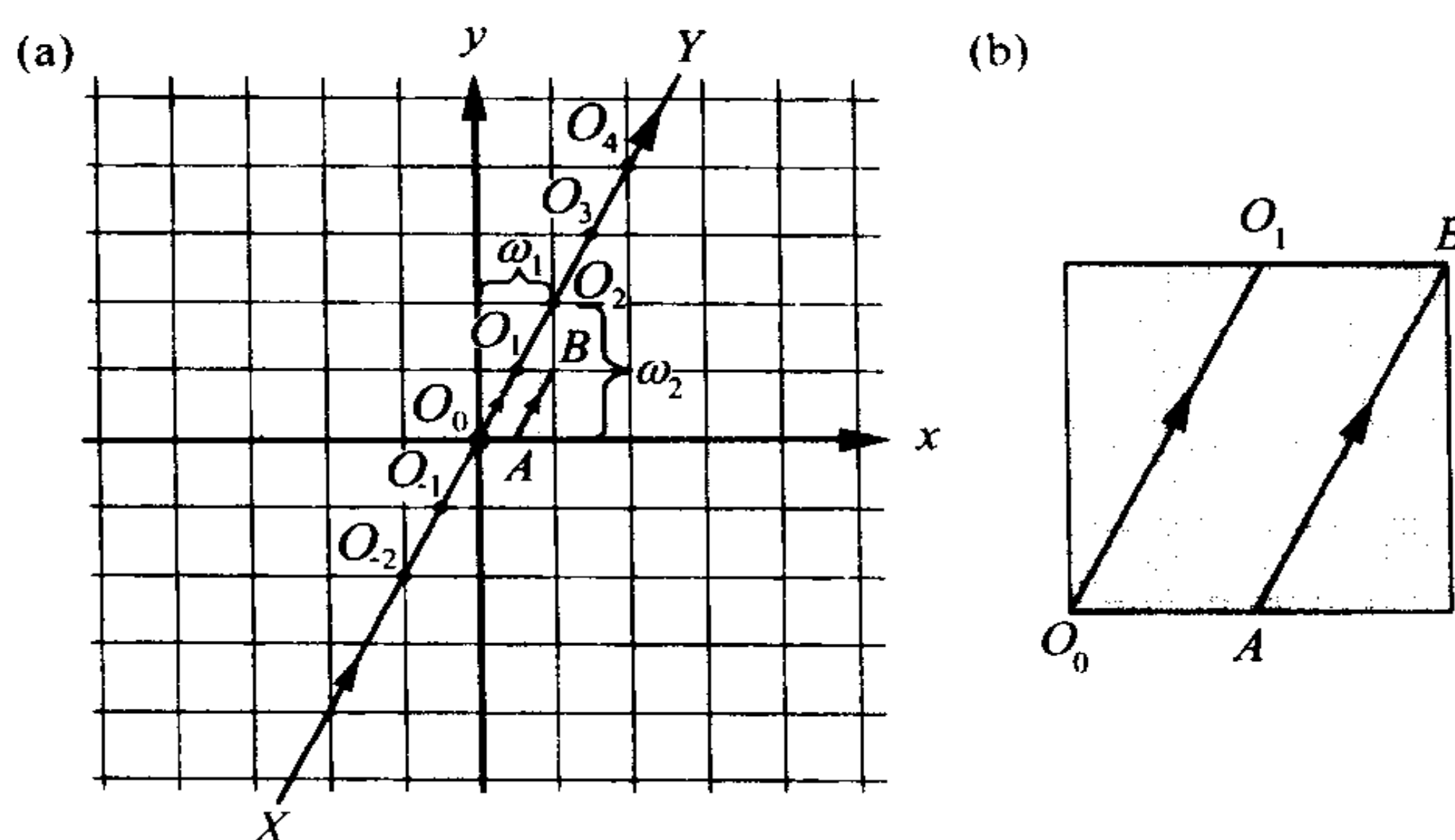


图 5.3 平面上的流(a)与正方形中的流(b)等同。

似乎已经远离了环面，但是我们马上就会谈到它。在图 5.4a 中将正方形的两条边 MB 和 O_0N 粘在一起，我们得到一个柱面，其中的点 M ， O_1 和 B 被分别与 O_0 ， A 和 N 等同起来。这使得正方形中两条轨道线段 O_0O_1 和 AB 成为一条围绕柱面旋转两周的螺线，如图 5.4b 所示。最后将柱面弯曲，把两个圆形端粘在一起，就得到将

四个点 O_0 , B , M 和 N 等同起来的环面。现在, 柱面上盘绕的螺线成为环面上一条封闭的螺线。这条轨道封闭起来, 是因为它从正方形中的 O_0 点(下边界的左端点)出发, 终止于 B 点(上边界的右端点), 并且在我们的粘接过程中正方形的四个端点被等同为一个点。上述过程说明, 当斜率是 $\omega_2/\omega_1 = 2/1$ 时, 环面上相应的轨道产生周期轨道。如果斜率是任何有理数, 那么也会发生同样的现象, 但是螺线在最终封闭以前可能会围绕环面旋转许多圈。

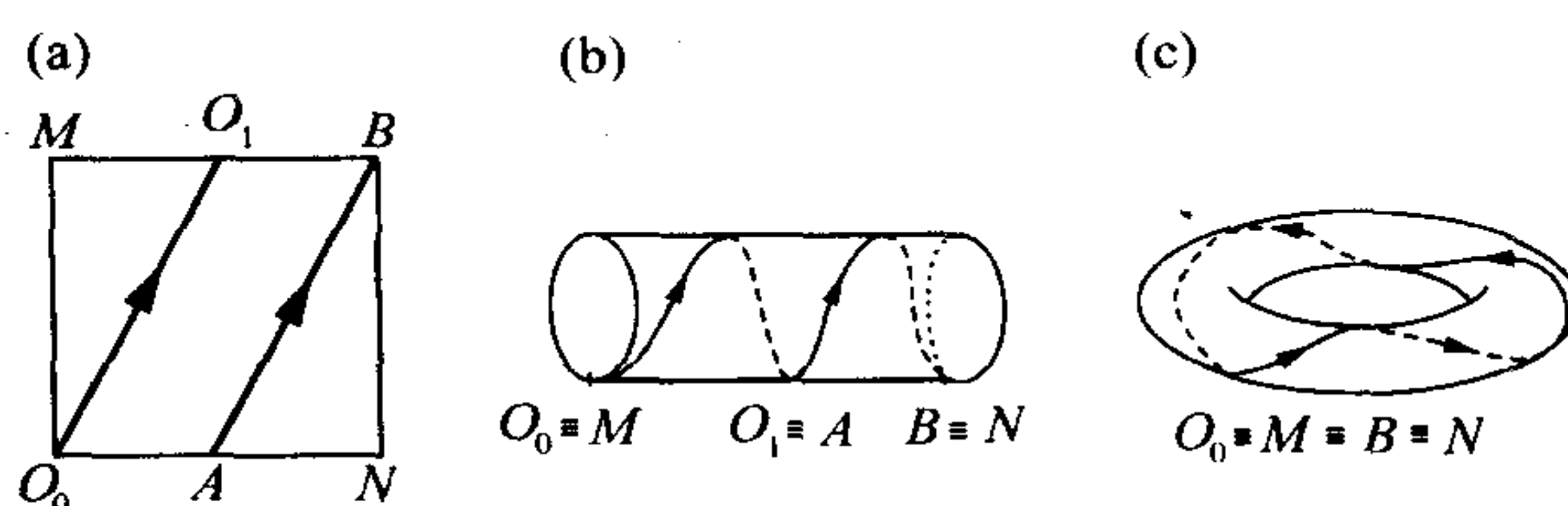


图 5.4 将正方形的两组对边等同起来, 我们得到正方形中的流与环面上的流之间的等价性。

实际上, 轨道围绕环面旋转的几何方式, 准确地反映了频率的有理数比值。在上面的例子中, $\omega_2/\omega_1 = 2/1$, 等价于 $\omega_1/\omega_2 = 1/2$, 轨道围绕炸面圈的圆洞(经向)旋转一圈的同时穿过圆洞(子午线方向)旋转两圈。通常对于有理数的频率比值 $\omega_1/\omega_2 = m/n$ 来讲, 轨道在闭合前经向旋转 m 圈同时子午线方向旋转 n 圈。试着以这一方式围绕炸面圈缠上一段细绳并将细绳的两端连结起来(比如 $m = 2$, $n = 3$), 然后吃掉炸面圈(而不是细绳), 只要 n 和 m 都大于 1 并且没有公因子, 你会发现从炸面圈上脱落的细绳系成一个扭结。扭结与本书的故事没有什么直接关系, 但它是拓扑学中一个有趣的杂闻。通过把轨道缠绕在环面上, 我们将一条简单的直线变成了一个扭结!

如果比值 ω_1/ω_2 是无理数(不能够写成分数的实数), 那么情况会完全不同。此时环面上的轨道不能封闭起来, 这是因为如果轨道

从正方形下边界的左端点[平面上的原点, 坐标为 $(0, 0)$]出发, 那么它永远也不会通过其他任何正方形的端点。若轨道通过某个正方形的端点, 它必须在向右前进 m 个单位的同时上升 n 个单位。由于轨道的斜率是无理数, 因此这是不可能的。于是轨道永远也不会精确地重复它在图 5.3 所示的阴影正方形中的路径, 要表示完整的轨道, 必须在图 5.3 中描绘无穷多条不同的轨道线段。它们实质上填满了整个正方形, 转而每条轨道都将稠密地填满环面。在这种情况下, 我们得到环面上的拟周期轨道。

扰动环面*

柯尔莫哥洛夫在阿姆斯特丹的报告的中心论题是有关不变环面的扰动的。为了弄清为什么这是一个自然的问题, 我们必须解释可积哈密顿系统中一个突出的性质。如果选取适当的坐标表示, 那么几乎每个解都在图 5.5 所示的一族嵌入环面的某个成员中。

我们在第 1 章曾经指出, n 个自由度的哈密顿系统的相空间是 $2n$ 维的, 因此图 5.5 中的二维环面一般只是作为一个示意性的例证, 但是有一种情况下这张图确实正确: 保持能量不变的二自由度系统。这里读者可以回顾一下第 1 章讲述的运动常数与维数的减少。我们分别将两个位置坐标和两个速度或动量坐标标记为 q_1, q_2 和 p_1, p_2 ,

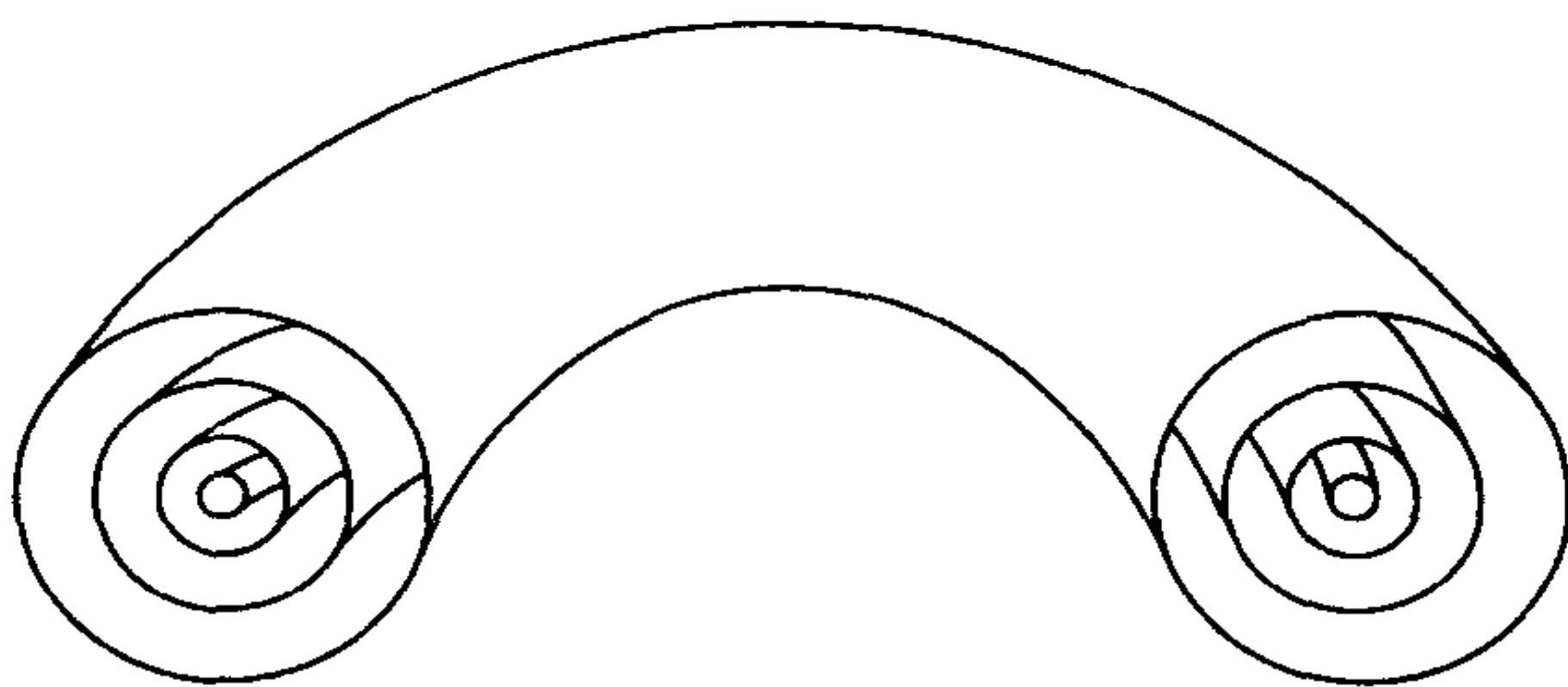


图 5.5 将能量流形分成不同层次的一族嵌入环面。

p_2 。哈密顿量——此时的总能量——是这四个依赖于时间的变量的函数，可以将它记为 $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ 。 H 还被称为运动积分(integral of motion)。

现在，当解变化时， H 保持不变： $H = H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h = \text{常数}$ 。这个方程蕴含了即使四个坐标本身随着时间发生变化，它们之间也存在一个固定的关系，从而一旦具体指定其中任何三个坐标，就可以导出第四个坐标。因此当选定方程的初值条件时，哈密顿方程的解就被限制在三维能量流形(energy manifold)上，其局部与我们常见的三维空间相似。此时图 5.5 恰好描述了可积系统中每个能量流形的结构。

第一个运动常数，总能量 $H = h$ ，允许我们通过选取特定的能量面，将相空间的维数减少 1，从 4 降到 3。二维嵌入环面填满所产生的三维能量流形，这一事实对应于除 H 以外第二积分的存在性，我们记之为 $K = K(q_1, q_2, p_1, p_2) = k$ 。对每个固定的 h ，我们得到一张类似于图 5.5 的图形。进一步固定 k ，就明确地给出了四个变量之间的另一个关系式，或者更确切地说，我们得到利用积分 H 以后所保留的三个变量之间的关系。 k 的每一个值，都选出了环面的连续族中的单个环面。为此，两个积分 H 和 K 必须是独立的，它们能够提供关于系统的两部分不同的信息。

如上所述，限制在环面上的解的行为是简单的：它们或者全部是由有理数的频率比值 m/n 刻画的周期轨道，或者是具有无理数的频率比值的拟周期轨道。由于设定两个量，即参量 h 和 k ，能够定义一个特殊的环面，我们就将这族环面称为双参量环面族。相空间中每个点都在某个能量流形中的一个环面上。我们说环面将流形分成叶层，就像由叶子或纸张组成一本书一样。这就是两个自由度系统的完全可积

性的含义。在第1章我们曾经注意到，庞加莱在获奖论文中的一大贡献，就是证明限制性三体问题中不存在某些类型的额外积分。

我们曾谈到频率比值。粗略地讲，两个自由度的可积系统可以呈现两种运动，每一种都具有自身的特征周期或者时间尺度。当两种运动通过有理数联系起来时，我们称产生的周期轨道在共振环面上，而当它们通过无理数联系起来时，则被称为非共振环面。通常当我们改变参量 h 或 k 时（例如选取不同的能量面），对应的环面就从共振过渡到非共振情况。

可积性的概念能够推广到任意 n 自由度系统中，这是一个令人难以置信却又非常优美的结论。（在某些情况下甚至可以推广到无穷多个自由度的系统。）只要存在 n 个独立的运动常数，人们就能够找到填满相空间的 n 参量 n 维环面族，每个环面上的流是周期的或者拟周期的。

回到二自由度情形，可以证明如果在改变参量 h 和 k 的值时，频率比值 ω_1/ω_2 以非退化的方式发生变化，那么非共振环面的集合具有正的勒贝格测度。（很难定义非退化而不陷入专业细节中；大致地讲，它意味着当我们“穿出”环面，增加 k 和 h 时，频率比值会光滑地增加或者减少。大多数哈密顿系统在此意义下都是非退化的。）另一方面，共振环面的集合的测度是零，但是它在所有环面组成的集合中稠密。这两类环面并不相互分开而是交织在一起，使得每个无理环面（irrational torus）都紧邻着一个有理环面（rational torus），反之亦然。这种情况与实数轴上的有理数集和无理数集十分相似。尽管两个集合都是稠密的，但是前者具有零测度，而后者具有正测度。

如果我们取定二自由度的完全可积系统并轻微扰动它一点，会发

生什么现象呢？所有的不变环面都会被破坏吗？直觉上似乎是这样的。哈密顿量将发生变化，尽管它仍然将方程的解限制在一个三维流形上，然而受扰系统可能不保持完全可积，如果不存在类似于 K 的函数，我们就不能进一步将方程的解限制在二维流形上。因此人们认为环面将被破坏，从而允许解在三维能量流形中自由地漫游。令人吃惊的是，柯尔莫哥洛夫恰恰宣布了相反的结论。他指出：在扰动充分小时，大多数非共振环面将发生轻微的形变，但不会瓦解。

上述结论中“大多数”的含义是指，所有的共振环面和（形成正测度集合的）一些非共振环面在最轻微的扰动下确实被破坏了，但是这个集合与幸存的非共振环面相比仍然是非常小的。此外，当扰动大小越来越小时，被破坏的非共振环面组成的集合也越来越小。像在第3章具有正的勒贝格测度的“厚”康托尔集的例子中所指出的那样，被破坏的环面类似于在集合的缺口中被切除的点，而幸存的环面则对应于遗留在康托尔集中的点。在每个幸存者周围，都包含被破坏的环面，但是幸存者的集合仍然具有正的测度。

尽管柯尔莫哥洛夫在同一年，即1954年，发表了他的结论的证明梗概，但他从未补充证明中的全部细节。又经过8年的时间，莫泽和阿诺德才各自独立地应用不同的手法发表了严格、完备的证明。在论文的引言中，阿诺德将柯尔莫哥洛夫的思想描述为“……简单而新颖……，极为经典的与本质上现代的方法的组合，一个有着200年历史的问题的解答，明晰的几何结构与广阔的视野——它们就是这一工作的价值所在。所欠缺的是从来没有人给出完备的证明。”

在继续讨论这两位数学家的贡献以前，我们试着领会一下柯尔莫哥洛夫在阿姆斯特丹宣布的结果的深刻意义与内涵。这个问题从何而来？它为何如此重要？

信件、失去的解答和政治

在 1870 年遇到魏尔斯特拉斯时，索尼娅·科瓦列夫斯卡娅刚刚 20 岁。魏尔斯特拉斯时年 55 岁，被认为是那个时代最伟大的分析学家。他在柏林的皇家综合工科学学校数学系任职，而索尼娅从家乡莫斯科到这里求学。在为进入当时完全是男性从事的职业所付出的努力中，她需要克服相当多的障碍，不允许旁听一些课程是常事。学校的生活并没有为女性解放作准备。例如，当第一位女性在哥廷根被授予博士学位时，大学评议会的一些成员就表示反对：“她或许还想成为一名教授，然后有野心成为评议员的候选人！”为了缓和同事们的反对，数学家希尔伯特回答道：“但是我亲爱的绅士们，评议会并不是土耳其浴室[Badeanstalt]！”



照片 5.2 索尼娅·科瓦列夫斯卡娅。（米塔-列夫勒研究所提供）

由于健康状况不佳，魏尔斯特拉斯不得不坐着上课，一位高年级的学生将教案写在黑板上。虽然如此，他仍被认为是讲解巨匠，他的课堂总是座无虚席。科瓦列夫斯卡娅不被允许参加他的公开课，但魏尔斯特拉斯不久就听说这位坚定而渴求知识的年轻女性，并安排私下里指导她。他们每个星期日下午在魏尔斯特拉斯的家里会面，并且每周他都会造访一次她的寓所。他们的友谊就这样持续了20多年，直到这位卓越的女性令人痛心早逝。

毕业几年后，科瓦列夫斯卡娅在斯德哥尔摩得到教授职位，在此她开展了刚体绕定点旋转的研究工作。一般来讲，这类物体的运动方程有三个自由度，物体的方位由三个角度来刻画：纬度、经度和旋转角。当时只有两种完全可积的情形为人所知。第一种情形——对应于没有引力作用的情况下在空间中自由翻转的物体——角动量的三个分量和能量都是守恒的，从而导出所谓的欧拉方程(Euler equations)。在第二种情形中，物体具有与小孩的旋转陀螺一样的对称性，成为旋转的固体，例如人们开启一部车床。这里对称性导致了角动量两个分量的守恒以及能量守恒。系统仍然是可积的：它被称为拉格朗日陀螺(Lagrange top)。

科瓦列夫斯卡娅发现了第三种完全可积的情形，其中物体的转动惯量以一种特殊的方式相关联。这种科瓦列夫斯卡娅陀螺(Kovalevskaja top)仍然被认为太艰深，大多数教科书不讲它，这显示了她的才智和创造性。关于上述发现的论文在1888年获得法国科学院的博罗丁奖(Borodin Prize)。鉴于她取得的非凡成就，评审委员会作为特例将奖金额增加一倍。她成为现代数学纪元开始时最出色的女数学家，赢得了许多男性同行们的尊敬和信赖。她的同事米塔-列夫勒在设立奥斯卡国王奖的评审委员会时，就征求过她的意见。

和帮助。除了数学上的工作，她还写过一本小说《薇拉·沃龙佐夫》，讲述她在俄国孩提时代的经历。

除了科瓦列夫斯卡娅对力学的重要贡献以外，我们回顾索尼娅·科瓦列夫斯卡娅和魏尔斯特拉斯的故事还有另一个原因。这两位非同寻常的人之间的友谊使他们保持着长期的通信，在信件中可以发现许多数学思想的根源。尤其是阅读魏尔斯特拉斯的信，人们开始了解他思考和工作的方式，这完全不同于阅读他的数学论文。科学文章，尤其是数学文章，只呈现最后的结论，文章隐藏了创作的主旨、产生最后结果的过程、希望和疑虑、激情、错误的出发点和失误以及失望。而这正是那些信中所包含的内容。信中还记述了抽象定理背后的人的心智，呈现给我们未曾发表的那些不成功的尝试，使我们能够追寻创造的顿挫过程。

在这些信中可以追溯我们的问题的起源。1878年8月15日魏尔斯特拉斯写道，他已经找到 n 体问题拟周期解的形式级数展开，并努力证明其收敛性。遗憾的是他所有的尝试都失败了。但是，他仍然相信这些级数是收敛的。他确信这一点有两方面的原因。一方面是纯粹直觉的原因，多年来的经验所获得的直觉告诉他事物的本质究竟是什么，但没有确定的逻辑基础。但是，还有第二个原因，另一位有影响的数学家关于这个问题曾经留下一些证据。

1858年，狄利克雷告诉他的学生克罗内克，他发现了一种处理和解决力学中所有问题的新的一般方法。狄利克雷曾经是高斯在哥廷根的继任者，他是一位值得信赖的人和具有崇高威望的数学家。他的工作，主要是在数论方面的，是严谨性与正确性的典范。因此人们很严肃地对待他所讲的话。遗憾的是，狄利克雷在作出这一陈

述后不久就去世了，没有留下任何确切的书面资料。克罗内克和其他人认为这种方法一定与魏尔斯特拉斯后来考虑的这类解的级数逼近有关，而狄利克雷已经找到证明其收敛性的工具。

现在我们可以更为完全地了解，为什么魏尔斯特拉斯为第 1 章讲述的奥斯卡国王所设立的奖项提出寻找 n 体问题中收敛的幂级数解的问题。虽然自己没有取得成功，但是意识到这种方法在数学上的价值，魏尔斯特拉斯希望激励年轻的研究者钻研这个问题，并重新发现狄利克雷的方法。他清楚许多未解决的问题都会得益于这一方法的再发现，尤其是与太阳系稳定性有关的问题。正如我们在第 1 章发现混沌的故事中所看到的，他的信心得到极大的回报，尽管不是以他所希望的方式。

在提出问题一个多世纪以后，现在柯尔莫哥洛夫实质上宣称他已经解决了这个基本问题。然而，他并不知道魏尔斯特拉斯和狄利克雷未发表的想法，而他解决问题的途径也是完全不同的。孩提时代阅读的弗拉马利翁 (Flammarion) 的天文学书籍，在柯尔莫哥洛夫的心里播下了兴趣的种子。当成为一名得到认可的研究者，发现两个新的信息来源时，他希望了解宇宙中一个重大秘密的梦想在几十年后复苏了。一个信息来源是冯·诺伊曼的动力系统谱理论 (spectral theory of dynamical systems)，包含在 1932 年用德语出版的《量子力学的数学基础》一书中；另一个是基辅的克雷洛夫 (Nikolai Krylov) 和博戈柳波夫 (Nikolai Bogolyubov) 的论文，发表于 1937 年的《数学年刊》，在论文中作者将测度论中的一般概念和方法应用于动力系统。

柯尔莫哥洛夫讲演的原问题，涉及按克雷洛夫和博戈柳波夫给出的定义来看，哪些遍历集合 (ergodic set) 确实存在于描述经典力学的微分方程的流中，其中哪些具有正测度。粗略地讲，遍历集合是从

动力学的观点来看不能被分解的流的一部分。它本身成为一个统一体，任何试图将其分割并研究分离的部分都是不可能的。它通常被一条稠密的轨道不可分割地紧密联系在一起。第2章讲述的斯梅尔马蹄中的不变康托尔集 Λ ，就是一个例子。如果遍历集合具有正测度，那么它本身就是重要而且不容忽视的。

我们不再叙述如何将这个特殊的问题表述为数学语言，而是指出它已超出了不变环面问题。为了攻克上述问题，柯尔莫哥洛夫开始研究可积系统的扰动，并发现不变环面的持久性(persistence)。原问题至今仍然悬而未决，但这是无关紧要的；现在人们已经对它失去了兴趣。柯尔莫哥洛夫获得的结果比他最初寻找的更加重要。他的学生阿诺德曾经指出，这类似于哥伦布(Columbus)发现美洲，其最初的目的是寻找向西到达印度的道路。

在阿姆斯特丹国际数学家大会以后，有一段时间柯尔莫哥洛夫的兴趣转到维数理论和集合的容度，但在50年代末他又回到动力系统的研究中。1957~1958年，他在莫斯科讲授一门课程，主要讨论不变环面的结果。他还主持一个讨论班，其中物理学家和数学家可以谈论各种各样的问题，包括磁表面和等离子体的约束。在那些应用中，不变环面的保持性(perservation)意味着用来约束核聚变反应的“磁瓶”是完整的。柯尔莫哥洛夫亲自讲解三体问题，很显然当时他与同事们已经很清楚这个定理的重要物理意义。

这些都是柯尔莫哥洛夫对该问题感兴趣的科学动机。但还有其他的动机，即当时在苏联工作对他的巨大影响。柯尔莫哥洛夫过去的的生活一直很坎坷，他度过了艰难的孩提和青少年时代，虽然在20年代末和30年代初他能够到哥廷根和法国访问一段时间，但是大部分时间都生活在斯大林(Stalin, 1879~1953)高压统治的阴影下。

1940 年在发表了一篇关于孟德尔遗传定律的统计学证据的文章以后，他几乎给自己招致一场政治麻烦。这篇文章激起了有势力的遗传学家李森科(T. D. Lysenko)的怒火，后者的欺骗性理论得到了官方的支持。李森科和一位同事、数学家科尔曼(E. Kolman)，撰文谴责柯尔莫哥洛夫的工作，文中他们宣称“生物学中的规律性与数学规律不同”，并且引用恩格斯(Engels, 1820 ~ 1895)和列宁(Lenin, 1870 ~ 1924)的著作支持自己的观点。虽然如此，自从 1939 年成为科学院院士以来，柯尔莫哥洛夫与其他人相比还算更幸运的。(我们可以从以下事实理解他的好运：在第二次世界大战期间，由于在冬季研究大楼里面的温度维持在零度，斯大林批准给每位院士分发一条毛毯。)

1953 年斯大林去世。柯尔莫哥洛夫和一些同事们重新得到出国访问的权利；事实上，他是出席本章开头讲述的阿姆斯特丹国际数学家大会的苏联代表团的四名成员之一。他们能够再次同外国科学家进行交流，而不必害怕被放逐到西伯利亚的劳役营。尽管与西方公民比起来，他们的权利和自由是有限而微小的，但是赫鲁晓夫的“开放”对于苏联的知识分子来讲还是代表了一个巨大的进步。这对柯尔莫哥洛夫的生活产生了深刻的影响。他可以参加随后的一些会议，比如 1962 年在斯德哥尔摩举行的国际数学家大会，甚至可以在巴黎访问一个学期。1953 年以后的 10 年被证明是他一生中最多产的时期。

柯尔莫哥洛夫按照自己的方式提出不变环面问题，并阐述了他关于扰动下不变环面持久性的定理。采用不同的术语和新的方法，他回到狄利克雷和魏尔斯特拉斯曾经考虑的问题。但是柯尔莫哥洛夫证明的梗概是合适的吗？难道这样一个长期悬置的问题，现在就被

一个人孤军奋战解决了？如此简单，令人难以置信。

关于证明的忧虑

莫泽一遍又一遍地阅读整个证明，试图理解所有未写出的细节。他对论文没有明确地阐述许多细节感到迷惑，因为他发现结论并非显而易见。《数学评论》作为一种服务性的刊物，发表专业性文章的概要。它的一位编辑请莫泽为一篇论文写简评。一般情况下这是相当平常的事，但此时莫泽发现自己难以完成这项任务。他宁愿避开继续纠缠他的这种困扰，但是一旦接手，他清楚自己必须坚持到底。

桌上的论文，是已经发表的柯尔莫哥洛夫在阿姆斯特丹的报告。在准备简评的过程中，莫泽参看了这位俄国数学家在论文中引用的一些其他论文。不变环面定理中遗漏的细节应该包含在其中的一篇文章中，但是他不能确信柯尔莫哥洛夫的证明是完备的。作为整个证明的核心，相应的级数表示的收敛性证明被遗漏了。起初他认为自己的推理是错误的，论文中的陈述似乎是显而易见的，只不过他没有完全领会。这使他更加渴望理解整个证明过程。一次次的努力都失败了，几天后他意识到这一切其实并不是显然的。为弄明白而进行的所有尝试都会导致新的复杂情况。乍看起来似乎是难以逾越的。为克服这些困难做了最巧妙的尝试以后，它们仍然显得十分艰难。

另一方面，柯尔莫哥洛夫名闻遐迩、德高望众，而莫泽只有二十几岁，刚刚取得博士学位，没有什么声望。但莫泽的良知驱使他对这个问题的寻根问底。这位俄罗斯大师的威望很容易使他的疑问产生动摇，写一段赞美的评语并回到原来的研究工作中，对他来讲也是很容易的。然而，他不允许这种不负责任的做法。在确信不存在明显的收敛性证明以后，莫泽写出他的评语，发表在1959年的一期《数

学评论》上，在评语中他指出收敛性证明不能令自己信服。在评语的末尾他写道，如果收敛性问题确实能够被解决，那么柯尔莫哥洛夫文章中的结果是值得称道的。

问题继续困扰着莫泽。将评语寄回杂志后，他并不认为事情就此结束。他想要知道柯尔莫哥洛夫的结论正确与否。对这一结果及其证明正确性的好奇心，取代了他对自己正在研究的所有其他问题的兴趣。他几乎被这个问题迷住了。



照片 5.3 于尔根·莫泽。（于尔根·莫泽提供）

一天，在前往坎布里奇的麻省理工学院办公室的路上，莫泽突然记起了六七年前的一次讨论。当时他还在德国的哥廷根大学，即将离开欧洲前往美国担任纽约大学的富布赖特研究职位。在一次讨论

班结束时，他走近主讲人西格尔，向他请教与报告涉及的主题有关的一些附加的问题。

西格尔是当时世界上最杰出的数学家之一。像柯尔莫哥洛夫一样，他在表面上毫无联系的多个数学分支中做出了极为重要的贡献，他的结果在数论和天体力学等领域仍然被频繁地引用。他是第二次世界大战后回到德国的少数几位德国科学家之一。

1947年，年仅19岁的莫泽离开哥尼斯堡，只身来到哥廷根。哥尼斯堡这座美丽的波罗的海沿岸城市现在更名为加里宁格勒，欧拉曾经在此生活和工作许多年。他开始在瑞利赫(Franz Rellich)的指导下撰写博士论文，但是1950年西格尔从普林斯顿回到哥廷根，莫泽旁听了他的关于数论的报告。这位年轻人被强大而高水准的数学和西格尔严密的表述方式深深打动。后来，瑞利赫帮助安排莫泽为西格尔的天体力学课程作笔记，1956年这些笔记用德语出版，即瑞利赫早逝的一年以后。（这本书是用以纪念瑞利赫的。）这样，莫泽的兴趣就从他第一位导师那里移开了，这很大程度上归功于瑞利赫的远见卓识和宽宏大量。从西格尔来讲，他很快认识到这位新学生的天赋，当1951年莫泽还在瑞利赫的指导下写作博士论文时，他们就开始了合作。

莫泽想起与西格尔在哥廷根的讨论，那是关于柯尔莫哥洛夫现在所考虑的同样类型的问题。西格尔讲过类似的话“对我来讲这个问题是非常重要的”，但当时莫泽没有想到去理解这句话的涵义。现在他明白这就是西格尔对问题如此牵肠挂肚的原因。无意间认识到两个问题的相似之处，使莫泽回忆起西格尔的话，这驱使他开始钻研这个课题。

莫泽相信西格尔关于这个问题重要性的判断，现在这一领域的另

一位权威柯尔莫哥洛夫已经着手研究而且取得进展。这使他确信该问题一定是值得思考的。尽管有了这样的信念，他还想了解为什么会是这种情况：究竟是什么原因使这些人认为该问题重要呢？无论如何，他对数学的兴趣和好奇心使他坚定了解决不变环面问题的决心，而不管其重要与否。接下来的3年多时间，他成功地做了两件事：解决这个问题并理解其深远意义。

在此期间，莫泽回到纽约大学的柯朗研究所，他曾经在这里担任富布赖特研究职位。这次他得到了长期可靠的工作，因此能够将全部精力集中在不变环面问题的研究上。他同其他人谈起过这个问题，由于西格尔经常往返于欧洲和北美之间，他甚至与这位导师见过几次面。但是没有人能够更多地帮助他独自攀登这座看起来荒芜而险峻的山峰。他必须一个人去征服它。

1961年夏，事情趋于明朗化。莫泽登上了山顶。很显然，柯尔莫哥洛夫定理确实是正确的，证明看起来是完备而清晰的。利用他突然领悟的一个想法，莫泽找到了一种快速收敛法。但他并没有马上为此沾沾自喜，他首先必须确信所有的证明细节都是完美无缺的，因为错误很容易出现。他需要多次检查证明的每一步。他必须等待，先把证明放到一边，然后再用全新的视角和清醒的头脑去审视它。

接着他用6个月的时间写下自己的工作，仔细斟酌论文的表述。他不慌不忙，他想要明确解释每一件事，使之易于阅读，让非专业人士也能够读懂这个证明。这是不容易的，但是他付出了时间并做得很好。

像莫泽这样的人是很少见的。任何人理解了这个结果的重要性

都会将论文投到某个权威杂志上发表，比如《数学年刊》、《数学发明》或者《数学学报》，迅速为自己赢得国际上的知名度。除了于尔根·莫泽，任何人都会这样做。1962年2月，莫泽将论文《论保面积环域映射的不变曲线》提交给《哥廷根科学院通报》，一份没有名气另外也登载其他物理和自然科学文章的出版物。事实上，刊登在莫泽论文后面的，是一篇关于哥廷根附近植被的植物学研究的文章。

但是金子总会发光的。几位有影响的数学家知道了这篇论文，其中最有名的一位是西格尔，他与哥廷根科学院联系将论文付诸发表。阅读了这篇论文的专家很快认识到它的价值，不久莫泽就闻名于世。当时他34岁。

在同一年，即1962年，莫泽获得巨额斯隆(Sloan)研究基金，并决定将它作为访问苏联的经费。当年他曾经在斯德哥尔摩国际数学家大会上遇到柯尔莫哥洛夫和他的一些学生，莫泽想要进一步了解他们及其工作。这些俄罗斯人热情接待了他，莫泽与他们进行了富有成果的讨论。尽管在莫斯科他就另一个主题做了一次公开演讲，但私下里与柯尔莫哥洛夫和其他人也谈到了不变环面定理。在这里他再次遇到柯尔莫哥洛夫的一位学生，弗拉基米尔·伊戈列维奇·阿诺德，他在莫泽作报告时担任翻译。通过仅有的一点俄语知识，莫泽吃惊地发现报告期间阿诺德在翻译中有时能够提前讲出报告的内容。

作为柯尔莫哥洛夫的一名出色学生，阿诺德本人也对不变环面定理感兴趣。几乎与莫泽在同一时间，他在稍微不同的假设下用不同的方法独立地解决了这个问题。后面我们会回来描述一下阿诺德的工作。

通过敏锐地观察苏联的政治和社会环境，莫泽惊喜地发现苏联数学学派在积极稳定地向前发展，特别是鼓励有天赋的年轻人充分发挥才能的做法。但他也看到阴暗的一面。今天已经成为著名拓扑学家的诺维科夫(S. P. Novikov)当时只有二十几岁，默默无闻，他请莫泽将他的论文带到西方并分发给普林斯顿的同事们。诺维科夫的工作在苏联一直未受到重视，他正在争取得到应有的认可。他唯一的希望就是在一份有声望的西方杂志上发表自己的论文。在没有得到官方许可的情况下，一位苏联科学家是不可能做到这一点的。一个人可能要等待许多年才能得到这样一个申请的答复，而那时回答往往是否定的。莫泽冒着激怒苏联当局的风险满足了诺维科夫的愿望。论文最终发表在《数学年刊》上。1970年，诺维科夫成为在尼斯召开的国际数学家大会上宣布的菲尔兹奖得主之一。

莫泽的事业发展得非常迅速。柯朗研究所的学术气氛十分理想，他在那里工作了18年之久，1967~1970年担任所长。这段时期莫泽在天体力学、谱理论、变分法、偏微分方程、微分几何和复分析等领域皆做出了重要的贡献。1980年他接到苏黎世著名的瑞士联邦工业大学的邀请。对于早期在欧洲生活的留恋使他接受了聘请，后来成为那里的数学研究所的所长。

莫泽获得了各种奖励、奖章和荣誉，下面列出的可能并不完整。1967年他获得美国数学会和工业与应用数学联合会的奖励，这一奖项是为纪念伯克霍夫而设立的。1983~1986年他担任国际数学联合会主席，1986年他主持了伯克利数学家大会的菲尔兹奖评审委员会。1989年1月，波鸿的鲁尔大学授予莫泽荣誉博士[同时还有另两位德国数学家格劳尔特(Grauert)和雷默特(Remmert)]，当时他在荣誉演说中论述了天体力学中的稳定性课题。他提出的

作为今天数学研究中最重要的一个问题，就是 n 体问题中非碰撞奇点的存在性。〔当时还不清楚我们在第 3 章中讨论的夏氏证明 (Xia's proof) 正确与否。〕最近，1994 ~ 1995 年沃尔夫数学奖被颁发给莫泽。

扭转映射*

1962 年莫泽发表的论文的中心结果是扭转定理 (twist theorem)。现在我们就描述这个结果并解释其名称的由来。为此必须回到图 5.5 所示的由不变环面构成的三维常值能量流形的叶层中。

回顾第 1 章的图 1.11 和图 1.13，庞加莱映射是通过选取流的截面并标记流首次返回与截面的交点而得到的。在当前的情形中，这指的是在能量流形上选取与不变环面垂直相交的平面。每个环面都与平面相交于一个圆周；因此通过嵌套环面的截面包含了具有公共中心的无穷多个圆周。（它们可能不完全是几何上的圆周，但我们知道对于拓扑学家来讲，平面上的任何简单闭曲线都是圆周。）每个环面都对应于一个圆周，反之亦然。

对于未受扰可积系统，流的每一条轨道都被限制在环面上。这意味着轨道与截面相交于对应于环面的圆周上。沿着轨道继续前行——迭代首回映射——下次会在同一圆周上的不同点与截面相交。于是随着首回映射被迭代，每个圆周上的点都被绕圆周移动了。

取代研究不变环面上的流，我们考虑将同心圆周绕着它们的中心简单旋转的映射，这样就将问题的维数减少了 1。在映射的作用下，每个圆周旋转不同的角度，并且都是不变的：从圆周上出发的点总是停留在它上面。选取在内和在外的圆周各一个作为边界，莫泽考虑如图 5.6 所示的环或环域，并问施加扰动后环域内的圆周会

发生什么变化？

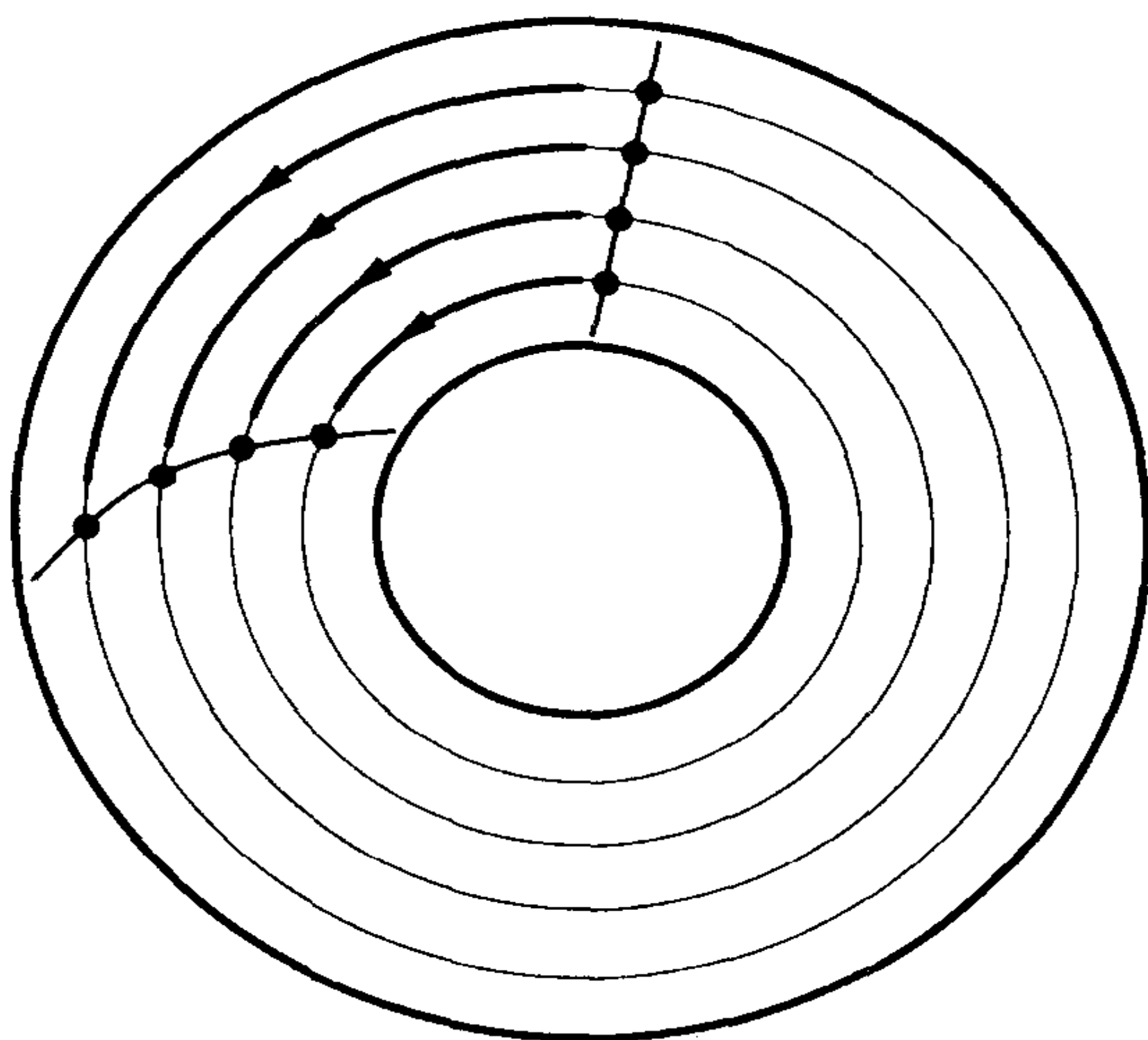


图 5.6 环域中的扭转映射。

上述问题可以进一步简化为考察一类所谓的扭转映射 (twist maps)，它以一定的角度转动圆周，并随着半径的增加而增大旋转的角度。这样，半径较小的圆周比较大的圆周转动的角度要小。这是由下述假定推导出来的：频率比值是非退化的，它随着我们穿过图 5.5 中的环面和第二积分 K 的值的增加而发生变化。于是导致了环域的扭转，正像扭转映射一词所暗示的那样。以有理数为频率比值的环面所对应的圆周上的点被旋转了有理数的角度，我们称这样的圆周为有理的或者共振的。同理，无理的或者非共振圆周对应于轨道具有无理数的频率比值的环面。可积系统扰动的原问题现在变成了：如果扭转映射发生轻微的改变，这些圆周是否会保持下去？原来一个圆周上的点能否跳到另一个圆周上？

回顾第 2 章开头讲述的伯克霍夫证明的庞加莱几何定理，它同样研究定义在环域上的映射。然而，庞加莱和伯克霍夫感兴趣的是保

持下去的孤立不动点和周期点，而莫泽关心的则是幸存下来的所有不变圆周：由轨道充满的整个环面。

用不变环面上的流的术语来讲，上述问题的答案给出了柯尔莫哥洛夫定理的部分解释。莫泽证明，在相应的条件下，其中包括要求扭转映射是保面积的 (area preserving)，扰动充分小且也是保面积的，并且环面是“充分无理的”，那么至少有一个非共振不变圆周被保持下去。（在第2章我们提到庞加莱和伯克霍夫也考虑过保面积映射，保面积意味着映射将环域中的任何区域映为相同面积的另一块区域。）不变圆周可能发生一些形变，但是上面的点不能在映射的迭代作用下跳到其他圆周上。事实上，莫泽的结果实际上蕴含了更多：具有充分无理的频率比值的环面对应的所有非共振圆周在扰动后都被保持下去。一会儿我们将更多地谈及它。

尽管与柯尔莫哥洛夫最初的陈述略有不同，莫泽的结论却可以通过对扰动函数提出稍微弱一点的假设而得到，即可以放松结论所需要的条件。因此我们得到一个不同的结果，其优势在于具有清晰而严格的证明。

莫泽对这个问题做出的决定性贡献，是构造了一个快速收敛的迭代过程。快速收敛性从本质上克服了所谓的小除数或者小分母的影响。小除数自从扰动理论诞生起，在将近两百年的时间里带来许多麻烦。魏尔斯特拉斯、庞加莱和其他许多人都探索过这个问题，但是莫泽第一个真正克服了由小除数产生的困难。

正如算术中的普通除法一样，除数是用来分割相应的系数的元素。如果除数任意小，并且依赖于被除的系数的大小，那么得数就可能很大。1除以0.000 1，得10 000。此时除数是0.000 1；如果除数更小，得到的结果就会更大。在证明无穷级数收敛的过程中，

我们需要说明相继的级数的项以适当的速率变得越来越小，从而使所有项之和是有限的。如果许多大数出现在级数的项中，并且无法控制它们的大小，那么级数是不可能收敛的。

遗憾的是，我们在应用扰动法将拟周期解表示为无穷级数时，会不可避免地牵涉小除数。木星和土星围绕太阳的运动就提供了一个例证。木星每天运转 299 弧秒，而土星运行 120.5 弧秒。如果将这两个行星的频率记为 $\omega_{\text{木星}}$ 和 $\omega_{\text{土星}}$ （它们与 299 和 120.5 成比例），那么 $2\omega_{\text{木星}} - 5\omega_{\text{土星}}$ ($= -4.5$) 与每个行星的频率相比是非常小的。后者作为分母出现在扭转映射的拟周期解的级数表达式中，从而产生小除数。拉普拉斯和拉格朗日都遇到过小除数问题，前者在《天体力学》一书中用大量的篇幅阐述有关小除数的计算，其中包括木星—土星共振的计算。

看起来期待得到收敛性可能是毫无希望的。然而，由于扰动函数是充分光滑的，同一级数中各阶项的分子 (numerators) 也会随着阶数的升高而变小。正是作为整体的诸项的大小，因而分子和分母减小的相对速率，决定了收敛性。这样就产生了充分无理的频率比值的概念。我们曾指出，由于任意地接近每个无理圆周都存在一个有理圆周，因此任意小的分母是不可避免的。然而，如果无理数的频率比值 ω_1/ω_2 只能被非常大的整数 m 和 n 构成的分数 m/n 充分地逼近，那么可以证明分子的减少要快过分母的减少，因此级数收敛，从而蕴含着相应的圆周幸存下来。

在驯服小除数问题时，莫泽回答了许多前辈曾经尝试而没有取得成功的一个悠久的问題。伟大的思想几乎总是简洁明了，莫泽的洞见就两者兼具。他的工作没有就此停止，他继续以同样敏锐的洞察力在数学的其他领域钻研各种难题。那些了解莫泽成就的人都钦佩

他能够在论文中用一种自然的方式表述自己的思想。阅读他的文章就像从最安全、最迷人的山间小路攀登一座险峻的高山。一旦登上山顶，壮观的景色将是你全部努力的回报。而发现并指明这条小径的人，就是于尔根·莫泽。

一个有天赋的学生

柯尔莫哥洛夫从手稿上抬起眼睛望着他的学生。“年轻人，”他一字一句地说，“你已经解决了希尔伯特第13问题！”阿诺德的心比平时跳得更快了。

1900年在巴黎举行的国际数学家大会上，德国大数学家希尔伯特在大会的报告中，简述了他认为在数学研究的未来发展中一些特别重要的课题和特定的领域。他列举了23个具体的问题：一些能够把握数学本质的猜想和问题。希尔伯特在数学史上最为人所知的是他信奉形式主义方法：相信数论乃至分析的整体最终可以被证明是没有内在矛盾的。这个希望最后于1931年被哥德尔(Kurt Gödel, 1906~1978)著名的不完全性定理(Incompleteness Theorem)所打破。尽管如此，希尔伯特列举的问题对确定数学研究的方向产生了很大的影响——有人会说影响太大了。虽然人们投入大量的时间与精力试图解决这些问题，但是至今仍有一些问题没有被解决。

1956年的一个激动人心的时刻，在其他许多人经过半个多世纪的尝试都失败的情况下，一位俄罗斯青年取得了成功。阿诺德在交给他的老师解答希尔伯特问题的手稿时年仅19岁。为了鼓励学生们做深入的研究，柯尔莫哥洛夫曾经在讨论班上讲述了他发现的第13问题的一种“简化”——用更简单的术语重新阐述原来的问题。这一简化本身是他花费数月的时间得到的，因此柯尔莫哥洛夫并没有预

料到某一天他的一位学生会给出问题的答案。这个问题已经超出本书故事的范围，我们不可能描述它，这里只是指出阿诺德在同龄人刚刚高中毕业时就取得了前人没有得到的成功。



照片 5.4 弗拉基米尔·伊戈列维奇·阿诺德。（S·兹德拉夫科夫斯卡提供）

从那时起，阿诺德就注定会成为一名数学家。他很幸运，生逢其时，前进的道路已经在他面前展开。由于母亲是犹太人，他在斯大林时期未能获准进入莫斯科大学学习。1953 年这位苏联领导人去世，随后政策的放开一直延续到 1968 年入侵捷克斯洛伐克，这给了他足够的时间攻读学位并成为数学力学系的教授。他确实是幸运的，在苏联过去 70 多年仅有的一段开放时期，他正处于创业阶段。阿诺德知道如何充分利用这段宝贵的时光。

在阿诺德解决希尔伯特问题以后，柯尔莫哥洛夫鼓励他的学生选

择自己的研究题目。柯尔莫哥洛夫的教学方式非常自由；他给学生们在自己喜欢的领域开展工作的自由，只是要求他们在获得有趣的结果时告诉他。[然而，他自己有明确的偏好：后来当阿诺德研究心脏振荡(cardiac oscillations)时，柯尔莫哥洛夫劝阻他说：“那不是个值得研究的经典问题。”数学物理学才是更重要的！]课堂上他几乎不花时间写出规范的证明，只是讲解一些基本的性质：问题的核心。他建议学生们自己在家里填补漏洞。柯尔莫哥洛夫在自己的研究中也采用同样的方式，他很少愿意写下所有的细节。他觉得生命如此短促，更应该创造而不是挖掘。几乎没有数学家会支持这种观点，因为它怂恿人们从事不扎实的研究工作，而且还可能导致严重的混乱，莫泽在阅读有关环面结果的“证明”时就发现了这样的问题。

如果大多数数学家都按照这种方式工作，那确实是危险的，因为人们无法轻易地区分已证明的定理、未证明的(然而正确的)论断、错误的断言，以及猜想。绝大多数发表的数学论文都是正确的、可以完全信赖的，相比之下，其他科学领域中新的发现的状况就不那么明显了。这种优势在于“常规”数学家对于每一个细节都会勤奋钻研、仔细检查。但是在特殊的情况下，一种更自由的方式会带来非同寻常的创造力。这种方式并不能阻止柯尔莫哥洛夫取得成功，他也决不是一名肤浅的研究者。事实上，西奈(Yasha Sinai)在1956~1957年读大学期间与阿诺德一起参加柯尔莫哥洛夫的课程和讨论班，他指出对于讨论班的参加者来讲，柯尔莫哥洛夫显然清楚如何填补关于环面结果的证明中的全部漏洞，可能其中只有一处例外，而他确信这一点也是可以证明的。这是与幸存的环面的测度有关的某个技术性细节。当然，莫泽和后文将要谈到的阿诺德都能够填补这个漏洞的细节，并得到独立的完整的证明。

受到柯尔莫哥洛夫的鼓励，阿诺德未等待进一步的指导，立即着手研究与他刚刚解决的问题相关的另一个问题。这是关于曲线上的函数是否能够表示为其坐标函数之和的问题。为了解释它，我们假设定义在平面上的函数 f 还在平面中取值（输入和输出都是二维的）。因此 f 有两个输出坐标： f_1 和 f_2 。如果在平面上固定一条曲线并将 f 限制在这条曲线上（只考虑函数在这条曲线上的值，不考虑在其他位置的值），那么在什么情况下我们可以将 f_1 和 f_2 写成平面输入坐标 x_1 和 x_2 的函数之和？阿诺德首先考虑最简单的固定曲线是圆周的情形。他很快认识到这个问题蕴含了圆周上映射迭代的研究，而且发现这个问题恰好能够进一步简化为不变环面的问题。这确实是令人惊奇的，他从表面上与动力系统理论毫无联系的领域出发，设法找到了沟通两个领域的桥梁。

其后阿诺德继续考虑不变环面问题，1961 年他在不同于莫泽所提出的那些假设下获得了柯尔莫哥洛夫宣布的结果的完备证明。（阿诺德假设解析的扰动；莫泽要求充分光滑的扰动。）其中的部分结果于 1961 年夏秋之际在莫斯科召开的数学家和天文学家的大会上公布出来，而关于“模型问题”的论文也在同年发表。第一个完整描述多个自由度系统的结果在第二年发表于《苏联数学通报》，与莫泽在《哥廷根科学院通报》上的论文发表于同一年。阿诺德的论文标题是“经典扰动理论与太阳系稳定性问题”，它明确地揭示出该论文在本书追溯的 3 个世纪的历史中的地位。从这方面来讲，阿诺德的另一段评论是具有讽刺意味的，“在我看来，从惠更斯和牛顿到黎曼和庞加莱的 200 年间只充满了计算的荒漠。”

进一步，在 1963 年《俄罗斯数学通览》上发表的扩展性论文的英文译本提供了证明的细节部分，也建立了阿诺德作为“KAM 理论”的

共同创立者的地位。读者会注意到我们没有谈及“KAM 定理”，因为它更像是一个理论的整体，其中包括许多不同的结果，柯尔莫哥洛夫、阿诺德和莫泽的结果是最早的。现在已经出现许多在技术上改进和推广的工作，而 KAM 理论始终是一个非常活跃的研究领域。

混沌扩散

1964 年，阿诺德发现一种现在以他的名字命名的令人着迷的现象：阿诺德扩散 (Arnold diffusion)，作为经典力学的第二个重大成就，它可能具有更加惊人和意想不到的物理意义。他的导师柯尔莫哥洛夫一直坚信在哈密顿系统中这种行为是不大可能发生的，直到阿诺德构造了第一个(某种程度上是人为的)例子。我们将会发现，阿诺德扩散是 KAM 理论中稳定性结果的补充。它蕴含了一种特别形式的混沌的出现，在稳定的拟周期轨道之间共存着高度不稳定的轨道，因而在阿诺德说明这种现象确实可以发生以前，柯尔莫哥洛夫表示怀疑，不愿意承认它的存在。

阿诺德扩散考虑最初位于共振环面和某些非共振环面上的轨道可能的混沌行为：在施加小扰动下这些环面被破坏了。在图 5.5 所示的例子中，这些环面处于小扰动下不被破坏的“稳定的”非共振环面之间，这样，起初在共振环面上的轨道不能从两个相邻的稳定环面围成的区域中逃出：它们仍然被陷于这两个环面之间。因此这个二自由度例子指出，所有的轨道都会表现某种稳定性。柯尔莫哥洛夫认为上述结论还应当适用于三个或更多个自由度的系统中的高维环面。阿诺德却不同意。

在描述阿诺德扩散以前，深入研究图 5.5 的二自由度情形是值得的。我们在常值能量流形上选取截面，通过得到的环域上的庞加莱

映射描述系统的动力行为。图 5.6 显示了扰动前可积系统的庞加莱映射的结构。如上所述，它只是一个简单的扭转，每个圆周都是不变的，上面的点依赖于所在圆周的半径，在映射的作用下旋转或大或小的角度。回顾 KAM 理论，它蕴含着在扰动后大多数具有无理数的频率比值的圆周虽然发生轻微的形变，却被保持为不变曲线。介于其间的有理圆周和一些无理圆周则被破坏了。

通常有理圆周破坏成离散的周期点集，其中一些是稳定的，另一些是鞍型的。后者的稳定流形和不稳定流形在一般情况下横截相交，从而得到的同宿点将确切地产生第 1 章和第 2 章所探讨的那种混沌。尽管如此，每个这样的周期点集和截交的稳定流形、不稳定流形、同宿栅栏以及混沌的轨道(chaotic orbits)，都被陷在幸存的相邻两个不变圆周之间，因此我们得到秩序(order)和混沌(chaos)共存的一类系统。图 5.7 中的共振带(resonant band)就试图表现这种结构。也许它就是庞加莱认为过于复杂而没有画出的图形，像其他许

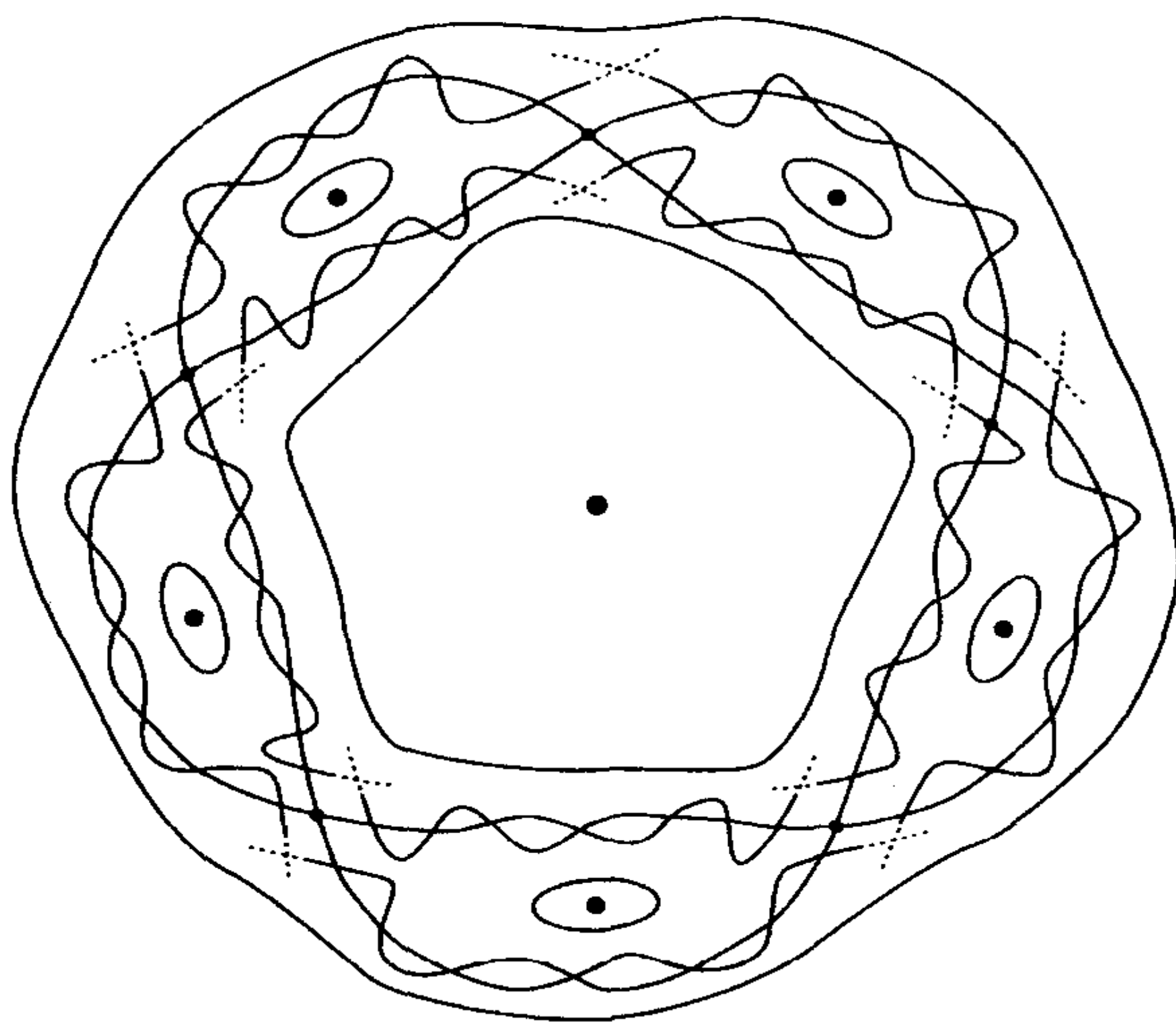


图 5.7 受扰环域映射中稳定性与混沌的共存。

多情况一样，他仍然是正确的。在草图中我们仅描绘了周期点的无穷序列的第一层，以及它们的稳定流形和不稳定流形，所有这些都包含在每对幸存不变圆周之间的同宿栅栏之中。而且我们已经知道，由圆周构成的无穷康托尔集在扰动后被保持下去。

因此，读者应当试着想像无穷多条这样的带子，它们对应着图 3.7 之类的康托尔集的间隙，将这些带子分开的不变圆周则是康托尔集中的点。如同我们在第 4 章末指出的那样，混沌运动与稳定运动本质地交织在一起。前者所以被称为混沌的 (chaotic)，乃因为它们在每条带子内不规则地盘绕，在不稳定鞍点附近停留或长或短的时间，但是就这些解无法从其出发的带子内逃出的意义上来看，它们又是有序的 (orderly)。从远处看，整个系统似乎是一种轻微的混沌。在这个基础上，现在我们能够描述越来越奇特、越来越严重的阿诺德扩散。

我们曾经指出，对于保守系统来说轨道上的总能量是一个常数，从而系统的解限制在比完整的相空间低一维的能量流形上。三自由度系统具有 3 个位置变量和 3 个动量变量，因此具有一族五维的能量流形。其中每个能量流形都包含三维环面，通常含有三个独立的频率。人们自然会问，这些环面能否像图 5.5 所示的三维情形中的二维环面那样，确切地给出能量流形上阻止解穿过的分界面。

由于无法在空间中画出三维以上的图形，我们采用低维图形进行类比。假设扰动前共振环面和非共振环面都是平面上的同心圆，并假设相空间是三维的，如图 5.8 所示。在扰动后，共振圆周和一些非共振圆周瓦解，而大多数非共振圆周发生轻微的形变但仍然是封闭曲线。这个例子与图 5.7 所示的例子的区别在于，此时“破坏轨道”不一定陷在封闭曲线之间，因为现在它们能够离开原来的平面在空间中自由运

动。而幸存的圆周是一维的，不能将三维空间中的不同区域分隔开来。

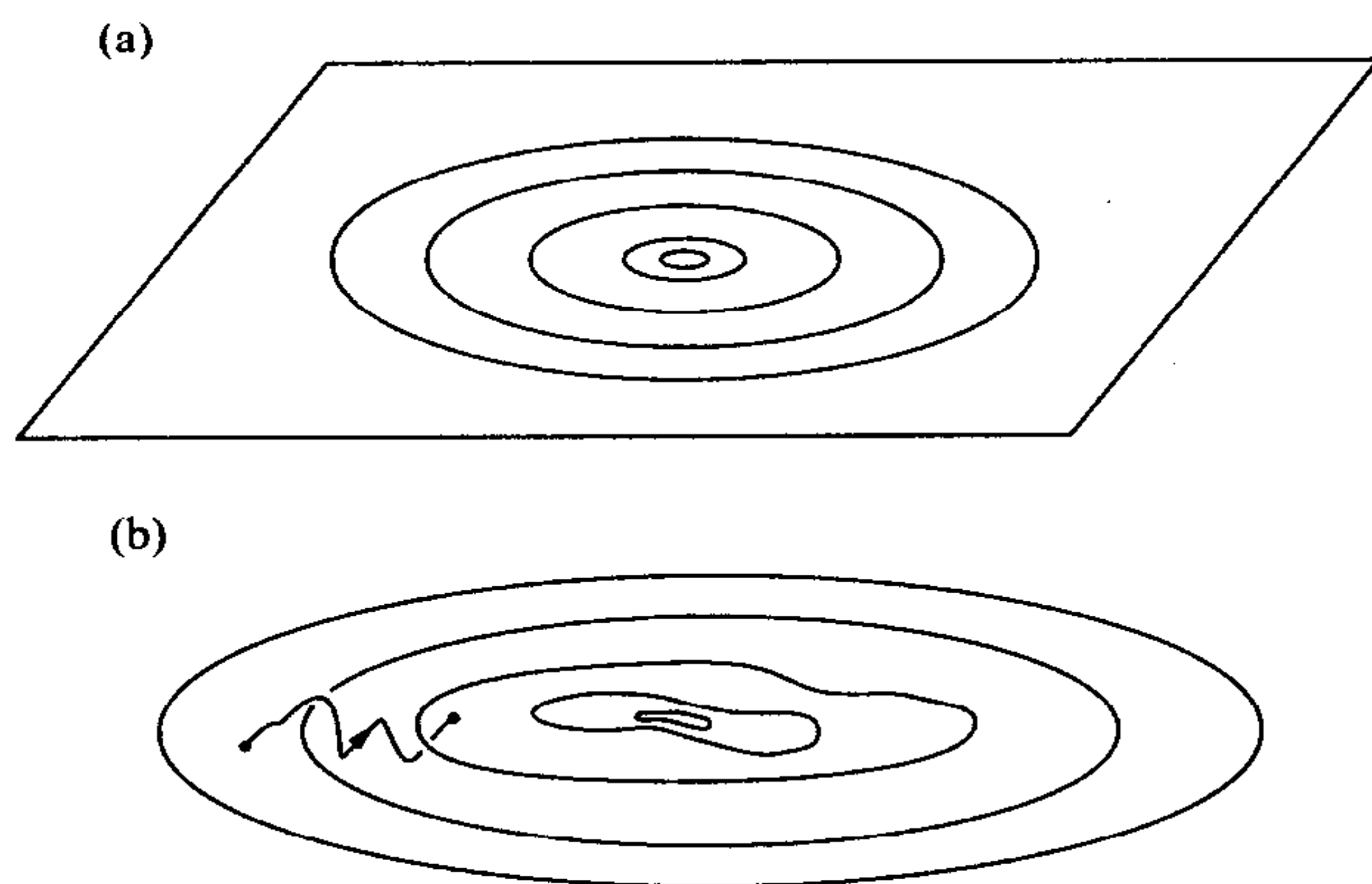


图 5.8 高维空间中描述环面动力行为的例子：(a)扰动前；(b)扰动后，一条轨道离开初始平面。

实际上，在第 1 章讲述的向奥斯卡国王奖提交的原始论文中，庞加莱已经认识到在多于两个自由度的系统中光滑不变曲面的存在性未必蕴含稳定性。无疑，这些高维相空间中存在足够大的“空隙”使轨道出其不意地穿过环面，就像我们从画在人行道上的圆圈里抬起脚一样。现在问题变成了：真实的微分方程的轨道能否利用相空间的空隙离开它们出发的区域，如果能够离开，它们逃离后具有什么动力行为呢？

阿诺德构造一个例子肯定地回答了上面第一个问题。他进一步证明逃离轨道(escaping orbits)的动力行为在某种意义上是“非常混沌的”，现在我们试着给出其清晰的描述。阿诺德的例子中含有三个自由度，考虑带有三维“胡须”的二维环面，他从下述意义上推广了图 5.5 的二自由度情形。在那种情形里，二维共振环面破坏后形成一维周期轨道(圆周)，它们表现为图 5.7 中具有稳定流形和不稳定流形的庞加莱映射的周期点。而在三自由度情形中，三维共振环面

部分地破坏形成二维环面。

正如微分方程或映射的鞍型平衡点的稳定流形和不稳定流形是由接近或远离平衡点的轨道组成的，拟周期轨道描述的环面的稳定流形和不稳定流形也是类似定义的，参见图1.6、图1.9和图5.7。可能存在趋于环面的轨道，如图5.9所描绘的那样，它们在无限长的时间以后才能到达环面。所有具有这种性质的轨道构成一个(超)曲面，如果相应的条件得到满足，就是光滑稳定流形。类似地，离开环面的轨道属于它的不稳定流形。在阿诺德的例子中，环面是二维的，而它的稳定流形和不稳定流形或者胡须(whiskers)——阿诺德给出的更有启发性的名字——分别是三维的。图5.9不十分准确，由于我们不能真正地在同一个三维空间中同时描绘稳定胡须和不稳定胡须。需要更高维的相空间才能完整描述这一切。

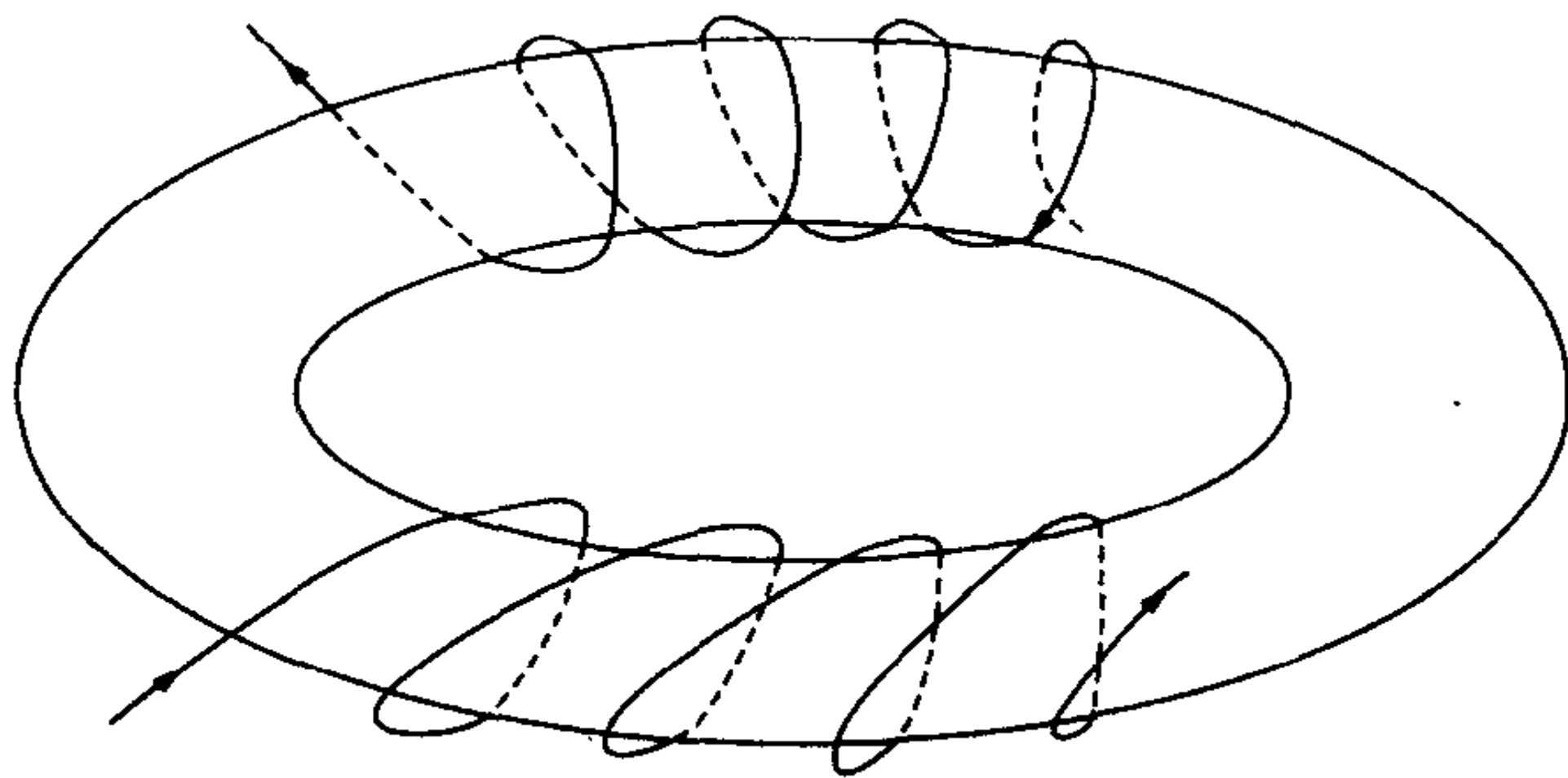


图 5.9 环面的稳定流形中的一条轨道和环面的不稳定流形中的一条轨道。

环面的稳定流形和不稳定流形的维数，可以因环面而异。观察图5.9的下方，可以想像趋于环面的其他轨道填满了整个三维邻域。事实上， n 个自由度的系统中 k 维不变环面的稳定流形和不稳定流形，可以具有不超过 $n - k$ 的任意维数。稳定流形和不稳定流形沿着某条轨道相交，而这种相交可能是横截的，如图5.10，每个

流形都被描绘成一个曲面。“横截”的含义与第1章中的定义相同，即两个曲面沿一条公共轨道不相切地彼此穿过对方。利用类似于第1章和第2章所采用的推理，我们能够得出这样的结论：不变环面的稳定流形和不稳定流形的横截相交，将导致与不动点的同宿轨道所导出的相类似的混沌行为。

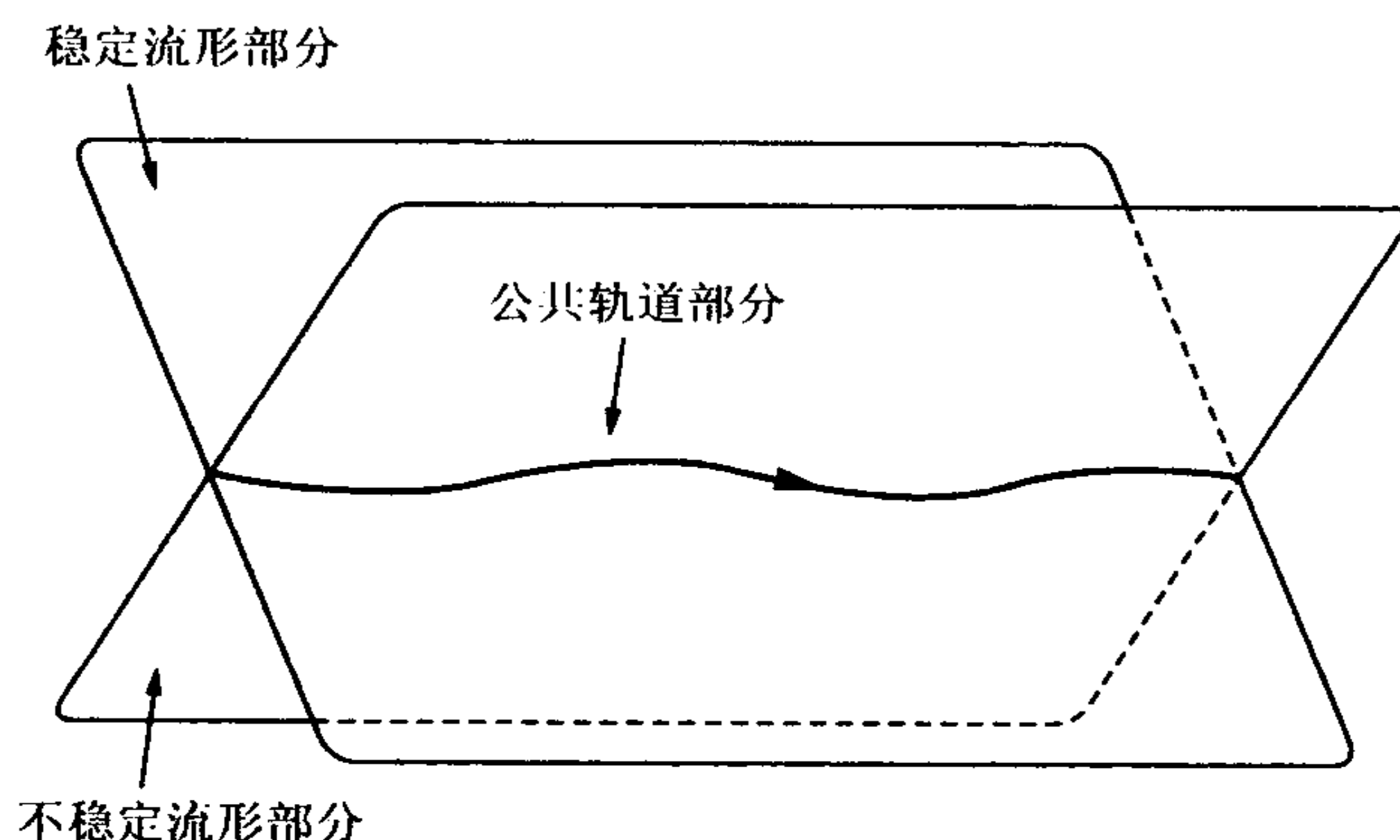


图 5.10 环面的稳定流形和不稳定流形沿着一条公共轨道横截相交。

阿诺德扩散中的动力行为有更丰富的内容。当有限个不同环面的稳定胡须和不稳定胡须多次发生横截相交现象时，人们能够找到从一个环面或多或少“随机地”跳到另一个环面的轨道。阿诺德称之为转移链(transition chain)。为了描述它，我们用点表示环面，用曲线表示环面的稳定流形和不稳定流形。（当然，环面和流形的维数可以非常大。）

在图 5.11 中，我们指出横截相交是如何导致阿诺德扩散的。图中显示出环面 T_1 ， T_2 和 T_3 的稳定流形和不稳定流形彼此相交。一条从 T_1 附近出发的轨道能够沿着异宿轨道到达 T_2 附近，在这里它转而沿着 T_2 的不稳定流形到达 T_3 附近。这样不确定地继续下去。如图 5.12，在映射的迭代作用下整个图形被“充满”了，这显

示出系统具有复杂的混沌行为。每次遇到环面时，混沌轨道可能沿着转移链到达下一个环面，或者重新回到先前的环面。然而，与图 1.12 至图 1.14 中摆的三维相空间的忠实表示及其庞加莱映射相比，图 5.11 和图 5.12 只是一个简图。阿诺德扩散至少需要 3 个自由度：5 维能量流形连同 4 维庞加莱映射。

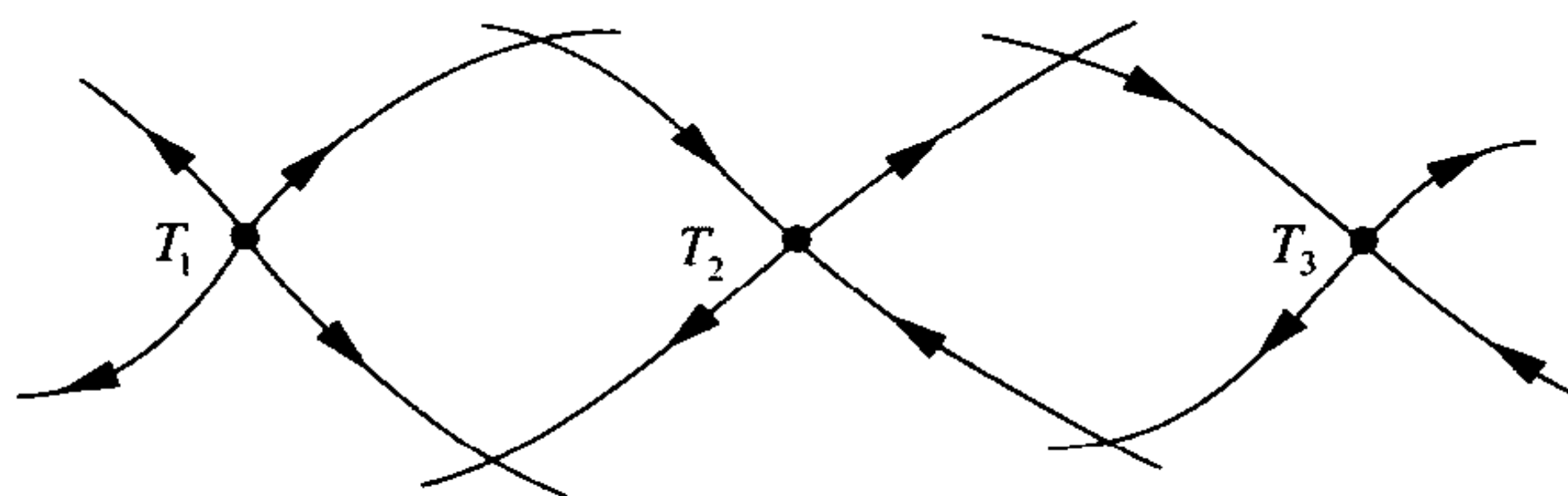


图 5.11 有限个环面的稳定流形和不稳定流形的横截相交导致阿诺德扩散。

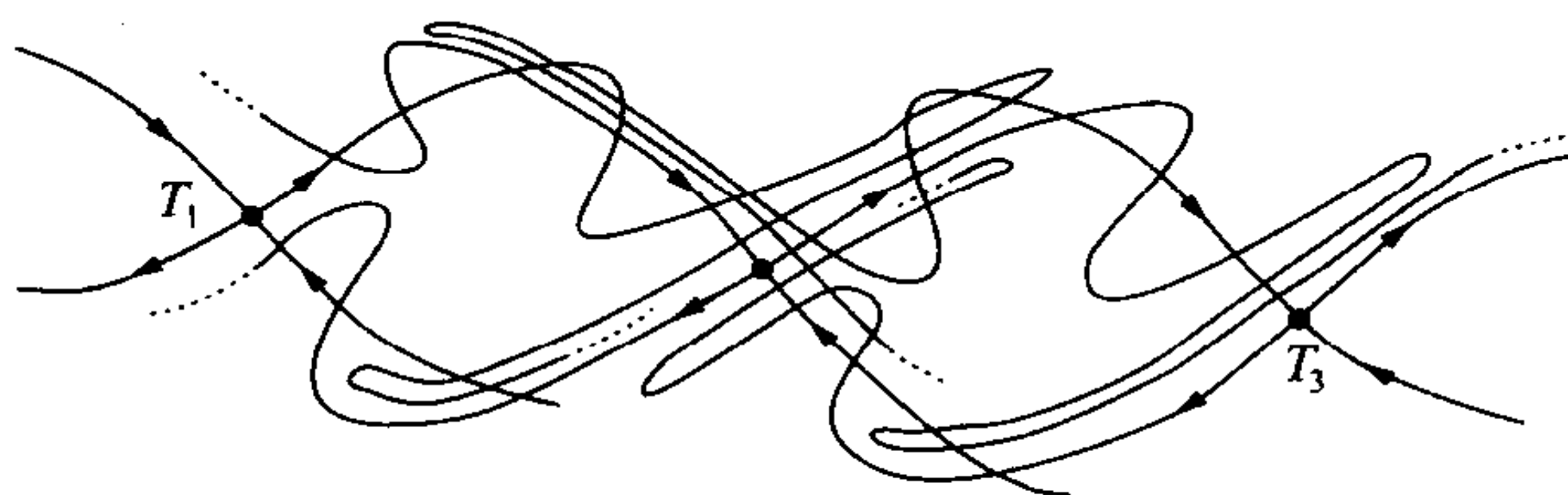


图 5.12 阿诺德扩散现象产生的混沌的进一步逼近。

1964 年阿诺德构造的例子是人为的，这指的是他构造的表明扩散存在的微分方程没有明显的物理意义。然而在同一篇论文脚注中，阿诺德猜测这种混沌也会发生在三体问题中。遗憾的是，证明这样复杂的动力行为确实发生在物理系统的某个特定模型中是非常困难的。最近 30 年中人们取得一些进展，但只是针对相当特殊的情形。例如现在据认为某类耦合振子(coupled oscillators)的力学系统就呈现扩散现象。这里扩散意味着能量可以貌似随机地往返于振子之间(从一种模式到另一种模式)。尽管人们相信阿诺德扩散是不可积哈密顿系统的通有性质，但是没有人能够得到确切的结果。另外

大多数证据都表明，需要非常大的时间尺度才能发生阿诺德扩散。因此这是一种微妙的现象，很难在物理系统中识别和测量。

然而，夏志宏，曾经解决潘勒韦猜想的同一个人，最近声称三体问题中存在阿诺德扩散。他分几步导出了他的结果，首先处理限制性三体问题中的一种特殊情形，然后将他的想法推广到一般情形。随后，* 罗马大学的基耶尔基亚(Luigi Chierchia)和加拉沃蒂(Giovanni Gallavotti)宣布阿诺德扩散还存在于围绕恒星运转的轻微不对称的扁球形行星的自转模型中——达朗贝尔最早研究过的一个问题。他们那篇 144 页的论文可以看作是经典扰动理论和硬分析(hard analysis)的一个胜利，为此他们获得 1995 年昂利·庞加莱研究所和戈捷—维拉尔出版社(庞加莱书籍的出版者)的嘉奖。**

一些证据表明，阿诺德扩散与太阳系天文学中另一个经典问题有关。1857 年，一位美国的数学和天文学教师柯克伍德(Daniel Kirkwood)观测到在木星和火星之间的小行星带中存在一些空隙。从这方面来看，小行星带的结构类似于土星的光环，尽管在后一种情形中质点非常小并且相互靠得更近。从那时起，天文学家和天体力学家投入大量的精力试图理解这些空隙是如何形成的，以及它们是长

* 作者于 2001 年 10 月用电子函件告知中文版出版者，将原文于此的一句话“这显示了这位年轻的中国数学家在一个将近三十年未解决的问题上取得的又一显著成就。”换成“随后，”。——编者

** 作者希望在中文版此处添上如下一段话：“但是阿诺德扩散是一个非常困难而深奥的研究课题，其中超出了正规扰动方法研究范畴的‘指数小项的问题’一直困扰着人们。本书第一版问世以后，研究该问题的法国数学家洛查克(Pierre Lochak)对这些结果产生了疑问。(事实上，尽管数学家和物理学家就阿诺德扩散问题发表了许多论文，洛查克仍然认为自阿诺德 1964 年的工作以来该问题并无实质性的进展。)经过一系列电子函件的讨论以后，1997 年他终于说服了持扩散意见的研究者，直至 2001 年此问题仍然没有解决。加拉沃蒂承认在他和基耶尔基亚发表的证明中存在错误，并且他已经修正了其中的一部分。夏志宏最近宣布了关于转移链长度(轨道在相空间中游荡的距离)的一个强结果，如果所有的细节都得到验证，这一结果将进一步证实他早先的声称，但是这篇论文至今尚未发表。庞加莱发现他的错误(同时也意识到指数小的项将会成为巨大的障碍)的 111 年以后，即使对于极富经验的研究者来说，动力系统的前景仍然是不可预测的。”——编者

期的或者仅仅是短期的特征。从本章前面讨论的小除数问题导出的所谓共振现象(resonance phenomenon)解释了一部分空隙的存在性：当与太阳的距离和频率完全匹配时就会产生强大的摄动力(perturbing force)，可以将在此区域中运动的质点排斥出去。令人遗憾的是没有针对所有柯克伍德空隙(Kirkwood gaps)的一般解释，大多数现有结果都基于数值模拟而不是严格的数学证明。感兴趣的读者，可以从本书参考文献中引用的彼得森的书了解更多的内容。

夏志宏最近有关三体问题的定理，使那些猜测阿诺德扩散可以解释柯克伍德空隙的人看到希望。包括木星、太阳和一个小行星在内的三体问题，可能揭示出在一定的初值条件下小行星是如何离开它最初所在的小行星带的。这样的解释与早期的结果相一致。遗憾的是，这一任务并非如此简单。夏志宏的定性结果不直接适用于木星和太阳的特定的定量问题。实际上，在将他的证明应用于太阳系时，表明了最初在木星以外区域中运动的质点可能发生阿诺德扩散。当然，这并不意味着阿诺德扩散不会发生在木星轨道以内：它只是意味着夏氏证明不能直接应用于小行星带。

尾声

自牛顿出版《数学原理》一书至今 300 多年，天体力学领域仍然十分繁荣。阅读了本书的读者对此不再会感到奇怪，只是这样一个数学问题——描述 n 体引力问题的微分方程的解——竟然令数学史上许多著名的人物冥思苦想，或许它还会继续吸引和困扰我们。我们已经懂得，求解动力学方程不只是一个问题，而是一系列问题。或许这些问题本身，远不及由它们引出的所有未曾预料的副产品对数学和整个科学产生的如此巨大的影响。好的数学(good mathematics)像

所有好的科学(good science)一样,主要关注于建立表面上完全不同的各种资料和各个知识领域之间的联系,我们不止一次看到在天体力学的数学理论中这种情况是如何发生的。

从本质上讲,庞加莱钻研同宿轨道的问题时在(修改的)获奖论文中创立了动力系统理论,今天它已经发展成为非线性动力学(nonlinear dynamics)——一个应用微分方程并触及几乎所有的工程和科学学科领域——中一个庞大的、无组织的,但是充满生机的课题。它综合了严谨的结果和像符号动力学这样的工具、计算方法和几何方法,以及许多不太严格思想和猜想。化学家试图理解在催化剂表面上形成的模式,工程师研究有轨机车的不稳定性,生物学家和医生治疗心脏病,物理学家观察晶体的生长,飞机设计师关心的是湍流,还有气象学家以及构造气候模型的人,所有这些人都在应用源自“简单的” n 体问题中的洞见。在参考文献中列出的格拉斯(Leon Glass)和麦基(Michael Mackey)、格莱克(James Gleick)、洛伦茨、吕埃勒(David Ruelle)以及斯图尔特等人所写的书*,将向读者阐述更多的相关事例。

但是动力系统理论对数学本身可能产生了同等重要的影响。我们曾经指出庞加莱还是拓扑学的创立者,与分析和代数一样,拓扑学是数学的中心支柱之一。这不是什么巧合。人们可以将拓扑学表述为与(拓扑)空间 X 和 Y 中的元素相联系的连续映射的研究,比如 $f: X \rightarrow Y$ 。当两个空间相同时,我们重复 f 的作用,即迭代原有的映射,就得到一个动力系统。第2章讲述的马蹄映射的发明者斯梅尔,

* 中文版分别为:《从摆钟到混沌——生命的节律》,潘涛等译,上海远东出版社,1994年;《混沌——开创新科学》,张淑誉译,上海译文出版社,1990年;《混沌的本质》,刘式达等译,气象出版社,1997年;《机遇与混沌》,刘式达等译,上海科技教育出版社,2001年;《上帝掷骰子吗?——混沌之数学》,潘涛译,上海远东出版社,1995年。——译者

在拓扑学中做出了与动力系统领域同样重要的贡献，他的许多思想都依赖于动力学观点的应用。最近他对计算(computation)以及可计算性(computability)和复杂性(complexity)等课题产生了兴趣，这里动力学观点再次证明了它的实用性。毕竟大多数科学计算在求解时都涉及反复循环直至收敛的过程。计算机中心甚至称在他们的机器上出售“循环”。1990年为庆祝斯梅尔六十寿辰在伯克利举行一次会议，该会议出版了名为《从拓扑到计算》的论文集，会上一些人谈起动力学是斯梅尔工作中的一条主线。斯梅尔的兴趣在广度和深度上都非同寻常，但是其他许多数学家已经发现动力系统理论使他们的研究课题更加趋于统一。

在急于继续阐述新的应用和洞见时，我们不要忘记自己的出发点。当我们为突然迸发的思想和非线性动力学的蓬勃发展而庆幸时，必须记住它的起源，因为在这里可以找到其发展的动力和局限性。在投入非线性研究或者在感兴趣的问题中寻找混沌之前，我们应该思考这样的事实：为了有效地应用具有纯粹的物理背景的思想和性质，比如稳定性乃至混沌本身，就需要它们有精确的数学定义。如果我们对于稳定性概念没有一致的认识，那么称飞机是稳定的就毫无价值；如果我们证明飞机的数学模型具有能够耐受突然扰动的解，那么这个说法就会更加令人信服。

动力学领域中大部分严格的数学基础，都源于我们这里描述的人物及其工作。我们希望，本书能够从某些方面揭示和解释这些重要的根源。

注 释：

5.0 本章的题记选自[Bi, 1920]。

5.1 简化与求解：1954年柯尔莫哥洛夫在阿姆斯特丹国际数学家大会上的报告最初

用俄语发表(标题为法语)[K, 1957]。演讲的英译本见[K, 1991a]。柯尔莫哥洛夫的简短生平, 参见季霍米罗夫(V. M. Tikhomirov)和亚历山德罗夫(P. S. Alexandrov)所写的[T, 1991~1992]。阿诺德在[Ar, 1989b]中发布了柯尔莫哥洛夫的讣告。1993年兹德拉夫科夫斯卡(Smilka Zdravkovska)向FD提供了阿诺德为美国数学会写的一篇有趣的文章“关于A·N·柯尔莫哥洛夫”, 见[Z & D, 1994]。本章的一些资料取自这篇文章, 另外一些来源于阿诺德应FD的要求提供的手稿。博尔赫斯的故事“法尼斯的记忆力”选自[Bo, 1964], 其中第二个故事“巴拜尔的图书馆”则揭示了无穷大与随机性的概念。

5.2 拟周期运动: 关于KAM理论和小除数问题有一些参考文献, 但是(还)没有单独探讨这一主题的专著。我们向感兴趣的(精通数学的)读者推荐[Ar, 1983, 1989a]和[Ga, 1983]。

5.3 扰动环面: 参见5.2。

5.4 信件、失去的解答和政治: 本节选用了[Be, 1937]和[Bo, 1992]中的资料, 魏尔斯特拉斯和科瓦列夫斯卡娅的主要生平, 分别参见[Cal, 1982]、[EB, 1986]、戈罗夫为[Po, 1993]作的序以及5.1中提及的文献。从有关奥斯卡国王奖的信件中摘录的一段, 参见[B-G, 1994](参考1.7)。克雷洛夫和博戈柳波夫的论文是[K & B, 1937]。1995年1月西奈在普林斯顿与PH的讨论中提供了有关柯尔莫哥洛夫及其讨论班的一些信息。李森科(1898~1976)*通过欺骗性的遗传学理论在苏联科学界爬到了显要位置, 他的理论鼓吹通过杂交可以获得高产。他成了学阀, 后来在30年代担任位于奥德萨的全苏选择与遗传研究所所长, 随后在科学院和全苏农业科学院担任要职。关于孟德尔遗传规律的争论性的论文, 参见[K, 1940]、[Ly, 1940]和[Ko, 1940]。

5.5 关于证明的忧虑: 本节以FD和莫泽在1993年7月奥勃瓦尔法赫会议上的多次谈话(同1.4)、文献[Ze, 1993]和1995年5月与莫泽来往的电子函件为基础。莫泽为柯尔莫哥洛夫的论文所作的评论, 见[Mos, 1959]。西格尔和莫泽合写的英文版书籍是[S & M, 1971]。莫泽的论文[Mos, 1962]中包含扭转定理。有关莫泽见到柯尔莫哥洛夫和阿诺德以及访问莫斯科的细节资料, 来源于5.4提到的与西奈的谈话。

5.6 扭转映射: 参见[Mos, 1962, 1973]和[Ar, 1989a]。

5.7 一个有天赋的学生: 本节以[Z, 1987]为基础, 其中引用了阿诺德的评述, 关于KAM理论的文献在5.2中已经提及。1985~1993年, 格拉斯在蒙特利尔几次向PH讲述阿诺德在数学生物学(mathematical biology)方面的工作(参见[G & M, 1988])。一些细节来自5.1提到的阿诺德的手稿以及5.4提到的PH和西奈的讨论。阿诺德公布和证明“解析”KAM定理, 参见[Ar, 1962, 1963a, 1963b]。

5.8 混沌扩散: 参考5.7的文献来源。[Ar, 1964]是有关扩散的第一篇论文。关于在略微广泛的一类哈密顿系统中存在扩散的西方早期文献, 是[H & M, 1983a, 1983b]。夏志宏证明三体问题中存在阿诺德扩散的论文, 见[X, 1992, 1993]; 基耶尔基亚和加拉沃蒂有关扁球形行星自转的工作, 见[C & G, 1994]。[B & D, 1993]给出了本节主题的介绍性的评述和太阳系中阿诺德扩散与混沌的天文学含义以及柯克伍德空隙讨论。**

5.9 尾声: 格拉斯和麦基、格莱克、洛伦茨、吕埃勒和斯图尔特的书籍, 见[G & M, 1988]、[Gl, 1987]、[Lo, 1993]、[Ru, 1991]和[St, 1989]。[HM & S, 1993]包括了庆祝斯梅尔六十寿辰的会议论文, 还包括斯梅尔工作的综述, 进一步的细节参见[Sm, 1991]。

* 原著误作(1898~1976), 已订正。——编者

** 作者要求中文版在本注释最后一句之前做如下补充: 在这些论文及其他追随阿诺德的论文中某些结果的完备性和正确性, 受到[Loc, 1998]的质疑。特别是, [H & M, 1983a]在第3节的“一阶”扩散中有一个漏洞: 一个类似的论据随后用于[X, 1993], [X, 1994], [C & G, 1994]的“大角度”定理是不正确的。FD和PH参与了1997年洛查克(Lochak)、加拉沃蒂、夏志宏及其他人之间额外的评论。——编者

参 考 文 献

- [Al, 1995] Albouy, A. Symétrie des configurations centrales de quatre corps. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Série I*, **320** (1995), 217~220.
- [A, 1968a] Alekseev, V. M. Quasirandom dynamical systems. I. Quasirandom diffeomorphisms. *Mathematics USSR Sbornik* **5**, 1 (1968), 73~128.
- [A, 1968b] Alekseev, V. M. Quasirandom dynamical systems. II. One-dimensional nonlinear oscillations in a field with periodic perturbation. *Mathematics USSR Sbornik* **6**, 4 (1968), 505~560.
- [A, 1969] Alekseev, V. M. Quasirandom dynamical systems. III. Quasirandom oscillations of one-dimensional oscillators. *Mathematics USSR Sbornik* **7**, 1 (1969), 1~43.
- [And, 1994] Andersson, K. G. Poincaré's discovery of homoclinic points. *Archive for History of Exact Sciences* **48** (1994), 133~147.
- [A & P, 1937] Andronov, A. A., and Pontryagin, L. Systèmes grossiers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **14** (1937), 247~251.
- [Ar, 1962] Arnold, V. I. The classical theory of perturbations and the problem of stability of planetary systems. *Soviet Mathematics Doklady* **3** (1962), 1008~1012.
- [Ar, 1963a] Arnold, V. I. Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasiperiodic motions under small perturbations of the Hamiltonian. *Russian Mathematical Surveys* **18** (5) (1963), 9~36.
- [Ar, 1963b] Arnold, V. I. Small divisor problems in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys* **18** (6) (1963), 85~192.
- [Ar, 1964] Arnold, V. I. Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. *Soviet Mathematics Doklady* **5** (1964), 342~355.
- [Ar, 1973] Arnold, V. I. *Ordinary Differential Equations*. The MIT Press, Cambridge, Mass., 1973.
- [Ar, 1983] Arnold, V. I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.
- [Ar, 1988] Arnold, V. I., ed. *Dynamical Systems III*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1988.

- [Ar, 1989a] Arnold, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1989.
- [Ar, 1989b] Arnold, V. I. A. N. Kolmogorov. *Physics Today*, October 1989, 148~149.
- [B & D, 1993] Bakker, L. F., and Diacu, F. N. On the existence of celestial bodies with unpredictable motion in the solar system and on the Kirkwood gaps. *Romanian Astronomical Journal* 3, 2 (1993), 139~155.
- [Bâ, 1972] Băldescu, E., *Spiru Haret în știință, filozofie, politică, pedagogie, învățământ*, Editura didactică și pedagogică, București. 1972.
- [Ba & D, 1993] Ballinger, G., and Diacu, F. N. Collision and near collision orbits in post-Newtonian gravitational systems. *Romanian Astronomical Journal* 3, 1 (1993), 51~59.
- [B et al., 1992] Banks, J.; Brooks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; and Stacey, P. On Devaney's definition of chaos. *American Mathematical Monthly*, April 1992, 332.
- [B, 1992] Barret, J. F. Bibliography of A. M. Lyapunov's work. *International Journal of Control* 55, 3 (1992), 785~790.
- [B-G, 1994] Barrow-Green, J. Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem. *Archive for History of Exact Sciences* 48 (1994), 107~131.
- [B-G, 1997] Barrow-Green, J. Poincaré and the Three Body Problem. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1997.
- [Be, 1937] Bell, E. T. *Men of Mathematics*. Simon and Schuster, New York, 1937.
- [Ber, 1978] Berry, M. V. Regular and irregular motion. In *Topics in Nonlinear Dynamics*, pp. 16~120. AIP Conference Proceedings 46, ed. Sebe Jorna. American Institute of Physics, New York, 1978.
- [Bi, 1913] Birkhoff, G. D. Proof of Poincaré's geometric theorem. *Transactions of the American Mathematical Society* 14 (1913), 14~22.
- [Bi, 1920] Birkhoff, G. D. Recent advances in dynamics. *Science (New Series)* 51 (1920), 51~55.
- [Bi, 1927] Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1927. (Reprinted with an introduction by J. Moser and a preface by M. Morse, 1966.)
- [Bi, 1935] Birkhoff, G. D. Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques. *Mémoires Pont. Acad. Sci. Novi Lyncei* 1 (1935), 85~216.
- [Bi, 1968] Birkhoff, G. D. *Collected Mathematical Papers*. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1950. (Reprinted by Dover, New York, 1968.)
- [Bö, 1992] Bölling R. . . . Deine Sonia: A reading from a burned letter. *The Mathematical Intelligencer* 14, 3 (1992), 24~30.
- [Bo, 1964] Borges, J. L. *Labyrinths: Selected Stories and Other Writings*. New Directions, New York, 1964.
- [Br, 1994] Bressoud, D. M. Review of "The Search for E. T. Bell, also known as John Taine," by Constance Reid. *The Mathematical Intelligencer* 16, 3 (1994), 72~74.
- [Bro, 1979] Broucke, R. On the isosceles triangle configuration in the planar general three-body problem. *Astronomy and Astrophysics* 73 (1979), 303~313.
- [Bru, 1887] Bruns, H. Über die Integrale des Vielkörper-Problems. *Acta Mathematica* 11 (1887), 25~96.
- [Bch, 1904] Buchholz, H. Poincarés Preisarbeit von 1889/90 und Gylde's Forschung über das Problem der drei Körper in ihren Ergebnissen für die Astronomie. *Physikalische Zeitschrift* 7, 5 (1904), 180~186.
- [Bu, 1990] Buck, G. On clustering in central configurations. *Proceedings of the American Mathematical Society* 108, 3 (1990), 801~810.
- [Bu, 1991] Buck, G. The collinear central configuration of n equal masses. *Celestial Mechanics* 51 (1991), 305~317.

- [Cab, 1988] Cabral, H. The masses in an isosceles solution of the three-body problem. *Celestial Mechanics* 41 (1988), 175~177.
- [Cal, 1982] Calinger, R., ed. *Classics of Mathematics*. Moore Publishing Company, Oak Park, Ill., 1982.
- [C & L, 1945] Cartwright, M. L., and Littlewood, J. E. On nonlinear differential equations of the second order, I; The equation: $\ddot{y} + k(1 - y^2) + \dot{y} + y = b \lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large. *J. London Math. Soc.* 20 (1945), 180~189.
- [Ca, 1972] Cartwright, M. L. The early history of the theory of dynamical systems and its relationship to the theory of nonlinear oscillations. In *Proceedings of the Colloquium on Smooth Dynamical Systems*, I.1~I.13. Department of Mathematics, University of Southampton, U.K., 18~22 September 1972.
- [CLN, 1994] Casasayas, J.; Llibre, J.; and Nunes, A. Central configurations of the planar $1 + N$ body problem. *Celestial Mechanics* 60 (1994), 273~288.
- [Ch, 1920] Chazy, J. Sur les singularités impossible du problème des n corps. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris* 170 (1920), 575~577.
- [C & G, 1994] Chierchia, L., and Gallavotti, G. Drift and diffusion in phase space. *Annales de l'Institut Poincaré B*, 60 (1994), 1~144.
- [Co, 1990] *Collier's Encyclopedia*. Macmillan, New York, 1990.
- [D, 1914] Darboux, G. Éloge historique d'Henri Poincaré. *Mem. Acad. Sci. Inst. Fr.* 52, 74 (1914).
- [Da, 1900] Darwin, G. President's address. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 60 (1900), 412.
- [D & H, 1981] Davis, P. J., and Hersh, R. *The Mathematical Experience*. Birkhäuser, Boston, 1981.
- [De, 1980] Devaney, R. Triple collision in the planar isosceles three-body problem. *Inventiones Mathematicae* 60 (1980), 249~267.
- [De, 1982] Devaney, R. Motion near total collapse in the planar isosceles three-body problem. *Celestial Mechanics* 28 (1982), 25~36.
- [De, 1986] Devaney, R. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Benjamin Cummings, Menlo Park, Calif., 1986.
- [Di, 1992a] Diacu, F. N. Regularization of partial collisions in the N -body problem. *Differential and Integral Equations* 5 (1992), 103~136.
- [Di, 1992b] Diacu, F. N. *Singularities of the N-Body Problem*. Les Publications CRM, Montreal, 1992.
- [Di, 1993a] Diacu, F. N. The planar isosceles problem for Maneff's gravitational law. *Journal of Mathematical Physics* 34, 12 (1993), 5671~5690.
- [Di, 1993b] Diacu, F. N. Painlevé's conjecture. *The Mathematical Intelligencer* 15, 2 (1993), 6~12.
- [Di, 1996a] Diacu, F. N. On the Mückel-Treder gravitational law. In *Proceedings of the International Conference on Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics*, ed. E. A. Lacomba and J. Llibre. Cocoyoc, Mexico, 1994 pp. 127~139, World Scientific, Singapore, 1996.
- [Di, 1996b] Diacu, F. N. Near-collision dynamics for particle systems with quasihomogeneous potential laws. *Journal of Differential Equations* 128, 1 (1996), 58~77.
- [Din, 1970] Dinu, C., *Spiru Haret*, Editura didactică și pedagogică, București, 1970.
- [Dy, 1995] Dyson, F. The scientist as rebel. *New York Review of Books* 42, 9 (May 25, 1995), 31~33.
- [Dz, 1900] Dziobek, O. Ueber einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems. *Astronomische Nachrichten* 152 (1900), 34~46.
- [E, 1971] Easton, R. Regularization of vector fields by surgery. *Journal of Differential*

- Equations* 10 (1971), 92~99.
- [Ek, 1988] Ekeland, I. *Mathematics and the Unexpected*. University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [El, 1990] Elbiały, M. S. Collision singularities in celestial mechanics. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 21 (1990), 1563~1593.
- [EB, 1986] *Encyclopaedia Britannica*. 15th ed. Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 1986.
- [Eu, 1767] Euler, L. De moto rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium. *Novo Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop.* 11 (1767), 144~151.
- [F, 1972] Fang, J. *Mathematicians from Antiquity to Today*. Paideia Press, Haupauge, N. Y., 1972.
- [Ga, 1983] Gallavotti, G. *The Elements of Mechanics*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983.
- [Ge, 1984] Gerver, J. A possible model for a singularity without collisions in the five-body problem. *Journal of Differential Equations* 52 (1984), 76~90.
- [Ge, 1991] Gerver, J. The existence of pseudocollisions in the plane. *Journal of Differential Equations* 89 (1991), 1~68.
- [G & M, 1988] Glass, L., and Mackey, M. C. *From Clocks to Chaos*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1988.
- [Gl, 1987] Gleick, J. *Chaos—Making a New Science*. Penguin Books, New York, 1987.
- [Gr, 1959] Grobman, D. M. Homeomorphisms of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 128 (1959), 880~881.
- [Gr, 1962] Grobman, D. M. Topological classification of the neighborhood of a singular point in n -dimensional phase space. *Mat. Sbornik (New Series)* 56 (98) (1962), 77~94.
- [G & H, 1983] Guckenheimer, J., and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1983. (Fourth corrected printing, 1994.)
- [Gy, 1887] Gylden, H. Untersuchungen über die Convergenz der Reihen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden. *Acta Mathematica* 9 (1887), 185~294.
- [H, 1975] Hagihara, Y. *Celestial Mechanics*. Vol. 2. part 1. The MIT Press, Cambridge, Mass., 1975.
- [Har, 1910] Haretu, S. *Mécanique sociale*. Gauthier-Villars, Paris, 1910.
- [Ha, 1960] Hartman, P. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society* 11 (1960), 610~620.
- [Ha, 1963] Hartman, P. On the linearization of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society* 14 (1963), 568~573.
- [Hay, 1990] Hayles, K. *Chaos Bound: Orderly Disorder in Contemporary Literature and Science*. Cornell University Press, Ithaca, N. Y., 1990.
- [Hi, 1984] Hirsch, M. W. The dynamical systems approach to differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society* 11 (1984), 451~514.
- [HM & S, 1993] Hirsch, M. W.; Marsden, J. E.; and Shub, M., eds. *From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1993.
- [H & S, 1974] Hirsch, M. W., and Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- [Ho, 1990] Holmes, P. Poincaré, celestial mechanics, dynamical systems theory and chaos. *Physics Reports* 193, 3 (1990), 137~163.
- [H & M, 1983a] Holmes, P., and Marsden, J. E. Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems. *J. Math. Phys.* 23

(1983), 669 ~ 675.

- [H & M, 1983b] Holmes, P., and Marsden, J. E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups. *Indiana U. Math. J.* 32 (1983), 273 ~ 310.
- [Hop, 1942] Hopf, E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential-Systems. *Berichte Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* 94 (1942), 1 ~ 22, and *Berichte Math.-Nat. Kl. Vreh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig* 95, 1 (1942), 3 ~ 22.
- [H & Y, 1993] Hunt, B. R., and Yorke, J. A. Maxwell on Chaos. *Nonlinear Science Today* 3, 1 (1993), 1, 3 ~ 4.
- [Koe, 1986] Koetsier, T. Joseph Louis Lagrange (1786 ~ 1813), his life, his work and his personality. *Nieuw Archief voor Wiskunde* 3, 4 (1986), 191 ~ 206.
- [Ko, 1940] Kolman, E. Is it possible to prove or disprove Mendelism by mathematical and statistical methods? *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 28, 9 (1940), 834 ~ 838 (in Russian; English translation published in *Comptes Rendus [Doklady] de l'Academie des Sciences de l'URSS*).
- [K, 1940] Kolmogorov, A. N. On a new confirmation of Mendel's laws. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 27, 1 (1940), 38 ~ 42 (in Russian), English translation in *Comptes Rendus [Doklady] de l'Academie des Sciences de l'URSS*. Reprinted in *Selected Works of A. N. Kolmogorov*, vol. 2, pp. 222 ~ 227, ed. V. M. Tikhomirov. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1991.
- [K, 1957] Kolmogorov, A. N. Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Amsterdam, 1954, vol. 1, pp. 315 ~ 333. Erveb P. Noordhoff N. V., Groningen; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1957.
- [K, 1991a] Kolmogorov, A. N. The general theory of dynamical systems and classical mechanics. In *Selected Works of A. N. Kolmogorov*, vol. 1, pp. 355 ~ 374, ed. V. M. Tikhomirov. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1991.
- [K, 1991b] Kolmogorov, A. N. On the preservation of conditionally periodic motions under small variations of the Hamilton function. In *Selected Works of A. N. Kolmogorov*, vol. 1, pp. 349 ~ 354. ed. V. M. Tikhomirov. Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 1991.
- [K & B, 1937] Kryloff, N., and Bogolyuboff, N. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. *Annals of Mathematics* 38, 1 (1937), 65 ~ 113.
- [L, 1873] Lagrange, J. L. *Oeuvres*. Vol. 6, pp. 272 ~ 292. Paris, 1873.
- [Lag, 1788] Lagrange, J. L. *Mécanique analytique*. 2 vols. Desaint. Paris, 1788. (Reprinted by Librairie Albert Blanchard, Paris, 1873, and as vols. 11 and 12 of [Lag, 1867 ~ 1892].)
- [Lag, 1867 ~ 1892] Lagrange, J. L. *Oeuvres*. 14 vols. Ed. J. A. Serret and G. Darboux. Paris, 1867 ~ 1892.
- [Lap, 1799 ~ 1825] Laplace, P. S. *Traité de mécanique céleste*. 5 vols. Paris, 1799 ~ 1825. (Reprinted as vols. 1 ~ 5 of [Lap, 1878].)
- [Lap, 1878 ~ 1912] Laplace, P. S. *Oeuvres*. 14 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1878 ~ 1912.
- [Levi, 1981] Levi, M. Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillations. *Memoirs of the American Mathematical Society* 214 (1981), 1 ~ 147.
- [Le, 1920] Levi-Civita, T. Sur la régularisation du problème des trois corps. *Acta Mathematica* 42 (1920), 99 ~ 144.
- [Levin, 1949] Levinson, N. A second-order differential equation with singular solutions. *Annals of Mathematics* 50 (1949), 127 ~ 153.
- [Lev, 1968] Levy, J. La contribution française au développement de la mécanique céleste

- au cours de trois derniers siècles. In *Colloque sur le problème des n corps*, pp. 13 ~ 20. Editions du Centre Nationale de la Recherche Scientifique, Paris VII, 1968.
- [Li, 1947] Liapunov, M. A. Problème général de la stabilité de mouvement. *Annals of Mathematical Studies* 17. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1947.
- [Li, 1966] Liapunov, M. A. *Stability of Motion*. Academic Press, New York and London, 1966.
- [Li, 1992] Liapunov, M. A. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control* 55, 3 (1992), 531 ~ 773.
- [Lit, 1986] Littlewood, J. E. *Littlewood's Miscellany*. Edited by Béla Bollobás. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1986.
- [Ll, 1991] Llibre, J. On the number of central configurations in the n -body problem. *Celestial Mechanics* 50 (1991), 89 ~ 96.
- [Lo, 1993] Lorenz, E. N. *The Essence of Chaos*. University of Washington Press, Seattle, 1993.
- [Loc, 1998] Lochak, P. Arnold diffusion; a compendium of remarks and questions, and a supplement. In *Hamiltonian Systems with Three of More Degrees of Freedom*. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., Kluwer, Dordrecht-Boston-London (to appear).
- [Ly, 1940] Lysenko, T. D. In response to an article by A. N. Kolmogorov. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* 28, 9 (1940), 832 ~ 833 (in Russian; English translation published in *Comptes Rendus [Doklady] de l'Académie des Sciences de l'URSS*).
- [M, 1959] Magnus, K. Zur Entwicklung des Stabilitätsbegriffes der Mechanik. *Naturwissenschaften* 46 (1959), 590 ~ 595.
- [Ma, 1924] Maneff, G. La gravitation et le principe de l'égalité de l'action et de la réaction. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 178 (1924), 2159 ~ 2161.
- [Ma, 1925] Maneff, G. Die Gravitation und das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung. *Zeitschrift für Physik* 31 (1925), 786 ~ 802.
- [Ma, 1930a] Maneff, G. Le principe de la moindre action et la gravitation. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 190 (1930), 963 ~ 965.
- [Ma, 1930b] Maneff, G. La gravitation et l'énergie au zéro. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 190 (1930), 1374 ~ 1377.
- [M & M, 1975] Mather, J., and McGehee, R. Solutions of the collinear four-body problem which become unbounded in finite time. In *Dynamical Systems Theory and Applications*, pp. 573 ~ 587, ed. J. Moser. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.
- [Mc, 1974] McGehee, R. Triple collision in the collinear three-body problem. *Inventiones Mathematicae* 27 (1974), 191 ~ 227.
- [Mc, 1975] McGehee, R. Triple collision in Newtonian gravitational systems. In *Dynamical Systems Theory and Applications*, pp. 550 ~ 572, ed. J. Moser. Lecture Notes in Physics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.
- [Mc, 1981] McGehee, R. Double collisions for a classical particle system with nongravitational interactions. *Commentarii Mathematici Helvetici* 56 (1981), 524 ~ 557.
- [Mc, 1986] McGehee, R. Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics. *Expositiones Mathematicae* 4 (1986), 335 ~ 345.
- [Me, 1958] Meffroy, J. Sur l'existence effective du terme séculaire pur de la perturbation du troisième ordre des grands axes. *Bull. Astron.* 21 (1958), 261 ~ 322.
- [Mey, 1994] Meyer, M. *The richest vagabond* (a review of "Alfred Nobel: A Biography," by Kenne Fant. *New York Review of Books* 41 (1 and 2) (January 13, 1994), 26 ~ 27.
- [Mi, 1972] Mihăileanu, N. *Istoria Matematicii*. Vol. 1. Editura științifică și Enciclopedică, Bucharest, 1972.
- [Mi, 1981] Mihăileanu, N. *Istoria Matematicii*. Vol. 2. Editura științific și Enciclopedică,

Bucharest, 1981.

- [Mi & Mr, 1995] Mischiakow, K., and Mrozek, M. Chaos in the Lorenz equations: A computer-assisted proof. *Bulletin of the American Mathematical Society* **32**, 1 (1995), 66~72.
- [Mo, 1984] Moeckel, R. Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem. *SIAM Journal of Mathematical Analysis* **15**, 5 (1984), 857~876.
- [Mo, 1985] Moeckel, R. Relative equilibria of the four-body problem, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **5** (1985), 417~435.
- [Mo, 1990] Moeckel, R. On central configurations. *Mathematische Zeitschrift* **205** (1990), 499~517.
- [Mor, 1938] Morse, M. *Symbolic Dynamics*. Notes by R. Oldenburger of Lectures by Marston Morse. The Institute for Advanced Study, Princeton, N.J., 1938.
- [Mor, 1946] Morse, M. George David Birkhoff and his mathematical work. *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946), 357~391.
- [Mos, 1959] Moser, J. K. Review of Kolmogorov, A. N., "Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique." *Mathematical Reviews* **20**, 6 (1959), 675~676.
- [Mos, 1962] Moser, J. K. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, Math. Phys. Kl.* 1962, 1~20.
- [Mos, 1973] Moser, J. K. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1973.
- [Mos, 1978] Moser, J. K. Is the solar system stable? *The Mathematical Intelligencer* **1**, 2 (1978), 65~71.
- [Mou, 1910] Moulton, F. R. The straight line solutions of the problem of n bodies. *Annals of Mathematics* **12** (1910), 1~17.
- [Mou, 1912] Moulton, F. R. M. Henri Poincaré. *Popular Astronomy* **10**, 10 (1912), 625.
- [Mou, 1914] Moulton, F. R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Macmillan, London, 1914. (Reprinted by Dover, New York, 1970.)
- [Nm, 1960] Newman, J. R., ed. *The World of Mathematics*. Vols. 1~4. George Allen and Unwin, London, 1960.
- [N, 1686] Newton, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. S. Pepys, Royal Society Press, London, 1686.
- [N, 1934] Newton, I. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. 2 vols. Trans. Andrew Motte (1729). Revised, with historical and explanatory appendix, by Florian Cajori. University of California Press, Berkeley, 1934.
- [Or, 1976] Orăscu, Ș., Spiru Haret, Editura științifică și enciclopedică, București, 1976.
- [O, 1968] Oseledec, V. I. A multiplicative ergodic theorem; Liapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), 197~231.
- [P, 1986] Pacella, F. Equivariant Morse theory for flows and an application to the n -body problem. *Transactions of the American Mathematical Society* **297** (1986), 41~52.
- [P, 1987] Pacella, F. Central configurations of the n -body problem via equivariant Morse theory. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **97** (1987), 59~73.
- [Pa, 1897] Painlevé, P. *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Hermann, Paris, 1897.
- [Pa, 1972] Painlevé, P. *Oeuvres*. Vol 1. Ed. Centr. Nat. Rech. Sci., Paris, 1972.
- [Pá, 1991] Pál, Á. Spiru Haretu's theorem. *Romanian Astronomical Journal* **1**, 1~2 (1991), 5~11.
- [Pal, 1974] Palmore, J. I. Classifying relative equilibria. I. *Bulletin of the American Mathematical Society* **79**, 5 (1973), 904~908.
- [Pal, 1975a] Palmore, J. I. Classifying relative equilibria. II. *Bulletin of the American Mathematical Society* **81**, 2 (1975), 589~591.
- [Pal, 1975b] Palmore, J. I. Classifying relative equilibria. III. *Letters in Mathematical*

- Physics* 1 (1975), 71 ~ 73.
- [Pal, 1982] Palmore, J. I. Collinear relative equilibria of the planar n -body problem. *Celestial Mechanics* 28 (1982), 17 ~ 24.
- [Pan, 1951] Pancoe, A. "Properties of the solution of the second Painlevé transcendent." M.Sc. thesis, Northwestern University, 1982.
- [Pe, 1995] Peetre, J. Outline of a scientific biography of E. Meissel (1826 ~ 1895). *Historia Mathematica* 22 (1995), 154 ~ 178.
- [Pet, 1993] Peterson, I. *Newton's Clock—Chaos in the Solar System*. Freeman, New York, 1993.
- [Po, 1881 ~ 1886] Poincaré, H. J. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques* 7 (1881), 375 ~ 442, and 8 (1882), 251 ~ 296; *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 1 (1855), 167 ~ 244, and 2 (1886), 151 ~ 217.
- [Po, 1890] Poincaré, H. J. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica* 13 (1890), 1 ~ 270.
- [Po, 1891] Poincaré, H. J. Sur le problème des trois corps. *Bulletin Astronomique* 8 (1891), 12 ~ 24.
- [Po, 1892 ~ 1893 ~ 1899] Poincaré, H. J. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Vols. 1 ~ 3. Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899. (Reprinted by Librairie Albert Blanchard, Paris, 1987.)
- [Po, 1898] Poincaré, H. J. Sur la stabilité du système solaire. In *Annuaire pour l'an 1898 par le Bureau des Longitudes*, pp. B.1 ~ 2. Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [Po, 1905] Poincaré, H. J. *Leçons de mécanique céleste*. Gauthier-Villars, Paris, 1905.
- [Po, 1912] Poincaré, H. J. Sur un théorème de géométrie. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 33 (1912), 375 ~ 407.
- [Po, 1929] Poincaré, H. J. *The Foundation of Science*. The Science Press, New York, 1929.
- [Po, 1951 ~ 1956] Poincaré, H. J. *Oeuvres*, 11 vols. Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [Po, 1993] Poincaré, H. J. *New Methods of Celestial Mechanics*. Ed. and introduced by D. Goroff. American Institute of Physics, New York, 1993.
- [P & S, 1968] Pollard, H., and Saari, D. G. Singularities of the n -body problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 30 (1968), 263 ~ 269.
- [P & S, 1970] Pollard, H., and Saari, D. G. Singularities of the n -body problem. II. In *Inequalities—II*. pp. 255 ~ 259, ed. O. Shisha. Academic Press, New York, 1970.
- [R, 1985] Ratiu, T. Haretu's contribution to the n -body problem. *Libertas Mathematica* 5 (1985), 1 ~ 7.
- [Re, 1987] Regis, E. *Who Got Einstein's Office? Eccentricity and Genius at the Institute for Advanced Study*. Addison-Wesley, New York, 1987.
- [Ru, 1991] Ruelle, D. *Chance and Chaos*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.
- [S, 1971] Saari, D. G. Improbability of collisions in Newtonian gravitational systems. *Transactions of the American Mathematical Society* 162 (1971), 267 ~ 271; 168 (1972), 521; 181 (1973), 351 ~ 368.
- [S, 1973a] Saari, D. G. Singularities of Newtonian gravitational systems. In *Dynamical Systems, Salvador, Bahia, Brazil*, pp. 479 ~ 487, ed. M. M. Peixoto. Academic Press, New York, 1973.
- [S, 1973b] Saari, D. G. Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 49 (1973), 311 ~ 320.
- [S, 1973c] Saari, D. G. On global existence and uniqueness theorems for gravitational systems. *Celestial Mechanics* 8 (1973), 157 ~ 161.
- [S, 1975] Saari, D. G. Collisions are of first category. *Proceedings of the American Mathematical Society* 47, 2 (1975), 442 ~ 445.
- [S, 1976] Saari, D. G. The n -body problem of celestial mechanics. *Celestial Mechanics*

14 (1976), 11 ~ 17.

- [S, 1977] Saari, D. G. A global existence and uniqueness theorem for the four-body problem of Newtonian mechanics. *Journal of Differential Equations* 26 (1977), 80 ~ 111.
- [S, 1978] Saari, D. G. Apportionment methods and the House of Representatives. *American Mathematical Monthly* 85 (1978), 792 ~ 802.
- [S, 1980] Saari, D. G. On the role and the properties of n -body central configurations. *Celestial Mechanics* 21 (1980), 9 ~ 20.
- [S, 1984] Saari, D. G. The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n -body problem. *Journal of Differential Equations* 55 (1984), 300 ~ 329.
- [S, 1987] Saari, D. G. The source of some paradoxes from social choice and probability. *Journal of Economic Theory* 41 (1987), 1 ~ 22.
- [S, 1994] Saari, D. G. *Geometry of Voting*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.
- [S & X, 1989] Saari, D. G., and Xia, Z. The existence of oscillatory and superhyperbolic motion in Newtonian systems. *Journal of Differential Equations* 82 (1989), 342 ~ 355.
- [S & X, 1995] Saari, D. G., and Xia, Z. Off to infinity in finite time. *Notices of the American Mathematical Society* 42 (1995), 538 ~ 546.
- [Sh, 1979] Sheldon, R. O. Noncollision singularities in the four-body problem. *Transactions of the American Mathematical Society* 249, 2 (1979), 225 ~ 259.
- [Si, 1941] Siegel, C. L. Der Dreierstoss. *Annals of Mathematics* 42, 1 (1941), 127 ~ 168.
- [Si, 1956] Siegel, C. L. *Vorlesungen über Himmelsmechanik*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1956.
- [S & M, 1971] Siegel, C. L., and Moser, J. K. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1971.
- [Sim, 1977] Simó, C. Relative equilibrium solutions in the four-body problem. *Celestial Mechanics* 18 (1977), 165 ~ 184.
- [Sim, 1981] Simó, C., Analysis of triple collision in the isosceles problem. In *Classical Mechanics and Dynamical Systems*, pp. 203 ~ 224, ed. R. Devaney and Z. Nitecki. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 70. Dekker, New York, 1981.
- [S & M, 1988] Simó, C., and Martinez, R. Qualitative study of the planar isosceles three-body problem. *Celestial Mechanics* 41 (1988), 179 ~ 251.
- [Sit, 1961] Sitnikov, K. The existence of oscillatory motion in the three-body problem. *Soviet Physics Doklady* 5 (1961), 647 ~ 650.
- [Sm, 1965] Smale, S. Diffeomorphisms with many periodic points. In *Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse*, pp. 63 ~ 70, ed. S. S. Cairns. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.
- [Sm, 1970a] Smale, S. Topology and mechanics II: The planar n -body problem. *Inventiones Mathematicae* 11 (1970), 45 ~ 64.
- [Sm, 1970b] Smale, S. Problems of the nature of relative equilibria in celestial mechanics. In *Manifolds-Amsterdam 1970*, pp. 194 ~ 198. Lecture Notes in Mathematics 197 (1970). Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1975.
- [Sm, 1980] Smale, S. *The Mathematics of Time*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Sm, 1991] An Hour's Conversation with Stephen Smale. *Nonlinear Science Today* 1, 1 (1991), 1, 3, 12 ~ 18.
- [Smi, 1992] Smirnov, V. I. Biography of A. M. Lyapunov. *International Journal of Control* 55, 3 (1992), 775 ~ 784.
- [Sp, 1970] Sperling, H. J. On the real singularities of the N -body problem. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 245 (1970), 15 ~ 40.
- [St, 1989] Stewart, I. *Does God Play Dice? The Mathematics of Chaos*. Basil Blackwell, Oxford, 1989.

- [Su, 1907] Sundman, K. Recherches sur le problème des trois corps. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* **34**, 6 (1907).
- [Su, 1909] Sundman, K. Nouvelles recherches sur le problème des trois corps. *Acta Societatis Scientiarum Fennicae* **35**, 9 (1909).
- [Su, 1912] Sundman, K. Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica* **36** (1912), 105–179.
- [Sy, 1933] Synge, J. L. John Charles Fields. *Journal of the London Mathematical Society* **8** (1933), 153–160.
- [Sz, 1967] Szebehely, V. Burrau's problem of the three bodies. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **58** (1967), 60–65.
- [Sz, 1984] Szebehely, V. Review of concepts of stability. *Celestial Mechanics* **34** (1984), 49–64.
- [T, 1991–1992] Tikhomirov, V. M., ed. *Selected Works of A. N. Kolmogorov*. Kluwer, Dordrecht-Boston-London; vol.1, 1991; vol.2, 1992.
- [Tr, 1976] Tropp, H. S. The origins and history of the Fields Medal. *Historia Mathematica* **3** (1976), 167–181.
- [V & V, 1927] van der Pol, B., and van der Mark, J. Frequency demultiplication. *Nature* **120** (1927), 363–364.
- [V, 1984] Verhulst, F. Perturbation theory from Lagrange to van der Pol. *Nieuw Archief voor Wiskunde* (4) **2** (1984), 428–438.
- [W, 1975] Waldvogel, J. The close triple approach. *Celestial Mechanics* **11** (1975), 429–432.
- [W, 1976] Waldvogel, J. The three-body problem near triple collision. *Celestial Mechanics* **14** (1976), 287–300.
- [Wa, 1993] Walters, P., ed. *Symbolic Dynamics and Its Applications*. Contemporary Mathematics, vol.135. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1993.
- [We, 1980] Westfall, R. *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1980.
- [Wil, 1913] Wilczynski, E. J. Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* **21** (1913), 1–31.
- [Wi, 1994] Wilson, R. Russian mathematics II. *The Mathematical Intelligencer* **16**, 3 (1994), 76.
- [Win, 1941] Wintner, A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.
- [X, 1991] Xia, Z. Central configurations with many small masses. *Journal of Differential Equations* **91** (1991), 168–179.
- [X, 1992] Xia, Z. The existence of noncollision singularities in the N -body problem. *Annals of Mathematics* **135** (1992), 411–468.
- [X, 1993] Xia, Z. Arnold diffusion in the elliptic restricted three-body problem. *Journal of Dynamics and Differential Equations* **5**, 2 (1993), 219–240.
- [X, 1994] Xia, Z. Arnold diffusion and oscillatory solutions in the planar three-body problem. *Journal of Differential Equations* **110** (1994), 289–321.
- [Z, 1987] Zdravkovska, S. Conversation with Vladimir Igorevich Arnold. *The Mathematical Intelligencer* **9**, 4 (1987), 28–32.
- [Z & D, 1994] Zdravkovska, S., and Duren, P. L., eds. *Golden Years of Moscow Mathematics*. History of Mathematics, vol. 6. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1994.
- [Ze, 1993] Zehnder, E. Cantor-Medaille für Jürgen Moser. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung* **95** (1993), 85–94.
- [Zei, 1908] Zeipel, H. von. Sur les singularités du problème des n corps. *Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik* **4**, 32 (1908), 1–4.